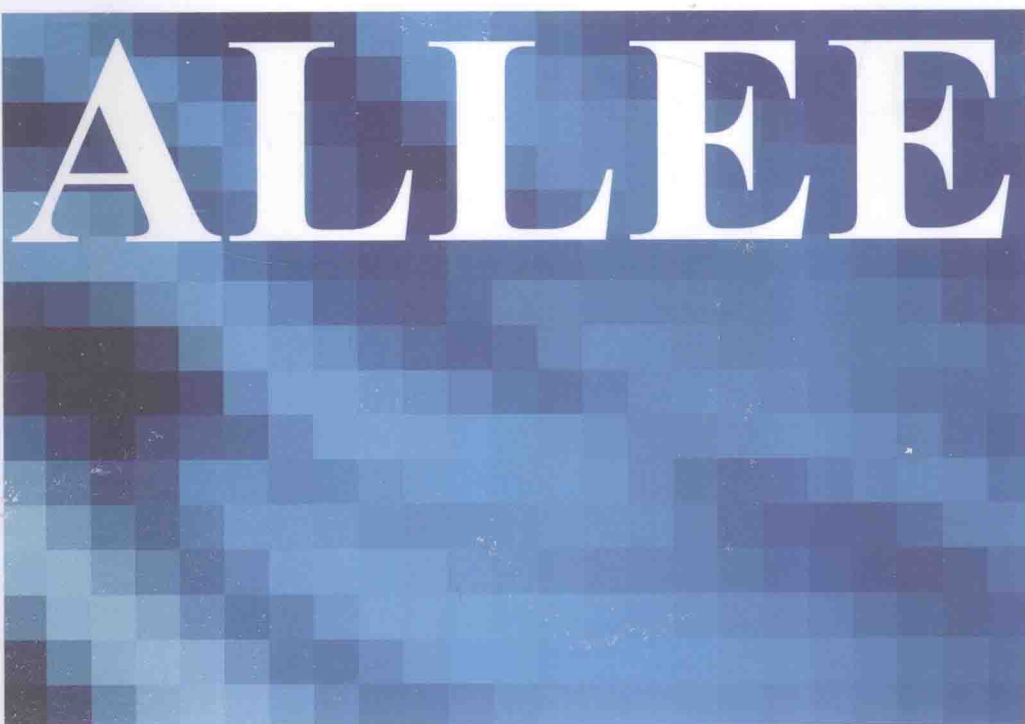


Dynamical Analysis of
Predator Prey Systems with Allee Effect

具有Allee效应

捕食-食饵系统的动力学分析



王金凤 宋颖伟 范洪霞 著

中国科学技术大学出版社

具有Allee效应

捕食-食饵系统的动力学分析



常州大学图书馆
藏书章

王金凤 宋颖伟 范洪霞 著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书简要介绍了具有强 Allee 效应增长的捕食-食饵模型(包括常微分方程,反应扩散微分方程,时滞微分方程)和基本的数学分析方法,侧重介绍了分歧方法的应用,使用分歧的观点来分析生物数学模型的方法。

本书强调定性分析方法,并配有相关示意图以加深读者印象,帮助读者学习。本书文字精炼,但是涵盖内容广泛,适合学习过基本常微分方程、数学物理方程的高年级本科生和低年级研究生学习生物数学和反应扩散方程,也可以作为学习生物数学和反应扩散方程的基础教材。

图书在版编目(CIP)数据

具有 Allee 效应捕食-食饵系统的动力学分析/王金凤,宋颖伟,范洪霞著.
—合肥:中国科学技术大学出版社,2016.8
ISBN 978-7-312-04057-3

I. 具… II. ①王… ②宋… ③范… III. 动力学分析 IV. O655.9

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 207418 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号,230026
<http://press.ustc.edu.cn>
印刷 安徽省瑞隆印务有限公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 710 mm×1000 mm 1/16
印张 8.25
字数 126 千
版次 2016 年 8 月第 1 版
印次 2016 年 8 月第 1 次印刷
定价 25.00 元

