

刘彦佩

半闲数学集锦

**Semi-Empty Collections
in Mathematics by Y.P.Liu**

第十一编

时代文化出版社

刘彦佩

半闲数学集锦

**Semi-Empty Collections
in Mathematics by Y.P.Liu**

第十一编



时代文化出版社

半闲数学集锦（第十一编）

作 者：刘彦佩

出版单位：时代文化出版社

地 址：香港湾仔骆克道骆基中心23楼C座

编辑设计：北京时代弄潮文化发展有限公司

地 址：北京市海淀区中关村创业大街25号家谱传记楼

电 话：010-68920114 13693651386

网 址：www.grcsw.com

印 刷：京冀印刷厂

开 本：880×1230 1/16

版 次：2016年9月第1版

书 号：ISBN 978-988-18455-0-4

定 价：全套 1890.00元（共22编）



版权所有 翻印必究

第十一编序

本编含两本专著: 运输网络术[168](11.13—11.24) 和 运筹学导引(上篇)[271](11.25—11.47), 以及一些有关文章(11.01[065]—11.12[188]).

文 11.01[065]—11.02[066] 是我于 1984 年第一次访问 Rutgers(美国新泽西州立大学, 罗杰斯) 时, 共同讨论的. 当时, Peter(Peter Ladislaw Hammer, 1936—2006) 在用图论研究布尔方程, 发现序关系在提高算法有效性方面的作用. 这恰与我在研究平面性时, 借助序关系, 导出一系列简洁结果, 不谋而合.

文 11.05[092]—11.07[094] 是我 1987 年, 再访 Rutgers 时, 遇到 Bruno(Bruno Simeone, 1945—2010) 与 Peter 讨论布尔二次优化与图论的关系, 由 Peter 介绍, 结识 Bruno. 因为我在平面性方面的一件工作, 同样可以转化为一类布尔二次优化问题, 使我们不约而同地提出, 共同完成这一篇长文, 期刊编辑部决定, 分三次发表.

文 11.04[084]、11.03[081] 和 11.08[095] 源自一篇. 后两者分别为中文和英文通讯, 前者是全文. 对于递推团图序列, 证明每迭代一次, 直径增加 1.

已经知道, 判别一个图, 是否有一个 3-正则子图, 属于 NP-完全类. 人们会想, 通过限制, 图中节点最大次, 以找到可有效地判别的图类. 文 11.10[143] 表明, 这种想法是徒劳的.

最优组合搜索问题, 就是在一组数据中, 找出几个坏的来, 使得寻找的次数最小. 在 n 个硬币中, 知道有 m 是假的. 若还知道假币的轻重, 譬如, 重. 问至多和/或至少称多少次? 这就是伪币问题. 可见, 伪币问题是一类最优组合搜索问题. 所谓四伪币问题, 就是 $m = 4$ 的情形. 只有 $m = 1$ 时, 最小称重次数已被确定. 文 11.09[140] 对于 $m = 4$ 的情形, 只能提供出新的更好的上界和下界. 以及对于一类 n , 给出更小的上界.

一个图的破圈数, 就是所需要的最少节点数, 使得删掉这些节点的图, 不再有圈. 文 11.12[188] 在于, 提供将两个图按一定方式合成后, 所得图的破圈数, 与这两图的独立数有关的, 一个好上界. 同时, 也给出了一些特殊情形下的破圈数.

上述文章, 都与专著[271](11.25—11.27), 有千丝万缕的联系.

文 11.11[151] 为专著[168](11.13—11.24) 成形, 提供了理论路线上的一个纲要.

专著[168] 运输网络术 的形成, 源自我在研究纵横嵌入, 及其扩张时, 发现与导出方程, 所关联的优化, 可以用我国, 于上世纪中期, 揭示的图上作业法, 求解(见 6.21—6.28).

联想到, 上世纪 70 年代末, 我在中国科学院, 为研究生开图论课时, 就注重最大流、最大匹配, 最少无共内点路、最少无共内边路、点连通度、边连通度等的统一性. 在它们求取中, 西方所用的标号法, 与我国的图上作业法,

是一致的。

此后, 约 30 年以来, 从搞地图着色, 图的曲面嵌入, 以及从 Bill(William Thomas Tutte, 1917–2002) 那里, 了解到他早年所搞的拼方等基础理论问题中, 萃取出与运输网络的紧密联系. 又一次印证我的数学一体观的理念. 这里所反映的是, 应用数学对于基础数学的贡献.

在这本专著的主体中, 11.16—11.20 源自应用数学, 和 11.21—11.23 源自基础(或纯粹)数学.

随着学科的发展, 运筹学的教程愈来愈厚, 但深究起来, 那里的重复也很多, 大有简化的必要, 这只是从表面的层次看. 从内容的深一层次看, 又多还未能从近代的研究中, 提炼出一些更具有普遍意义的核心部分, 促使我不能不考虑在运筹学教程中, 如何除冗和纳精.

专著[271](11.25—11.47) 就是根据自己切身的研究经历, 对于精教程所做的一个尝试. 在这本书核心内容中(11.27—11.46), 奇数款(11.27, 11.29, 11.31, 11.33, 11.35, 11.37, 11.39, 11.41, 11.43, 11.45)为课堂上必讲的, 和偶数款是课余, 或课外选作的. 前者着力阐明理论原则与实现方法, 强调普遍性, 和后者着眼举一反三与回味联想, 强调特殊性, 即解决各种具体问题. 以提高分析和综合的能力.

