工业和信息化普通高等教育“十三五”规划教材立项项目

概率论与数理统计

◎ 苏本堂 张军本 主编

Probability and Mathematical Statistics

中国工信出版集团 人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

S509

工业和信息化普通高等教育“十三五”规划教材立项项目

概率论与数理统计

◎ 苏本堂 张军本 主编
◎ 王志武 王传伟 孟宪勇 于瑞林 王晶 田祥 刘梦良 副主编

Probability and Mathematical Statistics

人民邮电出版社

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计 / 苏本堂，张军本主编. -- 北京：人民邮电出版社，2017.1
ISBN 978-7-115-44382-3

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①苏… ②张… Ⅲ. ①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第317909号

内 容 提 要

本书为全国普通高等院校本科概率论与数理统计教材，主要内容有事件与概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析等。

本书以本科数学基础课程教学基本要求为基础，参照近年来全国硕士研究生入学统一考试教学大纲要求，结合作者多年来的教学研究和教学实践，在不断总结经验的基础上编写而成。全书结构严谨，内容丰富，突出了数学能力培养，教师好讲，学生易用。

本书可作为高等院校工科类、经济类、农林类等各专业的本科教材，也可供学生考研参考之用。

◆ 主　　编　苏本堂　张军本
副 主 编　王志武　王传伟　孟宪勇　于瑞林
王　晶　田　祥　刘梦良
责任编辑　张　斌
责任印制　沈　蓉　彭志环

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市丰台区成寿寺路 11 号
邮编　100164　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京鑫正大印刷有限公司印刷

◆ 开本：700×1000　1/16
印张：14.25　　　2017 年 1 月第 1 版
字数：281 千字　　　2017 年 1 月北京第 1 次印刷

定价：32.00 元

读者服务热线：(010)81055256　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315

前言

Preface

概率论与数理统计不仅是高等学校理工类、经济类、农林类各专业学生必修的一门专业基础课，同时也是一门应用性很强的学科，也是硕士研究生入学全国统一考试中必考的数学课程之一。随着高等教育的大众化，学生对数学的需求也呈现多样化趋势。因此，概率论与数理统计教材既不能写成考研辅导书，也不能写成应用手册。我们在编写本书的过程中，注重理论和应用并重，概率内容和统计内容并重，内容和习题并重。本书的主要特点如下。

一、保持体系完整，概率论和统计学内容并重。概率论与数理统计作为一门基础课突出了概率统计的思想和方法，注重培养学生的逻辑思维能力。本书在保持体系完整前提下，删略了一些繁琐的理论证明。作为数学基础课程中应用性较强的一门课程，本书通过介绍数理统计的常用经典的方法，让学生掌握统计的基本思想和方法，而不是面面俱到写成一本应用手册。

二、教材内容和习题并重。在教材内容的选取上以必需够用为原则，满足教学的基本要求；习题分节设立，使习题更具有针对性。习题中既有基本题，也有难度较高的提高题，每章配有总复习题，由一些综合题和考研题构成。我们希望通过这样的习题配备，满足不同层次学生的要求，培养学生的学习兴趣和能力。

三、教学内容注意和中学相关内容的衔接。由于概率统计的部分内容已经下放到中学。凡是中学已经学过的内容，本书编写中尽量避免简单重复，且进行了适当的扩充和提高。

四、章节容量安排适当，每一节内容多数能够在一个教学单元内（2 学时）完成。文字处理上力求简洁，尽量用通俗易懂的语言来阐述严谨的逻辑推导，强调直观性和应用背景，注重可读性，使教师便于教学，使学生便于学习。