前 言

医学、物理学、化学、生物学、工程方面的很多过程都可以用某些常(偏)微分方程或方程组作为数学模型加以刻画。例如,种群动力学模型可以用微分方程来刻画,因为任何种群都不是孤立存在的,而是与其他种群有密切关系的。这些种群之间的相互作用主要表现为三种不同的类型,对应三种不同类型的系统:竞争系统,互惠系统和捕食-食饵系统。其中,捕食-食饵系统的研究是微分方程的重要应用领域之一。竞争系统和互惠系统生成的是单调系统,文献 [22], [23] 对其建立了完善的数学理论。由于在自然界中广泛的存在性及重要性,捕食-食饵系统一直是生态学与生物数学界研究的重要内容,是描述生态学和社会学模型的重要分支之一,也是复杂食物链、食物网络和生物化学网结构的联系基础。

由于种群会从高密度的地方迁徙到低密度的地方,因而在常微分捕食-食饵系统中加入扩散项将会更加合理,进而得到反应扩散系统(从形式上看即为偏微分方程系统)。

在生物数学上,反应扩散方程组可以描述更为丰富的时空动力学现象,能够很好地解释种群入侵的波动行为及种群的持久性;有助于理解在有界区域 Ω 上的长时间行为,特别是稳态解及空间的模式等。因此,用反应扩散方程来描述空间均匀态(系统中的参数为正常数)或非均匀态(系统中的某些参数依赖于空间变元)中种群之间的相互作用,并研究由反应扩散方程引起的模式生成(pattern formation),能够部分地解释种群在空间中的持续和灭绝进化等问题。故而上述捕食-食饵常(偏)微分方程组解的性质研究具有重要的现实意义。此外,捕食-食饵微分方程组在数值上展示的丰富动力学现象,包括混沌的

出现,也是具有挑战性的数学问题,这些方程(组)的研究也将继续推动微分方程理论的发展。

相互作用物种间的模式生成和分布在保护生态方面和生化反应方面有重要的意义,一种典型的作用就是捕食-食饵关系,或者更一般地说为消耗者-资源关系。当食饵的增长为 Logistic 型增长时,大量的文献及相关的著作均有详细的数学分析结果。

不同于 Logistic 型增长的捕食-食饵系统,强 Allee 效应增长使系统具有双稳定性结构,因此很多常用的研究方法用起来存在困难或者不再适用。对于具有强 Allee 效应增长的捕食-食饵系统的研究,目前只限于数值模拟上的结果,严格的数学结果还很少。本书首次对具有强 Allee 效应增长的捕食-食饵系统进行详细的数学刻画,分别研究了对应的常微分方程组、反应扩散方程组及泛函微分方程组的动力学性质及模式生成,特别刻画了 Allee 效应带来的双稳定结构特征,这些数学理论的分析结果有力地支持了目前已有的数值结果。

利用一些改进的方法及一定的构造性技巧,本书的主要工作和成果集中在如下几方面:

1. 对常微分系统详细的全局双稳定动力学分析,以正平衡点的第一个分量为参数,得到了两个全局分歧值:异宿轨道环分歧值和 Hopf 分歧值。在参数不同的取值范围内分别得到了相应的全局稳定的零平衡点、唯一的异宿轨道环、全局双稳定的零平衡点和周期轨道、全局双稳定的零平衡点和正平衡点及全局双稳定的零平衡点和半平衡点。在证明周期解的不存在性时给出了改进的 Dulac 函数的判断方法,这个结果在具体应用时更为适用。

2. 通过构造上、下解,能量估计等方法研究了具有强 Allee 效应的反应扩散方程组的基本动力学行为,得到了整体解的存在性及渐进性,给出了解的先验估计,并得到了系统的双稳定性及空间齐次和非齐次的周期解。特别地,当捕食者的初始值 v_0 足够大时,解最终趋于 $(0,0)$,这表明 $(0,0)$ 总是局部稳定的,即给定食饵的初始值, $(0,0)$ 的吸引域包含所有充分大的 v_0 。因此若存在其他的局部稳定的稳态解或者周期解,则系统是双稳定(或者多重稳定)的;当食饵的初始值小于强 Allee 效应的门槛时, $(0,0)$ 也是全局渐进稳定的,这是

