普通高等教育“十三五”规划教材

微积分

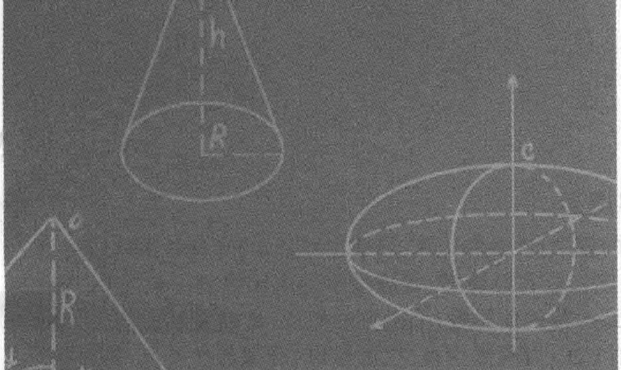
WEIJIFEN

主 编 史千里

CALCULUS

重庆大学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材



微积分

WEIJIFEN

主　编　史千里

参　编　袁　萍　黄孝祥　姬　秀

重庆大学出版社

内容提要

本教材主要内容包括：一元函数极限、导数、微分的概念、性质和计算；导数在经济学、管理学中的应用；不定积分、定积分及广义积分的概念、性质及其计算；定积分在经济学、管理学中的应用以及一般应用. 极坐标系基础、空间解析几何基础；多元函数的概念；二元函数的偏导数、全微分的概念、性质及其应用；二重积分的概念及其计算. 常数项级数的概念、敛散性判别方法；幂级数的概念，收敛域、和函数的计算，幂级数展开. 一阶、二阶常微分方程的求解及其应用.

本教材可供经济类、管理类本科专业使用，旨在帮助学生掌握微积分学的基础知识和基本理论，提高计算能力和分析解决经济学、管理学方面有关数学问题的能力.

图书在版编目(CIP)数据

微积分 / 史千里主编. --重庆 : 重庆大学出版社, 2017.6

ISBN 978-7-5689-0530-5

Ⅰ.①微… Ⅱ.①史… Ⅲ.①微积分—高等学校—教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 098090 号

普通高等教育“十三五”规划教材

微积分

主　编　史千里

参　编　袁　萍　黄孝祥　姬　秀

策划编辑：杨　漫

责任编辑：文　鹏　　版式设计：杨　漫

责任校对：刘志刚　　责任印制：张　策

*

重庆大学出版社出版发行

出版人：易树平

社址：重庆市沙坪坝区大学城西路 21 号

邮编：401331

电话：(023) 88617190　88617185(中小学)

传真：(023) 88617186　88617166

网址：http://www.cqup.com.cn

邮箱：fxk@cqup.com.cn (营销中心)

全国新华书店经销

重庆市正前方彩色印刷有限公司印刷

*

开本：787mm×1092mm　1/16　印张：18　字数：408 千

2017 年 6 月第 1 版　　2017 年 6 月第 1 次印刷

印数：1—2 000

ISBN 978-7-5689-0530-5　定价：45.00 元

前　言

一、什么是微积分学

事物是有限与无限的辩证统一. 微积分学通过研究有限与无限的关系,达到研究变量之间关系的目的.

微积分学是现代数学的主要基础之一,也是实际应用非常广泛的数学学科之一.

研究对象:(实)函数;

基础方法(基本算法):极限;

主要方法(主要算法):求导,积分.

二、本教材的主要特点

1.内容划分清晰,衔接细腻.

2.讲解角度多样,层次分明.

3.语言独具特色,娓娓道来.

4.引入新概念、新算法,采取从具体到一般的方式,以明确问题为起点,到猜想、试验、失败,再实验、成功,更适合探索、认识、发现的规律.

5.适时总结算法及其特点. 例如极限算法,第 2 章列出 6 种, 之后又列举了 2 种.

6.讲练结合,练习分层次.

- "练习"是面向所有学生的,可在课堂上及时演练;
- "思考"适合中上水平的学生;
- "问题"则适合水平较高的那一部分学生.

7.例题分析, 重点在于剖析思考方法:"怎样想到这个方法的?"

8.例题解答, 格式规范,可作为练习和作业的参照模板.

9.部分定理没给出证明,建议从具体实例、几何意义等角度加以理解.

三、对学习的几点建议

"数学有用,数学难学!"几乎是大家的共识.