本书由苏本堂、张军本担任主编，王志武、王传伟、孟宪勇、于瑞林、王晶、田祥、刘梦良担任副主编，全书由苏本堂统稿、定稿。

本书在编写和试用过程中，得到了山东农业大学信息科学与工程学院数学系全体同仁的支持和帮助，他们提出了许多宝贵意见和建议，在此深表感谢。

由于编者水平所限，难免出现不妥之处，敬请读者批评指正。

编　者

2016 年 10 月

目录

Contents

第1章 事件与概率

在自然界和人类社会中存在着两类不同的现象. 一类是可事前预言的，即在一定条件下必然发生(或必然不发生)，这类现象称为**确定性现象或必然现象**. 例如，在标准大气压下，水加热到100℃时必然会沸腾；水稻的生长从播种到收割，总是经过发芽、育秧、长叶、吐穗、扬花、结果这几个阶段；平面上三角形的内角和是180°，等等. 以前我们所学过的各门数学课程基本上都是用来处理和研究这类确定性现象的. 另一类现象是事前无法预言的，即在一定条件下可能出现，也可能不出现. 但是，大量地重复实现这组条件，结果又呈现某种规律性，这种规律性称之为统计规律性，这种现象称为**随机现象**. 例如，某地区的年降雨量、同样耕作条件下各块地的亩产量、过马路交叉口时可能遇到的交通指挥灯的颜色等.

人们往往通过“试验”的方法来区分确定性现象和随机现象. 这里的“试验”是指在一组条件的实现下，对自然界和社会现象的观察或实验. 条件每实现一次就是一次试验，观察到的结果就是试验的结果. 确定性现象在相同的条件下，每次试验都能得到同样的结果. 随机现象则表现为每次试验有多种可能的结果.

概率论与数理统计是从数量方面研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科. 由于随机现象的普遍性，使概率论与数理统计的理论与方法在工业、农业、经济、军事、教育及科学技术等领域中均有广泛的应用，并与其相应的学科结合形成许多新的边缘学科. 这些特点使概率论与数理统计成为当代十分活跃的数学分支.

§1.1 随机事件及其计算

1.1.1 样本空间与随机事件

在概率论中，我们把研究随机现象时所进行的观察或实验，称为**随机试验**并简称为**试验**. 随机试验通常用字母 E 来表示. 下面举几个例子来说明.

E_1：抛掷一枚硬币，观察正面、反面出现的情况；

E_2：投掷一枚均匀的骰子，观察其出现的点数；

E_3：观察某网站每天的点击次数；

E_4：一批灯泡，从中任取一只，测试它的寿命.

由以上例子不难看出，随机试验具有三个共同的特点：

(1) 试验在相同的条件下可以重复地进行.

(2) 每次试验的结果不唯一，且能事先明确试验的所有可能结果.

(3) 在进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

试验 E 的每一个可能的结果，称为**样本点**，记为 ω. 试验 E 的所有样本点组成的集合称为试验 E 的**样本空间**，记为 Ω，即 $\Omega=\{\omega\}$.

对一个具体的随机试验而言，根据试验的内容明确它的样本空间是至关重要的.

例 1.1.1 设 Ω_k 表示前面各试验 $E_k(k=1, 2, 3, 4)$的样本空间，则

$\Omega_1=\{\omega_1, \omega_2\}$，$\omega_1$ 表示“出现正面”，ω_2 表示“出现反面”；

$\Omega_2=\{1, 2, \cdots, 6\}$，$\omega_i=i$ 表示“出现点数 i”，$i=1, 2, \cdots, 6$；

$\Omega_3=\{0, 1, 2, 3\cdots\}$，$\omega_i=i$ 表示“网站的点击数为 i”，$i=0, 1, 2, \cdots$；

$\Omega_4=\{t \mid t\geqslant 0\}$，$t$ 表示灯泡的寿命.

在随机试验中，我们通常会关心具有某些特征的结果是否出现. 例如，投掷一枚骰子，会关心掷出的点数是不是偶数. 在概率论中，这种在一次试验中可能出现，也可能不出现的结果称为**随机事件**，简称**事件**. 习惯上常用大写字母 A，B，C 等表示. 不言而喻，我们所关心的具有某些特征的结果构成了 Ω 的一个子集. 在试验中，我们说事件 A 发生，当且仅当 A 中的某一样本点 ω 出现了.