具有强 Allee 效应的捕食-食饵系统的特征。这些结果表明强 Allee 效应从本质上增加了反应扩散方程组时空动力学行为的复杂性。

3. 对具有强 Allee 效应的椭圆方程组进行了详细的分析。利用椭圆方程的正则性估计得到了非常数正稳态解的先验估计及不存在性; 分析了平凡稳态解的稳定性和半平凡稳态解的分歧情况。

4. 分别考虑带两个离散滞量的泛函和偏泛函微分方程组的稳定性和分歧分析。讨论了滞量对强 Allee 效应捕食-食饵系统的不稳定性影响, 及在此基础上扩散项对系统稳定性的影响。由于 Laplace 算子的出现, 线性化方程对应的特征方程变为可列个超越方程, 而每个超越方程都产生可列个 Hopf 分歧临界值 τ , 一般情况下很难判断这些临界值的大小顺序。本书给出了在扩散系数满足一定条件时对应于 Laplace 算子有限个特征值的临界值 τ 的顺序, 并且分析了空间齐次和非齐次的 Hopf 分歧周期解的性质。

本书中严格的分析可以应用到很多具体的强 Allee 效应的捕食-食饵模型, 其解析结果几乎是最新、最完整的, 且不依赖于非线性函数具体的代数形式, 并对其他二维微分方程组的动力学行为分析提供了系统的方法和途径。

本书吸取了国内外同行的科研成果和他们著作中的部分内容, 在此向他们表示敬意和感谢。由于作者的水平、经验有限, 本书可能存在不足乃至错误, 恳请读者批评、指正。

作 者

2016 年 4 月于美国

目 录

前言	(i)
第 1 章 绪论	(1)
1.1 背景及意义	(1)
1.2 研究现状	(4)
1.2.1 捕食-食饵系统	(4)
1.2.2 反应扩散方程组	(6)
1.2.3 时滞对捕食-食饵系统的影响	(8)
1.3 本书的主要工作	(8)
第 2 章 具有强 Allee 效应的常微分方程组动力学性质分析	(11)
2.1 背景介绍	(11)
2.2 相图分析	(12)
2.3 Hopf 分歧	(20)
2.4 极限环的唯一性	(27)
2.5 周期解的不存在性	(29)
2.6 例子及讨论	(38)
2.6.1 具有 Holling II 响应功能的三次函数模型	(38)
2.6.2 具有线性响应功能的三次函数模型	(41)
2.6.3 Boukal-Sabelis-Berec 模型	(43)
2.6.4 具有次临界 Hopf 分歧的 Allee 效应模型	(46)
2.6.5 具有一般形式的非线性项	(48)

2.7 本章小结.....	(52)
第 3 章 具有强 Allee 效应的反应扩散方程组动力学性质分析.....	(54)
3.1 引言.....	(54)
3.2 基本动力学性质及先验估计.....	(56)
3.3 平凡和半平凡的稳态解.....	(63)
3.3.1 常稳态解.....	(63)
3.3.2 非常数半平凡稳态解.....	(67)
3.4 先验估计和非常数正稳态解的不存在性.....	(71)
3.5 分歧分析与稳态解的存在性.....	(76)
3.5.1 分歧点的确定.....	(76)
3.5.2 稳态分歧.....	(81)
3.5.3 Hopf 分歧.....	(85)
3.6 本章小结.....	(89)
第 4 章 具有强 Allee 效应的泛函微分方程组分歧分析.....	(91)
4.1 引言.....	(91)
4.2 稳定性和分歧分析.....	(92)
4.2.1 时滞对平衡点稳定性的影响.....	(92)
4.2.2 Hopf 分歧的方向和稳定性.....	(95)
4.2.3 数值模拟.....	(99)
4.3 具时滞的反应扩散方程的分歧分析.....	(101)
4.3.1 正平衡点的稳定性和 Hopf 分歧的存在性.....	(101)
4.3.2 扩散对 Hopf 分歧的影响.....	(103)
4.3.3 在第一个临界值产生的 Hopf 分歧性质.....	(107)
4.4 本章小结.....	(111)
第 5 章 结论.....	(112)
参考文献.....	(114)