刘彦佩
2015 年 7 月
於北京上园村

第十一编目录

11.01[065]	序关系与 0-1 规划问题(上)(P.L.Hammer).....	5033
11.02[066]	序关系与 0-1 规划问题(下)(P.L.Hammer).....	5044
11.03[081]	关于递归团图直径的 PRS-猜想(董峰明,李祥贵).....	5054
11.04[084]	与递归团图直径有关的 PRS-猜想(董峰明,李祥贵)....	5056
11.05[092]	组合最优化中的布尔方法(P.L.Hammer, B.Simeone)...	5062
11.06[093]	组合最优化中的布尔方法(续一) (P.L.Hammer, B.Simeone)	5075
11.07[094]	组合最优化中的布尔方法(续二) (P.L.Hammer, B.Simeone)	5089
11.08[095]	On the PRS- conjecture related to the diameters of iterated clique graphs (F.Dong and X.Li)	5099
11.09[140]	四伪币问题(李安平).....	5101
11.10[143]	关于 3-正则子图的一个注记(于濂).....	5105
11.11[151]	Transportation networks: old and new	5108
11.12[188]	Decycling number of some graphs (E. Wei)	5130
专著[168]	运输网络术	5135
11.13	序.....	5137
11.14	目录	5139
11.15	第一章 基本知识.....	5141
11.16	第二章 运输.....	5162
11.17	第三章 布局.....	5181
11.18	第四章 定向.....	5201
11.19	第五章 划分.....	5219
11.20	第六章 环游.....	5236
11.21	第七章 拼方.....	5254
11.22	第八章 着色.....	5270
11.23	第九章 嵌入.....	5287
11.24	名词索引.....	5307
专著[271]	运筹学导引(上篇).....	5323

11.25	序.....	5325
11.26	目录.....	5327
11.27	第 1 讲 基本常识.....	5330
11.28	课外活动 1.....	5337
11.29	第 2 讲 模型与方法.....	5339
11.30	课外活动 2.....	5351
11.31	第 3 讲 线性性与单形法.....	5358
11.32	课外活动 3.....	5367
11.33	第 4 讲 整数性与动态递推.....	5373
11.34	课外活动 4.....	5383
11.35	第 5 讲 满足性与布尔法.....	5389
11.36	课外活动 5.....	5403
11.37	第 6 讲 非线性与迭代法.....	5409
11.38	课外活动 6.....	5423
11.39	第 7 讲 网络与禁用构形.....	5429
11.40	课外活动 7.....	5448
11.41	第 8 讲 大系统与分解法.....	5454
11.42	课外活动 8.....	5473
11.43	第 9 讲 复杂性与演示法.....	5479
11.44	课外活动 9.....	5491
11.45	第 10 讲 渐近性与离合法.....	5500
11.46	课外活动 10.....	5513
11.47	术词索引.....	5521

序关系与 0—1 规划问题 (上)*

彼得·哈默 (Peter L. Hammer) 刘彦佩 (Yanpei Liu)

(新泽西州立大学运筹中心) (中国科学院应用数学研究所)

提 要

本文在于总结研究序关系在 0—1 规划问题中的作用。依此,可将问题简化。特别地,可使一些在算法复杂性方面很难的问题变得容易。即,能用多项式阶的计算量求出其解或判定无解。例如,背包问题,集合组装问题和集合复盖问题等。

§ 1 引 言

对于 0—1 规划问题的研究,如人们所知,与运筹学中的整数规划密切相关。实际上,可以证明,任何一个整数规划问题均可化为 0—1 规划问题。因此,0—1 规划与整数规划一样是组合最优化的一个重要分枝。

一般而言,整数规划乃至 0—1 规划的主要困难在如下二个方面:首先,如何判定一组整系数的不等式或方程是否有整数,甚至是仅取 0 或 1 的解;其次,就是当已知一组不等式或方程有整数,或仅取 0 或 1 的解之下,如何求出一个最优解。我们这里所说的困难是指时至今日尚未能确定是否可以建立一个算法使得能以一个仅依赖初始数据量的多项式为界的计算量,或者说,计算时间即求得出一个解或判定无解。从算法复杂性理论的角度,称那些有多项式界的算法求解的问题为 P—问题。否则,就称为 NP—问题。也就是我们这里所说的困难问题。有多项式界的计算量的算法称为有效算法。否则,无效算法。

由于 0—1 规划中的所有变量均取值 0 或 1。自然,布尔代数和布尔方程的理论应该作为基础。因此,我们不能不介绍这方面的一些基本知识与结果。这就是 § 2 和 § 3 中的内容。

接着,在 § 4 中,介绍有关 0—1 规划的一般理论。它们当然不可能导致一般问题的多项式界的算法。然而,当问题的规模较小时却是可以利用的。况且,它们还是解决一些特殊问题,或者研究一般问题变为 P—问题的条件的理论基础。

之后,引进了 0—1 规划问题中变量间的二类序关系,常序关系与准序关系。从 § 5 到 § 10 全是研究在一些序关系的限制下的 P—问题以及它们求解的有效算法的设计和研究一些本来是 NP—问题,如集合组装 (Set Packing) 问题,集合复盖 (Set Covering) 问题以及背包 (Knapsack) 问题等转变为 P—问题的条件。同时,也研究了这些条件的有效识别和在这些条件下问题的有效求解。

在 § 11 中,研究另一类带有序限制 0—1 规划问题的有效性和有效算法的设计。这类问题是在研究如何判定一个图是否是平面图时发现的。

*1986年11月10日收到,本文分两期刊完,(下)在本刊下期。

最后, 在 § 12 中, 给出了目标函数为线性的一般 0—1 规划与 § 10 中讨论的一类集合复盖问题等价。

§ 2 布尔代数

布尔代数 (Boolean Algebra) 的发明者是十九世纪的英国数学家乔治·布尔 (George Boole)。它就由此而得名。

所谓布尔代数, 实际上, 就是具有如下性质 P1—P7 的数学系统, 记之为 $\mathcal{B} = (B; \vee, \wedge, \neg)$ 。其中 $\wedge, \vee$ 为 $B \times B \rightarrow B$, $\neg$ 为 $B \rightarrow B$ 的映象, 或称为运算: 交, 并, 或补。 $B = \{a, b, c, \dots\}$ 是一个集合。

P1. 幂同律 (Idempotent Law): $\forall a \in B, a \wedge a = a \vee a = a$;