这里,结合作者教学经验,提出以下建议,仅供参考.

(一)解决好思想上的问题

1.体会"数学是思想,是方法,是工具",非常重要.

2.树立信心.过去没学好数学,要坚信自己不是脑筋差、智商低,而是因为没有下功夫,或者学习方法不对.现在,要学好数学,就得下功夫、找方法.

例如,当遇到不明白的东西、不会做的题目时,是长时间反复思考,还是放过去了事;是及时放下身段问别人,还是不好意思;等等.这些看上去微不足道的差别,会导致学习效果的

天壤之别!

(二)保证基本环节:读书、听讲

1.课本就是翻来翻去、写来写去的.

一学期下来,课本依然崭新崭新的,如果成绩能好,那就很奇怪了!

2.听老师讲课,至关重要.

缺的、漏的尽量补上,不明白的做上记号(或思考,或问人).

读书、听课时,多问自己两个问题:

①他怎么就想到这个方法了?

②这个定理有什么应用?

(三)保证基本做法:多问、多记、多练

1.多问.跟老师、同学讨论(甚至争论)是学好数学的重要途径. 那些能跟老师、同学争论的同学,往往是学得很好的人.

经常问问自己:这个星期,我问过几个问题?跟别人讨论过几次?

2.多记.先明白道理再去做,当然很好. 但很多时候,往往是先去做(模仿着做),然后再慢慢体会其中的道理;或者只要熟悉方法,不究其深刻道理.

例如,等到一个人真正懂得了走路的重要性、明白了走路的科学方法后,再去学走路,那他几乎不可能学会走路啦.再如,967.55÷37=?用长除计算,小学毕业生都很熟练. 但是,长除式的道理是什么?明白的人不多(就算在大学里也是如此).

3.多练.上数学课,建议带个本子,感觉什么重要就记一笔,老师的某句话有意义就记下来,有什么不太明白就演算一下.本子不求写得整齐、漂亮(否则,太花时间).一学期下来,本子写得越多越乱,学习效果会越好..

老师讲的例题,课后一定再理一遍.

课后的练习,做得越多越好.经常问自己:这一章的练习题总共多少道?我还剩多少没做?微积分这门课上,不定积分十分典型,没有大量的练习肯定不行.

没做几个题目,数学成绩很好,那太神奇啦!

(四)每学习一个概念,要追问四个问题

它是什么?有什么性质?是什么算法?有什么用途?

这种学习方法称为“四问式学习法”.

例如,极限——什么是极限?极限的基本性质有哪些?算法有哪些?可以干什么?

(五)每学习一个算法,要经历三个基本模式

1.探究模式,获得一个新方法;

2.程序模式,熟悉这个方法的基本步骤.

3.模型模式,掌握适用于这个方法的那些问题的模型特征.

这种学习方法称为“三式学习法”.

例如,求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{a+x^2}}\mathrm{d}x$,$(a>0)$.

探究式:算法关键是解决“$1+A^2=B^2$”是否成立的问题,算法来源于 $1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$(或 1+

$\cot^2\theta=\csc^2\theta$). 于是有了新算法——正切代换.

程序式:正切代换的步骤是令 $x=\sqrt{a}\tan\theta$,则 $dx=\sqrt{a}\sec^2\theta d\theta$,……

模型式:正切代换适合 $\int f(x,\sqrt{a^2+x^2})dx$ 模型的问题,不适合 $\int g(x,\sqrt{a^2-x^2})dx$, $\int h(x,\sqrt{x^2-a})dx$. 也不适合 $\int k(x,\sqrt{a-x})dx$.

(六)多方式表达

1.形和数.

例如:凹函数.

数的表达似乎很深奥:"任取 $x_1,x_2\in(a,b)$,若总有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是凹的."

如果用图形表示,那就很直观了,一看就明白.

2.换个说法.

例如:不定积分.

原定义:$f(x)$ 的所有原函数,称为 $f(x)$ 的不定积分,记作 $\int f(x)dx$.

换个说法:$\int f(x)dx$ 是 $f(x)$ 所有原函数所组成的集合(函数族).

$\int f(x)dx$ 等于它的任一个原函数加上一个任意常数.

$\int f(x)dx$ 是求导的逆运算.

你的说法越多,认识就越全面、越深刻,越是自己的.