第 1 章 绪 论

1.1 背景及意义

医学、物理学、化学、生物学、工程方面的很多过程都可以用某些常(偏)微分方程或方程组作为数学模型加以刻画。例如,单种群动力学模型一般可以写为

$$\frac{du}{dt} = ug(u)$$

其中, $g(u)$ 表示种群的单位增长率。1798 年, Malthus 提出了最早的单种群动力学模型:

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = ru(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

其中, $u(t)$ 表示 t 的种群密度, r 表示种群内增长率。显然式(1.1)的解为 $u(t) = u_0 e^{rt}$, 此时种群呈现的是指数形式的增长。但是种群的生长一般总是要受到环境、食物等方面的影响, 不能无限制地增长下去, 1938 年, Verhust 考虑了单种群成员间的冲突, 提出了更符合实际的 Logistic 模型:

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = ru(t) \left(1 - \frac{u(t)}{N} \right) \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

其中, 常数 N 表示所考虑的地域对种群的最大承载量, $g(u) = r \left(1 - \frac{u}{N}\right)$ 是关于 u 的递减函数。因为式(1.2)的解为 $u(t) = \frac{Nu_0 e^{rt}}{N - u_0 + u_0 e^{rt}}$, 因此当初始数量 $u_0 < N$ 时, 种群数量单调递增且最终数量趋于 N ; 当初始数量 $u_0 > N$ 时, 种群数量单调递减且最终数量趋于 N 。

由此可以看出种群的初始数量决定了其动力学性质。对于很多种群来说, 数量很小是不利于种群的生存的, 如寻找配偶比较困难, 还会出现近亲繁殖, 这种现象称为 Allee 效应。这种现象最早提出于 1938 年, 美国著名生态学家 Warder Clyde Allee 在文献 [11] 中提出这样一个问题: 自然界中一个种群能维持生存的最小数量是多少? Allee 讨论了拥挤现象对人口统计学和生活秉性的显著影响, 发现小密度种群的增长率不总是正的, 也不可能像 Logistic 模型那样一直递减。从数学上说, 单位增长率 $g(u)$ 并不是在 $u = 0$ 时达到最大值。若 u 较小时, $g(u)$ 为负的, 那么称这样的增长具有强 Allee 效应, 其典型的形式为

$$\frac{du}{dt} = ru \left(1 - \frac{u}{N}\right) (u - M) = ug(u) \quad (1.3)$$

其中, $0 < M < N$ 是种群生存的最小量, 称为“门槛”值 (threshold)^[9,12-14]; 如果单位增长率 $g(u)$ 在 $u = 0$ 时仍然很小但为正值, 那么称其为弱 Allee 效应, 其典型的形式为

$$\frac{du}{dt} = ru \left(1 - \frac{u}{N}\right) (u - M) = ug(u) \quad (1.4)$$

其中, $M < 0 < N$, 此时没有“门槛”值。例如, 对于半干旱的系统, 其中植物是通过减少系统的水分流失而维持生长的。当水分的流失导致轻微的土壤退化时, 植物的生长可视为弱 Allee 效应; 当水分的流失导致严重的土壤退化, 植物的生长可视为强 Allee 效应。

强 Allee 效应和弱 Allee 效应的动力学性质从根本上是不同的, 弱 Allee 效应与 Logistic 增长从定性分析的角度是一致的, 即当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 所有的正解都趋于 $u = N$ 。但是对于强 Allee 效应的情况, 有不稳定的平衡解 $u = M$ 和两个稳定的平衡解 $u = 0, N$ 。当 $0 < u(0) < M$ 时, $u(t) \rightarrow 0$; 当 $M < u(0) < N$