样本空间是试验所有样本点组成的集合，而随机事件是由具有某些特征的样本点所组成的. 从集合论的观点来看，一个随机事件就是样本空间 Ω 的一个子集. 样本空间 Ω 是自身的子集，从而是随机事件，它包含所有的样本点，在每次试验中必然发生，称为**必然事件**. 空集$\varnothing$是 Ω 的子集，从而是随机事件，但它不包含任何样本点，故在每次试验中都不发生，称为**不可能事件**. 必然事件与不可能事件是两个“特殊”的随机事件.

如在 E_2 中，

$A=$“出现偶数点”$=\{2, 4, 6\}$，

$B=$“出现的点数大于 3”$=\{4, 5, 6\}$，

$C=$“出现的点数不超过 6”$=\{1, 2, \cdots, 6\}=\Omega$，

$D=$“出现的点数超过 6”$=\varnothing$，

都是一些随机事件.

例 1.1.2 E：将一枚硬币抛两次，观察正面(H)、反面(T)出现的情况. 试写出 E 的样本空间以及事件 $A=$“两次都出现正面”，$B=$“两次出现同一面”，$C=$“出现正面”.

解 该试验有四个样本点：(H，H)，(H，T)，(T，H)，(T，T). 于是

$$\Omega=\{(\mathrm{H}, \mathrm{H}), (\mathrm{H}, \mathrm{T}), (\mathrm{T}, \mathrm{H}), (\mathrm{T}, \mathrm{T})\},$$

$A=\{(\mathrm{H}, \mathrm{H})\}$，$B=\{(\mathrm{H}, \mathrm{H}), (\mathrm{T}, \mathrm{T})\}$，$C=\{(\mathrm{H}, \mathrm{H}), (\mathrm{H}, \mathrm{T}), (\mathrm{T}, \mathrm{H})\}$.

1.1.2 事件的关系与运算

概率论的任务之一是研究随机事件的规律，而随机事件往往不是孤立的，相互之间常常存在着一定的关系. 我们希望通过对较简单事件规律的研究去揭示更复杂事件的规律. 为此，需要研究事件的关系及运算.

设试验 E 的样本空间为 Ω，而 A，B，$A_k(k=1, 2, \cdots)$是 E 的事件.

1. 事件的包含

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称**事件 B 包含事件 A，或事件 A 包含于事件 B**，记为 $B \supset A$ 或 $A \subset B$.

在 E_4 中，若 $A=\{t \mid 10<t<100\}$，$B=\{t \mid 5<t<500\}$，则 $A \subset B$.

对于任一事件 A，有 $A \subset \Omega$，$\varnothing \subset A$. 此外，若 $A \subset B$，$B \subset C$，则 $A \subset C$.

2. 事件的相等

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称**事件 A 与 B 相等**，记为 $A=B$.

3. 事件的互不相容

若 A 与 B 不能同时发生，则称事件 A 与 B **是互不相容**的或**互斥**的.

如在 E_2 中，若 $A=$"出现点数小于 3"，$B=$"出现点数大于 4"，则事件 A 与 B 是互不相容的.

4. 事件的和

"事件 A 与事件 B 中至少有一个发生"的事件称为**事件 A 与事件 B 的和事件**，记为 $A \cup B$.

如在一穴中种两粒玉米种子，若 $A=$"两粒都出苗"，$B=$"只有一粒出苗"，则 $A \cup B$ 表示事件"至少有一粒出苗".

类似地，"n 个事件 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 中至少有一个发生"的事件称为 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 的和事件，记为 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$，简记为$\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$；

"可列个事件 A_1，A_2，$\cdots$，A_n，$\cdots$中至少一有个发生"的事件称为 A_1，A_2，$\cdots$，A_n，$\cdots$的和事件，记为 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$，简记为$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$.

5. 事件的积

"事件 A 与事件 B 同时发生"的事件称为**事件 A 与 B 的积事件**，记为 $A \cap B$ 或 AB.

如例 1.1.2 中，$B \cap C=\{(\mathrm{H}, \mathrm{H})\}$.

类似地，"n 个事件 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 同时发生"的事件称为 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 的积事件，记为 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ 或 $A_1 A_2 \cdots A_n$，简记为$\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$；

"可列个事件 A_1，A_2，$\cdots$，A_n，$\cdots$同时发生"的事件称为 A_1，A_2，$\cdots$，A_n，$\cdots$的积事件，记为 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots$或 $A_1 A_2 \cdots A_n \cdots$，简记为$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$.