(七)培养美感

美,是数学四大特点之一(其他三个是:高度抽象性、严密性、应用广泛性).这里主要指数学美中的"语言形式美".

培养数学的美感,可以从讲究书写格式开始.

例如:设 $y=f(x)=\dfrac{\lg(7-2x)}{3-\sqrt{7+x}}$,求定义域 D.

分析:要使 y 有意义,x 必须满足下列条件.

(1)对数的底>0,$7-2x>0$;

(2)开平方的底≥0,$7+x\geqslant 0$;

(3)分母≠0,$3-\sqrt{7+x}\neq 0$.

解:令 $\begin{cases}7-2x>0\\7+x\geqslant 0\\3-\sqrt{7+x}\neq 0\end{cases}$

解不等式得 $\begin{cases}x<3.5\\x\geqslant -7\\x\neq 2\end{cases}$, 即 $D=[-7,2)\cup(2,3.5)$.

“分析”与“解”的不同：

①目的不同.前者是寻找解法和结果，后者是表达解法和结果.

②思路不同.前者一般是分析法，而后者一般是综合法.

③格式不同.前者可以随意分块，较为凌乱，而后者具有紧凑、清晰的逻辑路线.

前者可以千人千面，而后者却要求统一规范.

要树立一个观点：解一个题目，就是写一篇作文，开头、过程、结尾必须完整.

再如，求证：$e^x>1+x, x\neq 0$.

分析：①这是不等式问题，但微积分是研究函数问题的；②先构造适当的函数；③应用适当的模型.

证明：令 $f(x)=e^x-x-1$，则 $f'(x)=e^x-1, x\in(-\infty,+\infty)$.

因为 $f'(x)\leqslant 0, x\in(-\infty,0]$

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 内单减

所以 $f(x)>f(0)=0, x\in(-\infty,0)$

即 $e^x-x-1>0, x\in(-\infty,0)$

所以 $e^x>1+x, x\in(-\infty,0)$.

同样可证 $e^x>1+x, x\in(0,+\infty)$.

所以，$e^x>1+x, x\neq 0$.

若改成下面格式，则不易看明白了.

证明：令 $f(x)=e^x-x-1$，则 $f'(x)=e^x-1, x\in(-\infty,+\infty)$. 因为 $f'(x)\leqslant 0, x\in(-\infty,0]$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 内单减，$f(x)>f(0)=0, x\in(-\infty,0)$，即 $e^x-x-1>0, x\in(-\infty,0)$. 所以 $e^x>1+x, x\in(-\infty,0)$. 同样可证 $e^x>1+x, x\in(0,+\infty)$. 所以，$e^x>1+x, x\neq 0$.

数学的美，不光是美观，它还可为发现提供契机.

（八）重要的东西，自己给它取个名字

这是一个很有效的学习方法.

例如：$f(x)=x^x$，它像指数函数，又不是；它像幂函数，也不是. 就叫它“幂指函数”吧.

e 和 1 读音相同，听者混淆. 不妨把 e 读作“圈 yī”，而把 1 读作“竖 yī”. 将来还有一个 E，读作“大 yī”.

近似公式：$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+dy\mid_{x=x_0}$，可以口头表述为：末点函数值近似于起点函数值与起点微分之和.

事实上，重要的东西要取名字，名字越多越重要，取名字要有学问！（以“导数”为例，在不同学科里就有不同的名字.）

以上建议适合学习数学的普遍情形.下面是针对微积分学的学习方法的两点建议.

（九）学习微积分，要时刻思考“有限”与“无限”的关系

微积分学的概念脉络是：极限→连续→可导→积分→$\begin{cases}\text{级数}\\\text{微分方程.}\\\text{差分方程}\end{cases}$

微积分学的一切矛盾（尤其是有限与无限），都包含在“极限”概念之中.如果把微积分学

看作一个生命体(如一只羊),那么,“极限”概念就好似这只羊的基因!

理解“极限”概念,是一个漫长的过程.

(十)学习微积分,要树立“函数是工具”的思想

微积分学研究对象:函数. 但是,遇到的问题往往是各式各样的,“似乎跟函数无关”!能否将其他问题“转化成函数问题”是学习者数学能力高低的表现.