时, $u(t) \rightarrow N$ 。从而种群数量只有在超过“门槛”值 M 时才能增长, 低于这个“门槛”值种群就会灭绝, 这与弱 Allee 效应是完全不一样的。

Allee 效应的产生源于很多方面的不利因素^[12,13]。例如, 配偶、生殖能力、过度掠夺、环境条件、同系繁殖等。由于在种群动力学方面强大的潜在影响, Allee 效应已经得到了广泛关注^[2,9,12,14-16]。而且 Allee 效应会引起低密度种群的灭绝^[6,13], 因此, Allee 效应的种群生态研究在保护生物方面有着重要的作用^[12,17,18]。更多 Allee 效应的讨论可参见文献^[12,15,19-21]。

任何种群都不是孤立存在的, 而是与其他种群有密切关系的, 这些种群之间的相互作用主要表现为三种不同的类型, 对应三种不同类型的系统: 竞争系统、互惠系统和捕食-食饵系统。竞争系统和互惠系统生成的是单调系统, 文献^[22], ^[23] 对其建立了完善的数学理论。由于在自然界中广泛的存在性及重要性, 捕食-食饵系统一直属于生态学与生物数学界研究的重要内容, 是描述生态学和社会学模型的重要分支之一, 也是复杂食物链、食物网络和生物化学网结构的联系基础。

由于种群会从高密度的地方迁徙到低密度的地方, 因而在常微分捕食-食饵系统中加入扩散项会变得更加合理, 进而得到反应扩散系统 (从形式上看即为偏微分方程系统)。通过反应扩散方程描述空间个体迁移的最早工作于 1937 年由 Fisher^[24] 和 Kolmogoroff^[25] 展开, 他们研究了具有两套染色体个体基因的传播。而后, Skellam^[26] 和 Kierstead^[27] 运用反应扩散方程考虑含空间因素的种群模型的持久性; Turing^[28] 用反应扩散方程讨论了某些生物体表面的图纹是怎样形成的, 即模式的生成问题。一般来说, 对应于常微分方程

$$\begin{cases} u_t = f_1(u, v) \\ v_t = f_2(u, v) \end{cases}$$

的反应扩散系统为

$$\begin{cases} u_t = d_1 \Delta u + f_1(u, v) & (x \in \Omega) \\ v_t = d_2 \Delta v + f_2(u, v) & (x \in \Omega) \end{cases} \quad (1.5)$$

其中, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, d_1, d_2 为对应种群的扩散系

数。从生物角度来看, 齐次 Neumann 边界条件表示系统是封闭的, 边界上种群的进出流量为零; 齐次 Dirichlet 边界条件表明种群不能在边界上生存; 齐次 Robin 边界条件一般表示为种群在边界上有逃离的情况。

在生物数学上, 反应扩散方程组(1.5)可以描述更为丰富的时空动力学现象, 能够很好地解释种群入侵的波动行为及种群的持久性; 有助于理解在有界区域 Ω 上的长时间行为, 特别是稳态解及空间的模式等。

因此, 用反应扩散方程来描述空间均匀态 (系统中的参数为正常数) 或非均匀态 (系统中的某些参数依赖于空间变元) 中种群之间的相互作用并研究由反应扩散方程引起的模式生成 (pattern formation) 能够部分地解释种群在空间中的持续和灭绝进化等问题。

因此对上述捕食-食饵常 (偏) 微分方程组解的性质研究具有重要的现实意义。此外, 捕食-食饵微分方程组在数值上展示的丰富动力学现象, 包括混沌的出现, 也是具有挑战性的数学问题, 这些方程 (组) 的研究也将继续推动微分方程理论的发展。

1.2 研究现状

1.2.1 捕食-食饵系统

1921 年美国生态学家 Alfred Lotka^[29] 和 1923 年意大利数学家 Vito Volterra^[30] 运用动力学方法先后独立地建立了描述分子化学反应系统和海洋渔业生态系统的第一个捕食者-食饵模型, 即如下的微分方程 (称为 Lotka-Volterra 方程):