6. 事件的差

"事件 A 发生而事件 B 不发生"，这一事件称为**事件 A 与 B 的差事件**，记为 $A-B$.

如例 1.1.2 中，$C-A=\{(\mathrm{H},\ \mathrm{T}),\ (\mathrm{T},\ \mathrm{H})\}$.

7. 对立事件

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，但二者必发生其一，即事件 A 与 B 满足条件

$$AB=\varnothing,\ A\cup B=\Omega,$$

则称**事件 A 与 B 互为对立事件或互为逆事件**，又称 A 是 B 的**对立事件**(或 B 是 A 的对立事件)，记为 $A=\overline{B}$(或 $B=\overline{A}$).

显然，$\overline{A}\cup A=\Omega$，$\overline{A}\cap A=\varnothing$，因此 $\overline{A}$ 是 A 的对立事件，A 也是 $\overline{A}$ 的对立事件，即 $\overline{\overline{A}}=A$.

由定义不难看出，相互对立的事件一定是互不相容事件，但互不相容事件未必是对立事件.

熟悉集合论的读者一定会发现，事件间的关系及运算本质上就是集合论中集合间的关系及运算. 如事件的和就是集合的并，事件的积就是集合的交. 因此，在许多场合，采用集合论的表达方式，既显得简练易理解，又可以把对事件的分析转化为对集合的分析，利用集合间的关系与运算来分析事件间的关系与运算. 不过，我们应该注意一点，就是要学会用概率论的语言来解释事件间的关系和运算.

有时用文氏图来表示事件间的关系及运算较为直观，事件 $A\cup B$，$A\cap B$，$A-B$，$\overline{A}$ 在图 1-1 至图 1-4 中分别以阴影表示.

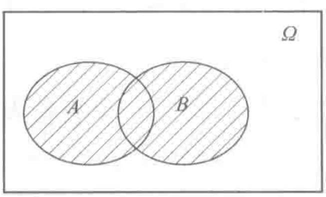

图 1-1　$A\cup B$

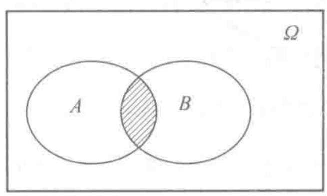

图 1-2　$A\cap B$

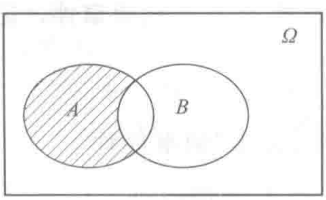

图 1-3　$A-B$

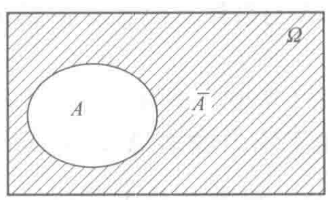

图 1-4　$\overline{A}$

例 1.1.3　设 A，B，C 是某随机试验的三个事件，则

(1) 事件"只有 A 发生"可表示为 $A\overline{B}\,\overline{C}$.

(2) 事件“A，B，C 中恰有一个发生”可表示为 $A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$.

(3) 事件“A，B，C 中至少有一个发生”可表示为 $A \cup B \cup C$.

(4) 事件“A，B，C 中恰有两个发生”可表示为 $AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC$.

(5) 事件“A，B，C 中不多于一个发生”可表示为 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \cup A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$.

(6) 事件“A，B，C 中 A 发生，B，C 至少有一个不发生”可表示为 $A(\overline{B} \cup \overline{C})$ 或 $A\overline{B}C \cup AB\overline{C} \cup A\overline{B}\,\overline{C}$.

事件的运算满足下述规则(证明略)：

(1) **交换律** $A \cup B = B \cup A$，$AB = BA$.

(2) **结合律** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$，$(AB)C = A(BC)$.

(3) **分配律** $(A \cup B) \cap C = AC \cup BC$，$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

(4) **对偶律(德摩根公式)(De Morgan 公式)** $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$，$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. 对于 n 个事件及可列个事件，德摩根公式也成立.