P2. 交换律 (Commutative Law): $\forall a, b \in B, a \wedge b = b \wedge a, a \vee b = b \vee a$;

P3. 结合律 (Associative Law): $\forall a, b, c \in B, a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c, a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$;

P4. 吸收律 (Absorption Law): $\forall a, b \in B, a \wedge (a \vee b) = a \vee (a \wedge b) = a$;

P5. 分配律 (Distributive Law): $\forall a, b, c \in B, a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c), a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$;

P6. 通界律 (Universal Bound Law): $\exists O, I \in B \in \forall a \in B,$

$$O \wedge a = O, O \vee a = a, I \wedge a = a, I \vee a = I;$$

P7. 单补律 (Unary Complement Law): $\forall a \in B, \bar{a}$ 唯一确定, 而且有 $a \wedge \bar{a} = O, a \vee \bar{a} = I$ 。

由这些定律出发, 可以导出很多有用的结果。这里仅列出几个重要的。

首先, 从布尔代数上述的定义, 我们注意到运算 $\wedge$ 和运算 $\vee$: 元素 O 和 I 是对称的。并且不难导出如下几个定理。

定理 2.1 在布尔代数 $\mathcal{B}$ 中, 一个元素 $a \in B$, 如果对任何 $x \in B$, 都有 $a \wedge x = a$ 和 $a \vee x = x$, 则 $a = O$; 对称地, 若对任何 $x \in B$, 都有 $a \vee x = a$ 和 $a \wedge x = x$, 则 $a = I$ 。

定理 2.2 在布尔代数 $\mathcal{B}$ 中, 对于任何 $a, b \in B, a \wedge b = a$, 当且仅当 $a \vee b = b$ 。

定理 2.3 在布尔代数 $\mathcal{B}$ 中, 对 $a, x, y \in B$, 如果 $a \wedge x = a \wedge y$ 和 $a \vee x = a \vee y$ 则 $x = y$ 。

定理 2.4 在布尔代数 $\mathcal{B}$ 中, 对任何 $x, y \in B$, 有 $\bar{\bar{x}} = x; \overline{(x \vee y)} = \bar{x} \wedge \bar{y}; \overline{(x \wedge y)} = \bar{x} \vee \bar{y}$ 。

由此, 即可得到 $\bar{O} = I$, 和 $\bar{I} = O$ 。在布尔代数中, 从任何一个有关 $\wedge, \vee, \neg, O, I$ 的命题均可通过 $\wedge$ 与 $\vee, O$ 与 I 互换得到一个新的命题。此二命题互称为对偶。

更重要地, 可通过 $a \wedge b = a$, 或者由定理 2.2, 等价地 $a \vee b = b$ 定义 $\mathcal{B}$ 上的一个关系。记之为 $a \prec b$ 。容易验证: $\prec$ 在 $\mathcal{B}$ 上满足:

R1. 反身性 (Reflexivity): $\forall a \in B, a \prec a$;

R2. 反对称性 (Antisymmetry): $\forall a, b \in B, a \prec b$ 和 $b \prec a \Rightarrow a = b$;

R3. 传递性 (Transitivity): $\forall a, b, c \in B, a \prec b$ 和 $b \prec c \Rightarrow a \prec c$ 。

因此, $\prec$ 为 $\mathcal{B}$ 上的一个序关系。

定理 2.5 在布尔代数 $\mathcal{B}$ 中, 在序关系 $\prec$ 之下, 有而且仅有一个最小元, 这就是 0 ; 有且仅有一个最大元, 即 1 . 且对于任何 $a, b \in B$, $\{a, b\}$ 在 B 中有且仅有一个下确界 $\inf\{a, b\}$ 和有且仅有一个上确界 $\sup\{a, b\}$, 并有

$$a \wedge b = \inf\{a, b\}, \quad a \vee b = \sup\{a, b\}.$$

现在, 我们可以用一个有向图表示一个布尔代数. 记 $\vec{G}(\mathcal{B}) = (B, \vec{E}(\mathcal{B}))$ 为表示 $\mathcal{B} = (B; \vee, \wedge, \neg)$ 的有向图. 其中,

$$(a, b) \in \vec{E}(\mathcal{B}) \Leftrightarrow a \prec b \text{ 且 } \nexists c \in B, c \prec a, b, \quad a \prec c \prec b.$$

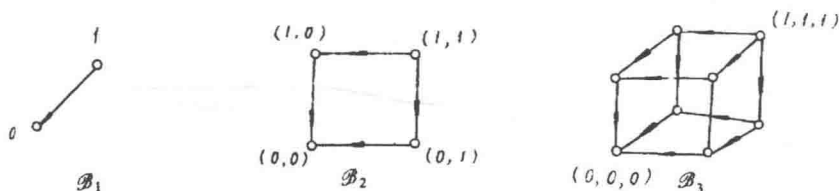
当然, 不是任何一个有向图皆可表示一个布尔代数. 事实上, 可以证明, 对于任何一个布尔代数 $\mathcal{B}$, 都存在一个整数 s 使得 $|B| = 2^s$. 再由于 $\prec$ 的性质, 只有 s 维的立方图才有可能表示布尔代数. 若取 $B_1 = \{0, 1\}$, $\prec$ 就取为 $<$, 这时, 所得的布尔代数记为 $\mathcal{B}_1 = (B_1; \vee, \wedge, \neg)$. 自然, 这时的 $\wedge, \vee, \neg$ 如下表所示:

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

	a	$\bar{a}$
0	0	1
1	1	0

进而, 还可构造有 2^s 个元素的布尔代数, 记之为 $\mathcal{B}_s = (B_s; \wedge, \vee, \neg)$. 其中, $B_s = B_1 \times B_1 \times \cdots \times B_1$, 有 s 个 $B_1 = \{0, 1\}$. 对于 $a = (a_1, \dots, a_s), b = (b_1, \dots, b_s) \in B_s$, 定义 $a \vee b = (a_1 \vee b_1, \dots, a_s \vee b_s)$, $a \wedge b = (a_1 \wedge b_1, \dots, a_s \wedge b_s)$, 和 $\bar{a} = (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_s)$. 这样的 $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots$ 有如下的图表示:



定理 2.6 任何一个布尔代数 $\mathcal{B} = (B; \vee, \wedge, \neg)$, $|B| = 2^s$, 都与 $\mathcal{B}_s$ 同构. 由此可见, 研究 $\mathcal{B}_s$ 是有一般性的.