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = a_1 u - b_1 u^2 - c_1 uv \\ \frac{dv}{dt} = a_2 v - b_2 v^2 + c_2 uv \end{cases} \quad (1.6)$$

其中, $a_1, b_1, c_1, c_2 > 0, b_2 \geq 0, a_2 \in \mathbb{R}$ 。

此后, 人们发现许多现象都符合动力学规律, 且从 Lotka-Volterra 方程派生出许多其他数学模型以适应各种不同类型的种群生态学问题。

通常食饵满足 Logistic 型增长率, 而捕食者满足线性死亡率:

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = xq(x) - c_1\phi(x)y \\ \frac{dy}{ds} = -d_2y + c_2\phi(x)y \end{cases} \quad (1.7)$$

其中, 食饵 x 的增长率满足函数 $q(x)$; d_2 表示捕食者 y 的死亡率; c_1 和 c_2 分别表示捕食者和食饵的作用率; 函数 $\phi(x)$ 是捕食者对食饵数量的功能响应, 即将单位时间内每个捕食者所吃掉食饵的数量作为食饵的函数。通常 $\phi(x)$ 满足: $\phi(0) = 0, \phi(x)$ 是递增的, 存在 $N > 0$, 使得当 $x \rightarrow \infty, \phi(x) \rightarrow N$ 。

一些典型的功能响应函数有如下形式 (参见文献 [31]-[34])。

Holling I 型:

$$\phi(x) = Nx/M, 0 \leq x \leq M; \quad \phi(x) = N, x > M \quad (M, N > 0)$$

Holling II 型:

$$\phi(x) = \frac{Nx}{A+x}$$

Holling III 型:

$$\phi(x) = \frac{Nx^p}{A^p + x^p} \quad (A, N > 0, p > 1)$$

Ivlev 型:

$$\phi(x) = N - e^{-Ax}$$

捕食-食饵系统的研究有两个方面的重要问题: 第一, 在没有捕食者的情况下, 食饵本身是否总是可以达到能生存的可行数量; 第二, 捕食者出现后, 是否存在这样的参数区域, 使得系统具有正的吸引子, 即捕食者和食饵是共存的。其理论研究主要包括系统平衡点的稳定性、极限环的存在性、分支等问题。当 $q(x)$ 是 Logistic 增长函数时, 式(1.7)的动力学性质已经有丰富的结果

了^[35-41], 其中大多是最近几年得到的。当 $q(x)$ 是 Logistic 增长函数, 功能响应函数 $\phi(x)$ 是 Holling II 型时, 式(1.7)(此时称为 Rosenzweig-MacArthur 模型^[42]) 完备的动力学性质已经给出, 参见文献 [35], [37]-[40], [43], [44]。固定其他参数, 随着最大承载力由小变大, Rosenzweig-MacArthur 模型的边界平衡解(只有食饵的) 全局稳定性失稳而变为共存平衡解的全局稳定性。最大承载力进一步变大时, 系统有唯一的全局稳定极限环。这些数学结果为很多生态学的研究^[39,40,42] 提供了重要的信息。

当 $q(x)$ 是强 Allee 增长函数时, 只有数值模拟上的一些结果, 参见文献 [8], [12], [15], [19]-[21], 其中文献 [8] 的数值模拟表明当食饵满足强 Allee 效应增长式(1.3)时, 若食饵的数量大于“门槛”值 M , 那么捕食者的进入会产生下面三种不同的结果(见图1.1)。