习题 1-1

1. 写出下列随机试验的样本空间及下列事件中的样本点：

(1) 将一颗骰子掷两次，记录出现点数. A=“两次点数之和为 10”，B=“第一次的点数比第二次的点数大 2”；

(2) 一个口袋中有 5 只外形完全相同的球，编号分别为 1，2，3，4，5，从中同时取出 3 只球，观察其结果. A=“球的最小号码为 1”；

(3) 记录在一段时间内，通过某桥的汽车数量. A=“通过的汽车不足 5 辆”，B=“通过的汽车不少于 3 辆”.

2. 设 A，B，C 是随机试验 E 的三个事件，试用 A，B，C 表示下列事件：

(1) 仅 A 发生；

(2) A，B，C 中至少有两个发生；

(3) A，B，C 中不多于两个发生；

(4) A，B，C 中恰有两个发生；

(5) A，B，C 中至多有一个发生.

3. 一个工人生产了三件产品，以 $A_i(i=1, 2, 3)$ 表示“第 i 件产品是正品”，试用 A_1，A_2，A_3 表示下列事件：

(1) 没有一件产品是次品；

(2) 至少有一件产品是次品；

(3) 恰有一件产品是次品；

(4) 至少有两件产品不是次品.

4. 对飞机进行两次射击，每次射一弹，设 A=“恰有一弹击中飞机”，B=“至少有一弹击中飞机”，C=“两弹都击中飞机”，D=“两弹都没击中飞机”. 问

A，B，C，D 中哪些是互不相容事件？哪些是对立事件？

5. 对于任意两个事件 A 和 B，与 $A\cup B=B$ 不等价的是（　　）.

(A) $A\subset B$　　(B) $\overline{B}\subset\overline{A}$　　(C) $A\overline{B}=\varnothing$　　(D) $\overline{A}B=\varnothing$

6. 试判断下列命题是否成立？

(1) 设 A，B，C 为随机事件，则 A 与 $\overline{A\cup B\cup C}$ 互不相容；

(2) 若 A，B 为两个互不相容的事件，则 A，B 一定相互对立；

(3) 若 A，B 为两个互不相容的事件，则 $\overline{A}$，$\overline{B}$ 一定相容.

§1.2　概率的定义

一个事件在一次试验中可能发生，也可能不发生；不同的事件在同一个试验中发生的可能性有大有小. 一个事件就个别试验而言，其发生与否难以预料，但是在大量重复试验中，其发生的可能性大小是可以度量的. 我们把度量随机事件 A 发生可能性大小的数值称为事件 A 发生的概率，记为 $P(A)$.

在概率论的发展史上，人们曾针对不同的模型，从不同的角度给出了概率的定义及计算概率的方法.

1.2.1　概率的古典定义

如果随机试验具有下述两个特征：

(1) 试验的结果只有有限个，即样本空间中的样本点只有有限个；

(2) 试验每个结果发生的可能性相同.

那么称这类随机试验的数学模型为**等可能概型**，也称为**古典概型**.

定义 1.2.1　设随机试验 E 为古典概型，其样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_n\}$. 事件 A 包含 k 个样本点，则随机事件 A 的概率定义为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{\text{事件 }A\text{ 中包含的样本点数}}{\Omega\text{ 中样本点的总数}}. \tag{1.2.1}$$

等可能概型是概率论发展初期的主要研究对象，法国数学家拉普拉斯(Laplace)在 1812 年把式(1.2.1)作为概率的一般定义，现在通常称它为**概率的古典定义**.

古典方法是概率论发展初期确定概率的常用方法，因此所得的概率又称为古典概率. 在古典方法中，事件 A 的概率归结为计算 A 中含有的样本点的个数和 Ω 中含有的样本点的总数.

例 1.2.1　已知 N 个产品中有 M 个次品，从中任意抽取 $n(n\leqslant N)$ 个产品，求其中恰有 $m(m\leqslant\min(n,\ M))$ 个次品的概率.