例如,求证:$\frac{h}{1+h}<\ln(1+h)<h,(h>0)$.(6.1 例 2)

这是“不等式问题”,不是“函数问题”.关键在于“怎样将不等式问题转化成为函数问题”.先构造函数. 令 $f(x)=\ln(1+x),x\in[0,h]$,就将“不等式问题”转化成“函数问题”了!

许多时候,构造(或者说找到)适当的函数,是一件很艰难的事,当然,也是一件十分巧妙、十分美妙的事! 如证明拉格朗日定理时所构造的函数 $F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$,$x\in[a,b]$.

以上是作者提的一些关于学习方法的建议,希望对学习有帮助.

本书的编写,有许多创新尝试. 鉴于作者水平,本书有疏漏、不妥,甚至错误之处,恳切地请大家指正!

史千里

2017 年 3 月

目　录

第 1 章　集合与函数

1.1　集　合

集合是数学的基础概念,认识和运用集合概念具有非常重要的意义.

1.1.1　集合:同一性质事物的全体

集合是数学的"初始概念",不加定义,仅作描述.

第一,整体性:集合是一个"整体"(相对于"元素").第二,确定性:集合内的元素都具有指定的性质;凡具有指定性质的事物,都被"包含"在这个集合内.

例 1　"全体中国公民"是集合,是由"具有中华人民共和国国籍的人"组成的一个整体.

例 2　"我是人类"中的"人类"是集合(即"我是人类的一成员""我属于人类").

例 3　"所有好看的鲜花"不是集合.

集合概念的意义:数学概念浩如烟海,几乎都(直接或间接地)建立在集合的基础上.

思考 1　"所有美洲国家"构成一个集合.指出其"共同性质",试枚举该集合的元素.

问题 1　下面结论错在哪里?"因为不能将所有的在校大学生集中在一个场地上,所以,'所有在校大学生'不构成集合."

1.1.2　集合的常用表示方法

口语表述:如"在 9 和 49 之间的整平方数".

枚举:如$\{16,25,36\}$.

代表+性质:如$\{a \mid \sqrt{a} \in \mathbf{Z}, 9<a<49\}$.

1.1.3　数集

数集的一些特殊表示方法:

不等式:如 $x \geqslant 5, x>5, x \leqslant -3, x<-3, 5>x \geqslant 1$.

区间:如(a,b),$[a,b]$,$[a,+\infty)$,$(-\infty,b]$.

数轴表示:

图 1.1　区间 (a,b)

图 1.2　区间 $[a,b]$

邻域：x_0 半径为 $\varepsilon(>0)$ 的邻域就是区间 $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$，记作 $\delta(x_0,\varepsilon)$. 即

$$\delta(x_0,\varepsilon)=(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)=\{x \mid |x-x_0|<\varepsilon\}$$

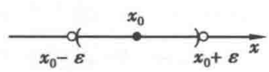


图 1.3　邻域 $\delta(x_0,\varepsilon)$

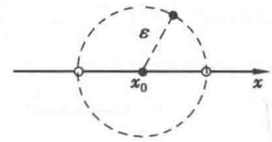


图 1.4　邻域 $\delta(x_0,\varepsilon)$

练习 1　(1) 作图 $\delta(-2,\ 0.6)$；

(2) 把 $\delta(-2,\ 0.5)$ 用区间表示；

(3) 把开区间 $(3,4)$ 表示成邻域.

思考 2　在 3 的所有邻域中，存在半径最小的邻域吗？

去心邻域：x_0 半径为 ε 的去心邻域是 $(x_0-\varepsilon,x_0)\cup(x_0,x_0+\varepsilon)$，记作 $\delta^o(x_0,\varepsilon)$. 即

$$\delta^o(x_0,\varepsilon)=(x_0-\varepsilon,x_0)\cup(x_0,x_0+\varepsilon)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\varepsilon\}$$

常用数集及符号：

$\mathbf{Z}$ = 整数（全体整数）；

$\mathbf{Z}^+$ = 正整数（全体正整数）；

$\mathbf{Z}^-$ = 负整数（全体负整数）；

$\mathbf{N}$ = 自然数 $=\{0\}\cup\mathbf{Z}^+$；

$\mathbf{Q}$ = 有理数（全体有理数）$=\left\{\dfrac{a}{b} \mid a\in\mathbf{Z},b\in\mathbf{Z}^+\right\}$；

$\mathbf{R}$ = 实数（全体实数）$=(-\infty,+\infty)$；

$\mathbf{R}^+$ = 正实数（全体正实数）$=(0,+\infty)$；

$\mathbf{R}^-$ = 负实数（全体负实数）$=(-\infty,0)$.