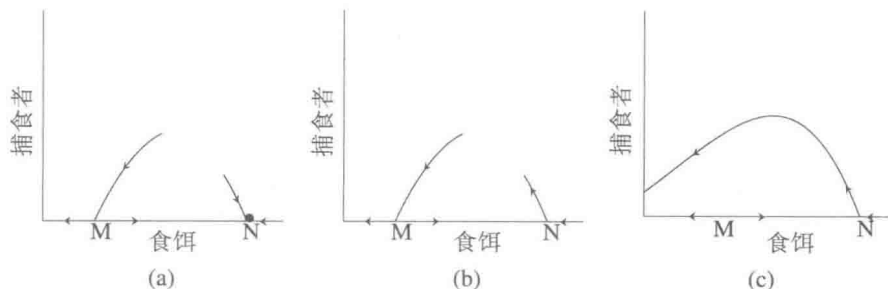


图 1.1 当食饵具有强 Allee 效应增长时, 捕食者的入侵可能导致的三种结果

1. 捕食者的数量较小时, 食饵最终可以到达其最大承载力 N , 而捕食者不能生存最终会灭绝, 如图 1.1(a) 所示。
2. 捕食者的数量适量时, 二者以平衡态或者以周期的形式共存, 这时捕食者的进入是成功的, 如图 1.1(b) 所示。
3. 捕食者的数量较大时, 二者最终都会灭绝, 这时捕食者的进入称为过度开采 (overexploitation^[8]), 如图 1.1(c) 所示。

然而, 此前还没有系统的数学上的理论分析。

1.2.2 反应扩散方程组

反应扩散方程 (组) 的研究从 20 世纪 70 年代开始得到了长足的发展, 其

研究方法大多都是基于常微分方程理论同时结合偏微方法的^[45-50]。研究反应扩散方程常见的基本问题如下。

1. 行波解的存在唯一性及稳定性。
2. 初值问题、初边值问题的整体解 (包括周期解) 的存在唯一性及渐进性态; 解的爆破问题。
3. 稳态解的模式生成 (pattern formation) 问题, 包括非常数平衡解的存在性, 分歧结构以及稳态解的稳定性问题。

度理论, 不动点原理及上、下解方法 (或称单调方法) 在研究一些具体的反应扩散方程整体解的存在性、稳定性时是很有效的。对于很多化学反应系统, 单调的捕食-食饵系统可以用不变区域方法^[51], Lyapunov 方法^[52,53], 迭代方法^[54] 得到常数解的全局渐进稳定性, 进而解释系统的长时间动力学行为。2009 年, Yi, Shi 和 Wei^[55] 用 Hopf 分歧分析成功地得到反应扩散系统周期解存在性和稳定性的判定方法。

基于各种机理背景的空间模式生成 (对应于反应扩散方程组非常数稳态解) 是很有实际意义的, 因此 20 世纪 80 年代初就出现了很多的解析方法和拓扑方法来研究共存稳态解集。例如, 文献 [56] 中的局部分歧理论, 文献 [57],[58] 中的单调迭代方法, 文献 [59], [60] 中的全局分歧理论, 文献 [61]-[64] 中的不动点指标理论等。这些方法在 20 世纪 90 年代变得更精确, 更为实用于稳态解的唯一性、多解性及稳定性的分析^[65-70]。

尽管结合上面的方法来研究带扩散的捕食-食饵系统的模式生成及分歧已经有了丰富的结果^[71-75], 然而对于非单调的捕食-食饵系统来说, 由于方程组的最大值原理不成立, 因而不能得到解本身的最大模估计, 直接应用这些常用的方法会变得很困难。此外, 虽然常数稳态解的全局存在性可以得到, 但是不能得到全局渐进行为更精确的结果, 这些方面的进一步理解似乎是更困难的, 但也是很有趣的。先验估计是能够用拓扑度理论得到稳态解的基本条件, 而强 Allee 效应作用下捕食-食饵系统是无法得到正下界的, 这就需要用其他方法来得到共存的稳态解。

1.2.3 时滞对捕食-食饵系统的影响

在种群动力学中,除了考虑食物和资源在空间分布上的不均匀性及种群的迁移处,还要考虑时间滞后的作用(即种群繁殖的妊娠期或者幼年种群到成年种群的成熟期)。Volterra^[76]首次提出具有滞量的捕食-食饵系统。通过在原有的常微分系统引入滞量,改进的系统较原有系统而言拥有了更加复杂的动力学行为,这是因为滞量可使平衡点从稳定变得不稳定或者使种群发生振动现象,参见文献[40],[77]-[82]。稳定性,周期解的存在性,持久性及分歧问题均是重要的研究课题。