解　设 $A=$“取出的 n 个产品恰有 m 个次品”. 试验的样本点总数为 C_N^n，事件 A 包含的样本点数为 $C_M^m C_{N-M}^{n-m}$，于是

$$P(A)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}(n\leqslant N,\ m\leqslant \min(n,\ M)).$$

例 1.2.2 设一只口袋内有 a 个白球，b 个黑球，现从袋中依次取出，求第 k 次取到黑球的概率.

解 设事件 A="第 k 次取到黑球". 该试验可看作是将取出的球依次排放在 $a+b$ 个位置上，而 $a+b$ 个球在 $a+b$ 个位置上的每一种排列就是一个样本点，所以样本点的总数为 $(a+b)!$.

"第 k 次取到黑球"就是在第 k 个位置上放上黑球，其余的 $(a+b-1)$ 个位置任意地放剩余的球. 因此，事件 A 包含的样本点的个数是 $b(a+b-1)!$.

因此

$$P(A)=\frac{b(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{b}{(a+b)}.$$

这个例题实际上从理论上解释了为什么在实际生活中的抓阄方式是公平合理的，因为不论先抓还是后抓，抓中的可能性都是相同的.

例 1.2.3 设有 n 个人，每个人都等可能地被分配到 N 个房间中的任意一间去住 $(n\leqslant N)$，求下列事件的概率：(1) A="指定的 n 个房间中各有一个人住"；(2) B="恰有 n 个房间中各有一个人住".

解 由于每一个人有 N 个房间可供选择，有 N 种不同的选法，n 个人住的方式共有 N^n 种，即 Ω 中的样本点总数为 N^n 个.

(1) 指定的 n 个房间各住一人，就是 n 个人在 n 个指定的房间中的排列，所以 A 包含的样本点数为 $A_n^n=n!$. 于是

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}.$$

(2) 因为没有指定是哪 n 个房间，这 n 个房间可以从 N 个房间中任意选取，所以共有 C_N^n 种选法，即 B 包含的样本点数为 $C_N^n\cdot A_n^n$. 于是

$$P(B)=\frac{C_N^n\cdot A_n^n}{N^n}=\frac{N!}{N^n(N-n)!}.$$

从以上各例看出，关于古典概型的概率计算，首先要弄清样本空间的样本点，并计算出它的总数，而后再计算事件 A 所包含的样本点数. 其中许多计算是相当困难而富有技巧性的，经常用到加法原理、乘法原理和一些排列与组合知识.

1.2.2 概率的几何定义

如果随机试验具有下述两个特征：

(1) 试验的样本空间 Ω 充满某个区域，其度量(长度、面积或体积)大小可用 S_Ω 表示.

(2) 任意一点落在度量相同的子区域内是等可能的.

那么称这类随机试验的数学模型为**几何概型**.

定义 1.2.2 设随机试验 E 为几何概型，其样本空间 Ω 的度量是 S_Ω，事件 A 是 Ω 中某个子区域，其度量为 S_A，则随机事件 A 的概率定义为

$$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}. \tag{1.2.2}$$

式(1.2.2)称作概率的几何定义，求几何概型中事件概率的关键是对样本空间和所求事件用图形描述清楚(一般用直线、平面或空间图形)，然后算出相关图形的度量(一般为长度、面积或体积).

例 1.2.4 甲、乙两人约定在 6 时到 7 时之间在某处会面，并约定先到者等候另一个人一刻钟，过时即离去. 求两人能会面的概率.

解 以 x 和 y 分别表示甲、乙两人到达约会地点的时间，在平面上建立直角坐标系如图 1-5 所示，则(x, y)的所有可能结果是边长为 60 的正方形，即

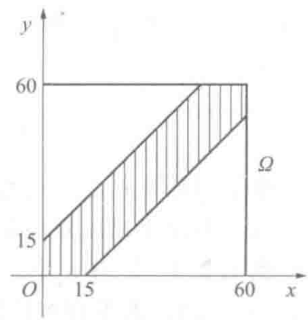

图 1-5 会面问题中的 Ω 与 A

$$\Omega=\{(x, y)\mid 0\leqslant x<60, 0\leqslant y<60\},$$

其面积是 $S_\Omega=60^2$.