问题 2　设 A = {张兰，李丽，王晓，孙洁，赵萍}，A 不是数集，怎么转换成数集？

1.1.4　集合的运算

定义 1.1　设 A,B 是集合.

A 与 B 的**并**：$A\cup B=\{x \mid x\in A$ 或者 $x\in B\}$；

A 与 B 的**交**：$A\cap B=\{x \mid x\in A,x\in B\}$；

B 与 A 的**差**：$B-A=\{x \mid x\in B,x\notin A\}$.

例 4　设 $A=\{x \mid (x-1)(x+2)(x+3)=0\}$，$B=\{t \mid t^2=9\}$. 求：$A\cup B$，$A\cap B$，$B-A$，$A-B$.

解：因为　$A=\{-2,-3,1\}$，$B=\{-3,3\}$

所以　$A\cup B=\{-2,-3,1,3\}$

$A\cap B=\{-3\}$

$B-A=\{3\}$

$A-B=\{-2,1\}$

练习 2　设 $I_1=[-1,5]$, $I_2=(-1,2)$, $I_3=[2,4]$.求:$I_2\cup I_3$, I_1-I_2, I_1-I_3.

1.2　函　数

函数是数学的最重要工具之一,是微积分学研究的对象.

1.2.1　函数的定义

定义 1.2　设 A,B 是两个非空数集,f 是 $A\to B$ 的对应法则,且(A 内)每个数 x 在 f 下都对应着唯一的数 y(在 B 内),则称 f 是 $A\to B$ 的**函数**,A 称为 f 的定义域.记作

$$y=f(x),\ x\in A$$

例 1　设 $A=\{-5,-1,0\}$, $B=\{0,4,5,7\}$.

$f_1:-5\to4,-1\to7,0\to0$. f_1 是 $A\to B$ 的函数.

$f_2:-5\to7,-1\to7,0\to4$. f_2 是 $A\to B$ 的函数.

$f_3:-5\to7,0\to4$. f_3 不是 $A\to B$ 的函数.

$f_4:-5\to7,-1\to4,-1\to5,0\to0$. f_4 不是 $A\to B$ 的函数.

为了书写简明,引用如下符号:

$$f_1(-5)=4,\quad f_1(-1)=7,\quad f_2(-1)=7$$

练习 1　在例 1 中,(1)$f_1(-1)=f_2(-5)$对吗?(2)$f_1(-1)>f_2(0)$对吗?

$y=f(x)$,y 随着 x 变化而变化,所以,x 称为**自变量**,y 称为**因变量**.

函数 f 好像照相机.

在例 1 中,$f_1:-5\to4$.-5 是原像,照相机 f_1 拍的照片(像)是 4;

$f_2:-5\to7$.-5 是原像,照相机 f_2 拍的照片(像)却是 7.

所以,在 $f_1(-5)=4$ 中,4 称为-5 的函数值,又称为-5 的像;-5 称为 4 的原像.

例 2　某网上商城某 T 恤商铺(免运费):1 件 210 元;2 件,每件 190 元;3~5 件,每件 175 元;6~9 件,每件 160 元;10 件及以上,每件 145 元.写出网购顾客购买件数 x 与总价 y 的函数关系.

解:设 $y=f(x)$,$x\in D$,则

$$y=f(x)=\begin{cases}210x & x=1\\ 190x & x=2\\ 175x & 3\leqslant x<6\\ 160x & 6\leqslant x<10\\ 145x & 10\leqslant x\end{cases},D=\mathbf{Z}^+$$

这是一个**分段函数**,具体而言,是一个 5 段函数.

思考 1 (1)函数是一一对应吗?

(2)使用"原像"和"像"的概念定义"函数".

问题 1 设 $A=\{13,19\}$, $B=\{-7,11,23\}$.你可以建立几个 $A\to B$ 的函数?

1.2.2 定义域

函数的**定义域**:自变量使函数有意义的所有取值,记作 D.

函数的**值域**:因变量的所有取值,记作 I.

定义域一般要保证以下 5 个方面的要求:

(1)分母不等于 0;

(2)开偶次方,底数不为负值;

(3)对数函数,真数为正值;

(4)正弦(余弦)值不得大于 1;

(5)具有实际意义的函数,要保证具体的范围.