考虑到种群的扩散,带空间扩散和时间滞量的捕食-食饵系统会展示出更加丰富的时空动力学行为,Wu 在文献[83]中给出了半线性偏泛函微分方程的详尽动力学理论及应用,Lin X 和 Wu 在文献[84]中得到了偏泛函微分方程的中心流形的存在性定理,而后 Faria 在文献[85]中将她对于泛函微分方程的规范型方法^[86,87]发展到偏泛函微分方程,为研究偏泛函微分方程的 Hopf 分歧的分歧方向,分歧周期解的稳定性、振幅、周期及其在中心流形上投影的计算公式提供了方法。在此基础上文献[88],[89]给出了一些泛函微分方程的 Hopf 分歧方向和稳定性的计算公式。关于带有滞量和扩散的 Lotka-Volterra 系统的研究也已有很多丰富的结果^[78,83,90]。然而由于 Laplace 算子的出现,线性化方程对应的特征方程变为可列个超越方程,而每个超越方程都产生可列个 Hopf 分歧临界值 τ ,一般情况下很难判断这些临界值的大小顺序。

1.3 本书的主要工作

本书详尽地分析了具有强 Allee 效应增长的方程(1.7)的全局动力学性态。具体地,本书研究下述反应扩散系统:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = d_1 \Delta u + g(u)(f(u) - v) & (x \in \Omega) \\ \frac{dv}{dt} = d_2 \Delta v + v(g(u) - d) & (x \in \Omega) \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 & (x \in \partial\Omega, \quad t > 0) \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, v(x, 0) = v_0(x) \geq 0 & (x \in \Omega) \end{cases} \quad (1.8)$$

其中, $d, m, a, d_1, d_2 > 0, 0 < b < 1$ 表示强 Allee 效应的“门槛”值, Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中具有光滑边界的有界区域。令 $\mathbb{R} = (0, \infty)$, 则 f, g 满足:

(a1) $f \in C^1(\overline{\mathbb{R}^+})$, $f(b) = f(1) = 0$, 其中 $0 < b < 1$; 当 $b < u < 1$ 时, $f(u) > 0$, 否则 $f(u) < 0$; 存在 $\bar{\lambda} \in (b, 1)$ 使得 $u \in [b, \bar{\lambda})$ 时, $f'(u) > 0$; $u \in (\bar{\lambda}, 1]$ 时, $f'(u) < 0$ 。

(a2) $g \in C^1(\overline{\mathbb{R}^+})$, $g(0) = 0$; $u > 0$ 时, $g(u) > 0$, $g'(u) > 0$ 。并且存在 $\lambda > 0$, 使得 $g(\lambda) = d$ 。

借助计算机模拟, Lewis 和 Karevia 在文献 [1] 中给出的结果表明强 Allee 效应可以减少入侵者的速度; Owen 和 Lewis 在文献 [2] 中研究方程(1.8)时发现捕食者可以降低、阻止甚至逆转具有强 Allee 增长率的食饵的空间扩散速度; Morozov 和 Li 得到了方程(1.8)非常丰富的动力学行为, 并且随着食饵最大承载量的增加, 动力学行为会变得更为复杂, 可以出现混沌现象; 文献 [3], [4] 分析了方程(1.8)可能的空间模式生成及时空混沌现象; 文献 [5]-[9] 模拟得到了很多丰富的动力学结果。然而几乎所有的分析都是数值上的, 解析上的理论分析几乎是没有的。本书详尽地分析了方程(1.8)的全局动力学行为, 而且模型的假设具有一般化形式, 理论分析及所得的结果不依赖于非线性函数的代数形式, 也不依赖于具体的参数。具体的主要工作分为以下三部分。

第2章考虑了方程(1.8)的与空间变元无关的常微分方程:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = g(u)(f(u) - v) \\ \frac{dv}{dt} = v(g(u) - d) \end{cases} \quad (1.9)$$

详细给出食饵具有强 Allee 效应增长的捕食-食饵模型的双稳定全局动力学分