§ 3 布尔函数与布尔方程

由于, 我们只研究 $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$ 的情况. 这时, 运算 $\wedge$ 与一般的乘法一致. 故, 不再用 $\wedge$ 而以一般乘法代之.

具有 n 个变量的布尔函数 $f(x_1, \dots, x_n)$ 就是一个映象 $f: B_1^n \rightarrow B_1$. 因为 B_1^n 中共有 2^n 个点, 或者说向量, 其中每个分量仅能取值 0 或 1. 又, 对任一 $x \in B_1^n$, $f(x)$ 亦仅取值 0 或 1 二种方式. 故, 只可能有 2^{2^n} 个可能的布尔函数. 记 $N = \{1, 2, \dots, n\}$. 对任何 $S \subseteq N$, 形如 $C = \prod_{j \in S} x_j^{a_j}$ 的布尔函数称为基本交. 其中 $x_j^{a_j} = x_j$, 当 $a_j = 1$; $\bar{x}_j$, 当 $a_j = 0$, $a_j \in B_1$.

定理 3.1 任何布尔函数 $f: B_1^n \rightarrow B_1$ 均有形式:

$$f = \bigvee_{i=1}^m C_i = \bigvee_{i=1}^m \prod_{j \in S_i} x_j^{a_{ij}}. \quad (3.1)$$

称 f 的如 (3.1) 之形式为基本交的并. 对偶地, f 也可表示为基本并的交.

如果基本交 C_1 中的变量全是基本交 C_2 中的变量, 则称 C_1 包含在 C_2 中. 或, C_2 包含 C_1 . 一个基本交 C , 如果 $C = 1 \Rightarrow f = 1$, 则称 C 为 f 的隐子. f 的一个隐子, 如果它不包含 f 的任何其他隐子, 则称之为素隐子. 可见, 由定理 3.1, 任何布尔函数均可表示为它的所有素隐子之并. 通常记素隐子为 P . 下面, 介绍一种求一个布尔函数的所有素隐子的方法.

二个基本交 C_1, C_2 , 具有形式 $C_1 = x A_1, C_2 = \bar{x} A_2$, A_1 中没有一个变量在 A_2 中以它补的形式出现, 则称 $C_3 = A_1 A_2$ 为 C_1 和 C_2 的协调.

定理3.2 任何一个布尔函数 f 由形式 (3.1) 可经过反复利用如下二种运算得到它的所有素隐子:

运算 I: 若存在 $C, C' \in \{C_1, C_2, \dots, C_m\} = \mathcal{C}(f)$, 且 $C \subseteq C'$, 则在 $\mathcal{C}(f)$ 中将 C' 去掉;

运算 II: 若 C 是 $\mathcal{C}(f)$ 中二个基本交的协调而且不包含 $\mathcal{C}(f)$ 中任何一个基本交, 则将 C 加入 $\mathcal{C}(f)$.

一个布尔函数 $f = \bigvee_{i=1}^m C_i$, 如果存在 C_j 使得 $C_j < \bigvee_{i=1, i \neq j}^m C_i$, 则称 C_j 是多余的. 这时, f 的上述表示称为是有多余的. 否则, 无余的. 可惜的是从所有素隐子中求出 f 的无余表示, 一般而论, 不是唯一的. 对于一个布尔函数 f , 如果满足: $\forall x, y \in B_1^n, x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$, 则称 f 是正的. 然, 对于正布尔函数确有如下的结论.

定理3.3 任何正布尔函数的无余表示全是唯一的. 且在每个素隐子中变量的指数皆非 0.

关于布尔方程, 只有如下二类:

$$f(x) = 0; \quad f(x) = 1. \quad (3.2)$$

在 f 具 (3.1) 的形式下, 第二类方程的求解是不足道的. 因为, 只需讨论 $C_j = \bigcap_{i \in S_j} x_i^{f_i} = 1$, $j = 1, 2, \dots, m$. 它们的解即可列出. 第二类方程的一个解也称为 f 的一个真点. 如果 $x \in B_1^n$, 是 f 的真点, 则由上述讨论可知: 当 f 是正的时, 任何 $y \in B_1^n, y \geq x$, y 亦是 f 的真点; 因此, 确定第二类方程的解只需求出 f 的所有极小真点即足. 所谓 f 的真点 x 是极小的, 是指: 若有真点 $y < x$ 则必有 $y = x$. 对偶地, 可知: 确定第一类方程的解, 只需求出 f 的所有极大伪点. 由定理 3.3, 还可导出如下结论.

定理3.4 若 f 是正布尔函数, 则它的素隐子与它的极小真点有一个一对一的映象:

$$P_j = \bigcap_{i \in S_j} x_i \leftrightarrow \bigvee_{i \in S_j} e_i. \quad (3.3)$$

其中 e_i 是所有分量, 除第 i 位置为 1 外, 皆 0.

第一类方程的求解不能象第二类那样直接. 然而, 我们可以利用如下关系消去变量化求解只有一个变量的布尔方程.