设 A="两人能够会面"，则 A 发生的充要条件是

$$|x-y|\leqslant 15，即 A=\{(x, y)\mid |x-y|<15 且(x, y)\in\Omega\},$$

其面积是 $S_A=60^2-45^2$.

这是一个几何概型问题，其概率为

$$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=\frac{60^2-45^2}{60^2}=\frac{7}{16}.$$

1.2.3 概率的统计定义

若在 n 次重复试验中事件 A 发生了 n_A 次，则称比值 $\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 在 n 次试验中发生的**频率**，记为 $f_n(A)$.

例 1.2.5 考察种子的发芽率. 从大批种子中抽取 10 批次种子做发芽试验，其结果如表 1-1 所示.

表 1-1 种子发芽试验的数据

种子粒数	2	5	10	70	130	310	700	1500	2000	3000
发芽粒数	2	4	9	60	116	282	639	1339	1806	2715
发芽率	1	0.8	0.9	0.857	0.892	0.910	0.913	0.893	0.903	0.905

从表 1-1 中看出，种子发芽率的大小具有偶然性，但随着抽取种子粒数的增多，则可发现发芽率在 0.9 附近摆动.

例 1.2.6 历史上有不少人做过抛一枚硬币的试验，来观察“正面向上”这一事件发生的规律，其结果如表 1-2 所示. 从表中看出“正面向上”的频率在 0.5 附近摆动.

表 1-2 历史上抛硬币试验的数据

实验者	n	n_H	$f_n(H)$
蒲丰	4040	2048	0.5070
K. 皮尔逊	12000	6019	0.5016
K. 皮尔逊	24000	12012	0.5005

从上述两例的统计结果看，在多次重复试验中，同一事件发生的频率虽不尽相同，但却在一个固定的数值附近摆动，并随着试验次数的增加，逐渐稳定于这个固定的数值，称此为频率的稳定性. 可见频率在一定意义下揭示了随机事件的统计规律性，据此给出概率的统计定义.

定义 1.2.3 在不变的一组条件下，重复进行 n 次试验，事件 A 发生了 n_A 次. 当 n 很大时，频率 $f_n(A)=\dfrac{n_A}{n}$稳定地在某一固定数值 p 附近摆动，且这种摆动幅度随着试验次数的增多有越来越小的趋势，我们就称数值 p 为随机事件 A 的概率，记为 $P(A)$，即 $P(A)=p$.

上述定义还提供了求某事件概率的一种手段，即当 n 足够大时，用它的频率作为概率的近似值.

易知频率具有下列性质：

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$.

(2) $f_n(\Omega)=1$.

(3) 若 A_1，A_2，…，A_n 是两两互不相容的事件，则

$$f_n(\bigcup_{k=1}^{n} A_k)=\sum_{k=1}^{n} f_n(A_k).$$

1.2.4 概率的公理化定义

在概率论的发展史上，曾有过概率的古典定义、几何定义、统计定义等. 这些定义各适合一类随机现象，都不具有一般性. 如何给出适合一切随机现象的最一般定义呢？1933 年，苏联数学家柯尔莫哥洛夫(A. H. Колмогоров)首次给出了概率的公理化定义，为一种普遍而严格的数学化概率理论奠定了基础.

定义 1.2.4 设 E 是随机试验，Ω 是它的样本空间. 对于 E 中的每一事件 A 对应于一个实数 $P(A)$，则称 $P(A)$为事件 A 的**概率**. 若 $P(A)$满足下列三个条件：

(1) **非负性** $P(A)\geqslant 0$.

(2) **规范性** $P(\Omega)=1$.

(3) **可列可加性** 对于两两互不相容的事件 A_1, A_2, …, 有

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)=\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k), \tag{1.2.3}$$

则该定义称为概率的**公理化定义**.

习题 1-2

1. 在电话号码中任取一个电话号码，求后面四个数字全不相同的概率.

2. 一批晶体管共 40 只，其中 3 只是坏的，今从中任取 5 只，求：(1) 5 只全好的概率；(2) 5 只中恰有两只坏的概率.