算法——求定义域:

第 1 步,建立不等式(组);

第 2 步,解不等式(组);

第 3 步,把解写成规范形式.

例 3 设 $y=f(x)=\dfrac{\lg(7-2x)}{3-\sqrt{7+x}}$,求定义域 D.

分析:要使 y 有意义,x 必须满足:

(1)对数的底>0,用不等式表示:$7-2x>0$;

(2)开平方的底≥0,用不等式表示:$7+x\geqslant 0$;

(3)分母≠0,用不等式表示:$3-\sqrt{7+x}\neq 0$.

解:令$\begin{cases}7-2x>0\\7+x\geqslant 0\\3-\sqrt{7+x}\neq 0\end{cases}$

解不等式得$\begin{cases}x<3.5\\x\geqslant -7\\x\neq 2\end{cases}$,即 $D=[-7,2)\cup(2,3.5)$.

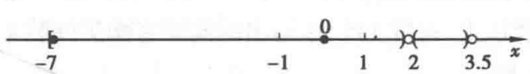


图 1.5 定义域 $D=[-7,2)\cup(2,3.5)$

练习 2 设 $y=h(x)=\sqrt[3]{1-x}+\dfrac{\lg x^2}{1-\sqrt{3-x}}$,求定义域 D,并表示在数轴上.

图 1.6 定义域 $D=(-\infty,0)\cup(0,2)\cup(2,3]$

思考2 函数定义域 D 是一个集合,它的元素有什么特性?

1.2.3 函数的常用表示方法

1)口语叙述

例4 (1)y 为 1,当 x 为正数时;y 为 -1,当 x 为负数时;y 为 0,当 x 为 0 时.称为符号函数,记作 $y=\text{sign } x$.

(2)y 为不大于 x 的最大整数,取整函数,记作 $y=[x]$.

(3)y 为 1,当 x 为有理数时;y 为 0,当 x 为无理数时.

在例4(3)中的函数不是分段函数.

思考3 口语表述的优点、缺点各有哪些?

2)表格法

例5 某直辖市(2013—2014)一手房价格 y 随时间变化表:

月份 x	1 302	1 304	1 306	1 308	1 310	1 312	1 401
单价 $y/(元\cdot m^{-2})$	14 250	14 842	15 048	15 339	16 363	16 813	17 183

(数据来源:http://newhouse.tj.soufun.com/fangjia/)

思考4 表格法的优点、缺点各有哪些?

问题2 怎样获得 $y=f(x)$ 的表格?

3)图像法

例6 某快递公司从上海至湖北荆州的标准快递价格(部分),即邮费 y(元)与物品质量大小 x(kg)之间的函数关系如图 1.7 所示.

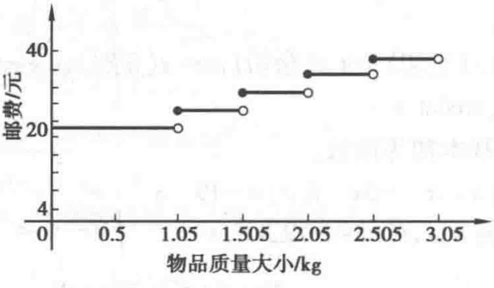


图 1.7 邮费与物品质量大小关系的函数图像

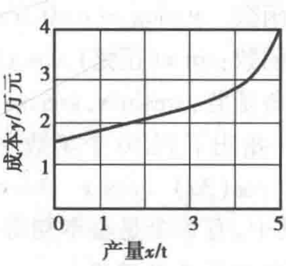


图 1.8 总成本 y 与产量 x 的函数图像

例7 某花生油加工厂,每天最多生产 5(t)花生油,产量与总成本关系如图 1.8 所示.看图知:(1)固定成本约为 1.5(万元);(2)y 是增函数,且产量接近 5(t)时增速较快.

练习3 在图 1.8 中,当 $x=4$ 时,用直尺测量:$y=$?(即求 $f(4)$)

思考5 (1)图像法的优点、缺点各有哪些?

(2)怎样获得 $y=f(x)$ 的图像?

问题3 (1)圆心在(0,3)、直径为 2 的圆,可以是一个函数的图像吗?

(2)抛物线总是某个函数的图像吗?