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 &\Leftrightarrow f_1(1, x_2, \dots, x_n) x_1 \vee f_1(0, x_2, \dots, x_n) \bar{x}_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow f_2(x_2, \dots, x_n) = f_1(1, x_2, \dots, x_n) f_1(0, x_2, \dots, x_n) = 0. \end{aligned}$$

其中, 最后一个等价性是由于对于单变量方程有:

$$a x_1 \vee b \bar{x}_1 = 0 \Leftrightarrow a b = 0.$$

另外, 也可取补. 然后, 将之化为 (3.1) 之形式. 或求其素隐子表示. 对任一布尔函数 $f(x)$ 还可建立其对偶函数 $f^d(x) = \overline{f(\bar{x})}$. 容易看出, f 是正的, 当且仅当 f^d 是正的和 x 是 f 的极大伪点, 当且仅当 $\bar{x}$ 是 f^d 的极小真点.

对于任何布尔方程,或布尔不等式组,均可用如下的变换将之变成一个布尔方程:

- (i) $f(x) \leq g(x)$, 当且仅当 $f(x) \bar{g}(x) = 0$;
- (ii) $f(x) < g(x)$, 当且仅当 $f(x) = 0$ 和 $\bar{g}(x) = 0$;
- (iii) $f_1(x) = 0, f_2(x) = 0$, 当且仅当 $f_1(x) \vee f_2(x) = 0$.

因此,讨论一个布尔方程具有一般性.

§ 4 一般 0—1 规划

一般 0—1 规划具有如下形式:

$$(P) \quad \max g(y): f_i(y) \leq 0, i = 1, \dots, m, y \in B_1^n. \quad (4.1)$$

其中 $g, f_i, i = 1, 2, \dots, m$ 全是拟布尔函数,即 $B^n \rightarrow R$ 的映象, R 为实数域. 我们这里只讨论 g 是严格单增的情况,即, $x < y$ 且 $x \neq y \Rightarrow g(x) < g(y)$. 当然,这一限制是非常有用的. 这一问题,即使 $g, f_i, i = 1, \dots, m$ 皆是线性的也是困难的问题. 这里给出一种解法,虽然不是有效的. 但,并不是遍数的. 称这个问题为 (P).

现在,我们记 $\mathcal{P}(P) = \{y \in B_1^n \mid f_i(y) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m\}$ 称为 (P) 的可行集. 其中的点称为可行点. 对任一子集 $S \subset B_1^n$, 定义一个布尔函数: $\chi_S \chi_S(x) = 1$, 当 $x \in S$; 0, 否则, 称 χ_S 为 S 的特征. 另一个布尔函数 $\rho_S: \rho_S(x) = 0$, 当 $x \in S$; 1, 否则. 称 ρ_S 为 S 的解表征. 即, $\rho_S = \bar{\chi}_S$. 这时,若记 ρ 为 (P) 的可行集的解表征,则 (P) 还可表述如下:

$$\max g(y): \rho(y) = 0, y \in B_1^n. \quad (4.2)$$

这样一来,由于 g 的严格单增性,它的最大值必在 ρ 的极大伪点上达到,我们可以用 § 3 中的方法求出 ρ 的所有极大伪点,然后计算 g 在这些点处的值取使达最大者得到 (P) 的最优解. 进而,还有如下的结果.

定理 4.1 上述的问题 (P) 的最优解集与如下的问题 ($\tilde{P}$) 的最优解集相同.

$$(\tilde{P}) \quad \max g(y): \tilde{\rho}(y) = 0, y \in B_1^n \quad (4.3)$$

其中 $\tilde{\rho}$ 是集合 $\mathcal{S}(\tilde{P}) = \{y \in B_1^n \mid \exists y' \in \mathcal{S}(P), y < y'\}$ 的解表征.

然,注意, $\tilde{\rho}$ 这时是正的. 由上节的讨论,这就为求极大伪点带来了方便. 尽管如此,这仍然是一项困难的工作. 不过,当 g 是线性的,已经证明 (P) 可以化为如下形式的线性 0—1 规划并且使得它的系数阵中的元素只取 0, 1 (见 § 12):

$$(L) \quad \max c^T x: Ax \leq b, x \in B_1^n. \quad (4.4)$$

其中 $c \in R^n, b \in R^m, A$ 为 $m \times n$ 的 0—1 阵.

定理 4.2 记 $X = \{x \in B_1^n \mid Ax \leq b\}$, 即 (L) 的可行集. 则 (L) 的解表征有如下形式:

$$\rho_X(x) = \bigvee_{i=1}^m \bigvee_{C \in \mathcal{A}_i} \prod_{j \in C} x_j^{a_{ij}}, \quad (4.5)$$

其中 $\mathcal{A}_i$ 为不等式 $\sum_{j \in C} a_{ij} x_j < b_i, i = 1, 2, \dots, m$, 的所有极小复盖 C 的集合. 即, $C \subseteq N = \{1, 2, \dots, n\}$ 且满足性质

$$\text{Per:} \quad \sum_{j \in C} |a_{ij}| > b_i - \sum_{j=1}^m \min(0, a_{ij}) \quad (4.6)$$

但任何 $C' \subset C$ 均不满足 Per. 和, 取

$$\beta_{ij} = 1, \text{ 当 } a_{ij} > 0; 0, \text{ 否则.} \quad (4.7)$$

又, 我们知道, 一般 0—1 规划问题 (L) 可以化为 0—1 背包问题:

$$(K) \quad \max c^T x; a_1 x_1 + \dots + a_n x_n \leq b, x \in B_1^n \quad (4.8)$$

其中, $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$. 而且, 还可约定 $a_1 > a_2 > \dots > a_n$.

这时, 作为定理 4.2 的直接推论, 可得背包问题 (K) 的解表征具有如下形式

$$\rho_X(x) = \bigvee_{A \in \mathcal{A}} \prod_{j \in A} x_j, \quad (4.9)$$

其中 $\mathcal{A} = \{A \subseteq N \mid \sum_{j \in A} a_j > b \text{ 但 } \forall A_1 \subset A, \sum_{j \in A_1} a_j \leq b\}$.