3. 袋中有编号为 1 到 10 的 10 个球，今从袋中任取 3 个球，求：(1) 3 个球的最小号码为 5 的概率；(2) 3 个球的最大号码为 5 的概率.

4. (1) 教室里有 r 个学生，求他们的生日都不相同的概率；

(2) 房间里有四个人，求至少两个人的生日在同一个月的概率.

5. 袋中有 9 只黑球，1 只白球，它们除颜色不同外，其他方面没有差别，现随机地将球一只只摸出来，求 A_k =“第 k 次摸出白球”的概率($k=1$, 2, …, 10).

6. 随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$ (a 为正常数)内掷一点，点落在圆内任何区域的概率与区域的面积成正比，求原点与该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\pi/4$ 的概率.

7. 在区间(0, 1)内，随机地取出两个数，求两数之和小于 1.2 的概率.

§1.3 概率的性质

利用概率的公理化定义(非负性、规范性和可列可加性)，可以得到概率的一系列性质. 下面我们逐个给出概率的一些常用性质.

1.3.1 概率的常用性质

性质 1 $P(\varnothing)=0$. (1.3.1)

证明 因为 $\varnothing=\varnothing\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots$, 由可列可加性得

$$P(\varnothing)=P(\varnothing)+P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots,$$

又 $P(\varnothing)\geqslant 0$, 故 $P(\varnothing)=0$.

性质 2 若 A_1, A_2, $\cdots A_n$ 为两两互不相容的事件，则

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k)=\sum_{k=1}^{n} P(A_k). \tag{1.3.2}$$

我们称式(1.3.2)为概率的**有限可加性**.

证明 由于 A_1, A_2, $\cdots A_n$, $\varnothing$, $\cdots$两两互不相容，由可列可加性得

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k)=P(A_1 \cup \cdots \cup A_n \cup \varnothing \cup \cdots)$$
$$=P(A_1)+\cdots+P(A_n)+P(\varnothing)+\cdots$$
$$=P(A_1)+\cdots+P(A_n).$$

利用概率的有限可加性可以得到对立事件的概率公式.

性质 3 对于任一事件 A，有

$$P(\overline{A})=1-P(A). \tag{1.3.3}$$

证明 因 $A\cup\overline{A}=\Omega$，且 $A\overline{A}=\varnothing$，则由性质 2 有 $1=P(\Omega)=P(A)+P(\overline{A})$，于是得

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

性质 4 设 A，B 为两个事件，若 $A\subset B$，则

$$P(B-A)=P(B)-P(A). \tag{1.3.4}$$

证明 由图 1-6 可知

$$B=A\cup(B-A) \text{且} A(B-A)=\varnothing.$$

由式(1.3.2)得

$$P(B)=P(A)+P(B-A),$$

于是 $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

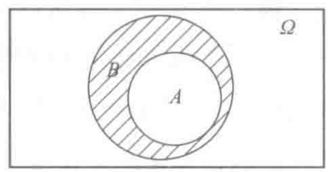

图 1-6 $B=A\cup(B-A)$

由概率的非负性立即得下述推论.

推论 1(单调性) 若 $A\subset B$，则 $P(A)\leqslant P(B)$.

性质 5 对任意两个事件 A，B，有

$$P(B-A)=P(B)-P(AB). \tag{1.3.5}$$

证明 由于 $B-A=B-AB$ 且 $AB\subset B$，所以由性质 4 得

$$P(B-A)=P(B-AB)=P(B)-P(AB).$$

性质 6 对任意的两个事件 A，B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{1.3.6}$$

证明 由于 $A\cup B=A\cup(B-AB)$且 $A(B-AB)=\varnothing$，$AB\subset B$.
由式(1.3.2)及式(1.3.4)得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

称式(1.3.6)为概率的**一般加法公式**.

推论 2 $P(A\cup B)\leqslant P(A)+P(B)$.

概率的一般加法公式可推广到更一般的情况. 设 A_1，A_2，…，A_n 是 n 个随机事件，用数学归纳法可以证明

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)$$
$$+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

特别的有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)$$