§5 带序限制的 0—1 规划

首先, 引进变量中之序的概念. 一个是对于 $x_i, x_j \in B_1$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$, X 为 (P) 问题的可行集, $1 \leq i, j \leq n$,

$$x_i \prec x_j: x_i = 1 \Rightarrow x_j = 1. \quad (5.1)$$

容易验证, 这个关系具有反身性和传递性. 称这个关系为常序关系. $\prec$ 被称为常序. 另一个序关系, 记为 $\cdot \prec$ 称为准序. 即

$$x_i \cdot \prec x_j: \forall y \in X \subseteq B_1^n, y_i = 0, y_j = 1 \Rightarrow y' = y + e_i - e_j \in X. \quad (5.2)$$

当然, 也易验证, 准序 $\cdot \prec$ 也具有反身性和传递性.

下面, 就可以描述我们所关心的带序限制的 0—1 规划问题:

$$(O) \quad \max \sum_{i=1}^n \omega_i x_i; x_i \prec x_j, (i, j) \in S, x \in B_1^n. \quad (5.3)$$

其中 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $S \subseteq N \times N$, $N = \{1, 2, \dots, n\}$.

对问题 (O), 我们可以建立一个有向图 $D = (N, S)$. 一个子集 $U \subseteq N$, 如果 $\forall (i, j) \in S$, $i \in U \Rightarrow j \in U$, 则称 U 为一个闭包. 若将有向图 D 的节点 $i \in N$ 分配以权 w_i 并对任何 $Y \subseteq N$, 记 $W(Y) = \sum_{i \in Y} w_i$, 称为 Y 的权. 则有下面的定理.

定理 5.1 问题 (O) 与如下求最大闭包问题等价:

$$(C) \quad \max W(Y); Y \in \mathcal{Q}(D). \quad (5.4)$$

其中 $\mathcal{Q}(D)$ 是有向图 D 上所有闭包的集合.

下面, 我们讨论问题 (O) 可以化为求最小截的问题. 所谓 D 上的源, 是指这样的节点 $s \in N$, 使得不存在 $k \in N$, $(k, s) \in S$. 记 N_0 为 D 的所有源的集合. 相反地, 汇, 即这样的 k , 使得不存在 $j \in N$, $(k, j) \in S$. 记 N_1 为 D 的所有汇的集合. 因为若有 $s \in N_0$, $w_s < 0$ 则在 (O) 的最优解 x^* 中, 总有 $x_s^* = 0$. 和若有 $j \in N_1$, $w_j > 0$, 则在 (O) 的最优解 x^* 中, 总有 $x_j^* = 1$. 故, 我们可以在如下的假设 H 之下讨论我们的问题而不失一般性:

$$H: \quad \forall i \in N_0, w_i > 0; \forall j \in N_1, w_j < 0. \quad (5.5)$$

在假定 H 之下, 我们可以将 D 扩充为有向图 $\tilde{D} = (\tilde{N}, \tilde{S}) = (s \cup N \cup t, (s, N^+) \cup S \cup (N^-, t))$, 其中 s, t 为虚设的二个节点分别作为 $\tilde{D}$ 的源和汇. $N^+ = \{i \mid i \in N, w_i > 0\}$, $N^- = \{i \mid i \in N, w_i < 0\}$. $(s, N^+) = \{(s, i) \mid i \in N^+\}$, $(N^-, t) = \{(j, t) \mid j \in N^-\}$. 由假设 H , $\tilde{D}$ 只有一个源, 即 s . 和只有一个汇, 即 t . 进而, 在 $\tilde{D}$ 上给边 $\tilde{s} \in \tilde{S}$ 赋以权, 称为容量, 如

$$c(\tilde{s}) = \begin{cases} w_i, & \text{当 } \tilde{s} = (s, i) \in (s, N^+); \\ -w_j, & \text{当 } \tilde{s} = (j, t) \in (N^-, t); \\ +\infty, & \text{否则.} \end{cases} \quad (5.6)$$

同样地, 对任何 $E \subseteq \tilde{S}$, 记 $C(E) = \sum_{e \in E} c(e)$ 称为 E 的容量.

所谓 $\tilde{D}$ 上的一个截, 指具有如下形式的边的集合 Z : $\exists J \subseteq \tilde{N}, \bar{J} = \tilde{N} - J$,

$$Z = (J, \bar{J}) = \{(j, t) \in \tilde{S} \mid j \in J, t \in \bar{J}\}. \quad (5.7)$$

记 $Z(\tilde{D})$ 为 $\tilde{D}$ 上所有截 Z 使得 $s \in J, t \in \bar{J}$ 的集合.

引理 5.1 在 $\tilde{D}$ 上的容量有限的截 Z , 与 D 上的闭包 X 之间存在一个一对一的关系且使得

$$C(Z) + W(X) = W(N^+) = \text{常数}. \quad (5.8)$$

证明 首先, 可以看出: 对任何 $\tilde{D}$ 上的具有有限容量的截 $Z = (J, \bar{J})$,

$$\tau(Z) = J - s = X \in \mathcal{Q}(D) \quad (5.9)$$

就给出了所需要的一对一的关系. 进而, 由于

$$C(Z) = \sum_{i \in (N-X) \cap N} w_i - \sum_{j \in X \cap N^-} w_j;$$

$$W(X) = \sum_{i \in X \cap N^+} w_i + \sum_{j \in X \cap N^-} w_j.$$

即可得 (5.8). ■

定理 5.2 问题 (C) 与下面的问题 (U) 等价:

$$(U) \quad \min C(Z); Z \in Z(\tilde{D}). \quad (5.10)$$

基于上述的定理 5.2 和定理 5.1 可知, 带限制 0-1 规划问题 (O) 相当于在同规模的网络上求最大流的问题. 后者已有了 $O(n^3)$ 的算法. 因此, (O) 是 P-问题.

注意 1 任何 0-1 规划问题, 从原则上说, 均可通过加割平面的办法转化为某种带序限制的 0-1 规划问题.

注意 2 从理论上, 如何实现注意 1 中所说的转化是个 NP-问题.

§6 深探序与广探序

这里研究更特殊的带序限制的 0-1 规划问题. 即, 当 D 是有根树的情况, 记之为 T . 这时, 可以得到线性时间的算法. 为方便, 记此问题为 $P(T, w)$.

引理 6.1 若 k 是 T 的一个悬挂点, 且 $w_k \geq 0$, 则 $P(T, w)$ 有一个最优解 x^* 使得 $x_k^* = 1$.

证明 不足道. ■

由于 T 是有根树, 则可按节点与根之间的距离而确定这个节点的代数. 如果一个节点, 它的所有子代 (即, 下一代) 的节点全是悬挂点, 则称之为端枝, (Pedicel).

引理 6.2 令 h 是 T 的一个端枝, 又, L 为 h 的所有子代节点的集合. 如果对所有 $j \in L$ 皆 $w_j < 0$, 则 $P(T, w)$ 的所有最优解 x^* 皆满足: 对任何 $j \in L$, 有 $x_h^* = x_j^*$.

证明 首先注意到, 对于 $P(T, w)$ 的任一最优解 x^* , 若 $x_h^* = 1$, 则由序限制必对任何 $j \in L$, $x_j^* = 1$. 这时, 引理成立.

若 $x_h^* = 0$, 而存在一个 $j \in L$, $x_j^* = 1$, 则 $y^* = x^* - e_j$ 是 $P(T, w)$ 的一个可行解. 然, 这时,

$$\sum_{i=1}^n w_i x_i^* = \sum_{i=1}^n w_i y_i^* + w_j < \sum_{i=1}^n w_i y_i^*.$$

与 x^* 的最优性(使目标函数最大)矛盾. ■

由于对于任何一个至少有一条边的有根树 T , 其节点 i 上有权 w_i . 只可能: (i) 或者存在一个悬挂点 i , $w_i \geq 0$; (ii) 或者存在一个端枝 h 使得其任何一个子代节点 j 均有 $w_j < 0$. 从而, 总能进行如下二个约化运算之一:

约化 1 设 k 是 T 的一个悬挂点, 取

$$T' = T - k, \quad w' = w_{T'}, \quad (6.1)$$

其中 $w_{T'}$ 是 T 上的权函数 w 限制在 T' 上.

约化 2 对 T 的一个端枝 h , 记 L_h 为 h 的所有子代节点的集合. 取

$$T' = T - L_h, \quad w' = w_{T'} + \delta_{hi} \sum_{j \in L_h} w_j \quad (6.2)$$

其中 δ 是 Kronecker 符号.

由此, 即可根据引理 6.1 对 T 上的悬挂点 k , $w_k \geq 0$ 用约化 1, 和根据引理 6.2 对端枝 h , $w_j < 0$, $j \in L_h$, 用约化 2, 将问题化为少一个节点的问题. 如此继续, 直到将 T 变为只有一个节点.

为了由此建立一个线性时间算法, 关键在于将 T 的节点集 N 赋一个线性序. 有二种方式可作到这一点. 即, 深探序 σ 和广探序 λ . 下面, 用 $g(i)$ 表示有根树 T 上节点 i 的代数.

- λ : (i) $g(i) < g(j) \Rightarrow i \lambda j$;
(ii) $g(i) = g(j)$ 且 $i \lambda k \lambda j \Rightarrow g(k) = g(i) = g(j)$.
 σ : (i) $g(i) < g(j) \Rightarrow i \sigma j$;
(ii) $g(i) = g(j)$ 且 $i \sigma j \Rightarrow \forall k, (i, k) \in S, i \sigma k \sigma j$.

其中 S 为序限制的集合. 即 T 的边的集合.

深(广)一算法 将 $T = (N, S)$ 中之节点按线性序 $\sigma(\lambda)$ 给出. 即 $1 \sigma 2 \sigma \dots \sigma n$. 节点 1 为 T 的根.

第一步: For $k := 1$ Step 1 To n Do, Begin $s(k) := w_k, x_k := 0$ End

第二步: For $i := n$ Step -1 To 1 Do, Begin (令 $L_i = \{j \mid (i, j) \in S, s(j) = w_j < 0\}$)

If $L_i \neq \emptyset$ Then $s(i) := s(i) + \sum_{j \in L_i} s(j)$

If $s(i) > 0$ Then $x_i := 1$ End

第三步: For $k := 1$ Step 1 To n Do

Begin If $x_i = 1$ Then Let $x_j := 1$ For $j \in L_i$ End

算法结束时 x 即给出了 $P(T, w)$ 的最优解.

§7 常序的产生和利用

这一节在于讨论并回答如下二个问题:

1. 如何检查出 0—1 规划中一对变量 x_i, x_j , 它们对于所有可行解 $y \in X$, 都有 $y_i < y_j$?

2. 如何检查 0—1 规划中一对变量 x_i, x_j , 它们对于所有最优解 $y^* \in X$, 都有 $y_i^* < y_j^*$?

首先, 虽然我们注意到对于任何一个 0—1 规划问题, 从理论上说, 总存在一种加 $x_i < x_j$ 作为割平面使得等价于某个带序限制的 0—1 规划. 不过, 如何发现这种割平面确是非常

之难的。从算法复杂性上讲就是不能判定是否可多项式阶实现。但, 根据问题的特点加上一些易见又使得最优解保持不变的变量间的序限制作为割平面, 却可使问题变得比较简单。甚至, 使问题由NP的变为P的。

一般地, 如果已知0—1规划中变量 x_i 和 x_j 有关系 $x_i < x_j$, 则常可用它消去变量。例如, 这时就有

$$\begin{aligned} x_i + x_j < 1 &\Rightarrow x_i = 0; \\ x_i + x_j > 1 &\Rightarrow x_j = 1; \\ x_i > x_j &\Rightarrow x_i = x_j. \end{aligned}$$

等等。均可使变量减少。

另外, 序限制的出现还可减少问题的约束条件, 或目标函数的方次。这一点将在§8中介绍。

下面, 先回答上面提出的第一个问题。

基于§4中所讨论的, 研究问题(L)也是具有一般性的。由(4.5), 其解表征是一个布尔函数。因此, 就可利用定理3.2所给出的协调方法求出它的所有素隐子。不巧地, 一般而论, 求一个布尔函数的所有素隐子不能以多项式阶的运算完成。然而, 若只确定长度不超过 k 的所有素隐子。这一方法的计算复杂性为 $O(n(m+n^k)^2)$ 却是多项式的。例如, 如果由此得到素隐子 $x_i \bar{x}_j$, 则由于 $0 < x_i \bar{x}_j < \rho_X(x) = 0$ 必有 $x_i < x_j$ 。实际上, 在确定一个线性不等式所伴随的变量序限制时如下的三个规则是很有用的。设所研究的线性不等式为

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n < b.$$

记 $b^* = b - \sum_{1 \leq j < n} \min(0, a_j)$ 。则, 自然, 当 $b^* \geq \sum_{1 \leq j < n} |a_j|$ 时, 此不等式是多余的。

R1. $b^* < 0 \Rightarrow 1 < 0$, 无解;

R2. $\exists j, |a_j| > b^* \Rightarrow x_j = 0$;

R3. $\exists j_1, j_2, |a_{j_1}| + |a_{j_2}| > b^* \Rightarrow x_{j_1} < \bar{x}_{j_2}$ 。

关于第二个问题的回答, 我们仅以无约束的二次0—1规划为例。

$$(Q) \quad \max x^T Q x; x \in B_1^n. \quad (7.1)$$

其中 $Q = (q_{ij})$ 是一个 $n \times n$ 的对称阵。为此, 我们研究对于 $x_i, x_j, i < j$, 的二阶导数

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} &= f(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, 0, x_{j+1}, \dots, x_n) \\ &\quad - f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, 1, x_{j+1}, \dots, x_n) \\ &= q_{ij} - q_{jj} + 2 \sum_{k \neq i, j} (q_{ik} - q_{jk}) x_k. \end{aligned}$$

可以看出, 对任何 $x \in B_1^n$, 总有

$$\underline{A}_{ij} < \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} < \overline{A}_{ij},$$

其中, $\underline{A}_{ij} = q_{ii} - q_{jj} + 2 \sum_{k \neq i, j} \min(0, q_{ik} - q_{jk})$;

$$\overline{A}_{ij} = q_{ii} - q_{jj} + 2 \sum_{k \neq i, j} \max(0, q_{ik} - q_{jk}).$$

由此, 有如下结果。

定理7.1 对于问题(Q), 总有

$$\Delta_{ij} < 0 \Rightarrow x_i^* < x_j^*, \quad \Delta_{ij} > 0 \Rightarrow x_i^* > x_j^*.$$

其中 $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in B_1^*$ 为 (Q) 的最优解.

§8 拟布尔函数的线性化

对于任何二个变量 $\xi, \eta \in B_1$, 我们知道

$$\xi < \eta \Leftrightarrow \xi \eta = \xi. \quad (8.1)$$

因此, 就使我们提出这样的问题: 对于任何一个非线性拟布尔函数, 加上多少个常序的限制条件才能变为一个线性的拟布尔函数. 仍以二次函数 $f(x) = x^T Q x$ 为例. 在这种情况下, 若 $f(x)$ 有 m 项, 则在变量之间加上 m 个常序限制总是可以办到的.

另一方面, 由序关系的传递性, 具有 n 个变量的二次拟布尔函数 $f(x)$, 用 $n-1$ 个常序限制就可将它变为一个线性函数. 这是因为总可将此 n 个变量安排一个线性序. 综上所述, 即可得下面的引理.

引理8.1 记 $\psi(f)$ 为使 f 变为线性拟布尔函数所需加的常序限制的最小数. 若 f 为具有 n 个变量 m 项的二次拟布尔函数, 则

$$\psi(f) \leq \min(m, m-1). \quad (8.2)$$

令人满意地, 对拟布尔函数 f , 下面我们将会看到不一定是二次的, 均可以有效地确定 $\psi(f)$. 即, 可以建立一个多项式阶的算法.

为简便, 我们还是仅考虑 f 是二次的情况.

首先, 对 f 引进一个无向图 G_f

$= (N, E)$, 其中 $E = \{\{i, j\} \mid q_{ij} \neq 0\}$. 并讨论图 G_f 的性质. 令 F 是 G_f 的一个支撑森. 如果存在对 F 上的边的定向使得在 G_f 中任何一边 $e = \{i, j\} \in E - E(F)$ 都存在 F 上的一条有向路从 i 到 j , 或从 j 到 i . 称 G_f 的这样的有向支撑森 $\vec{F}$ 为它的一个棕. 容易证明, 当 G_f 是连通的, 任何一个深探树都是它的棕. 但, 棕未必是深探树. 如图8.1粗实线所示的棕不是深探树.

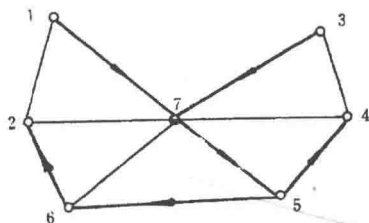


图8.1

引理8.2 任何一个图都有棕.

实际上, 在图的每个连通片上求一个深探树. 所有这些树构成的此图的有向支撑森即为它的一个棕.

对任一图 $G = (V, E)$, 记 $c(G)$ 为它的连通片的数目. 和, 记 $r(G) = V - c(G)$.

引理8.3 任一图 G 的所有棕都有相同的数目的边. 且, 这个数目就是 $r(G)$.

因为棕是森, 和图的所有支撑森的边数是常数, 即 $r(G)$. 故上述引理成立.

定理8.1 对于任何二次拟布尔函数 f , 由它所确定的图 G_f , 总有