俄罗斯数学精品译丛

"十二五"国家重点图书

Mathematics Analysis Courses

数学解析教程(下卷)1

[苏]别尔曼特 著 · 张理京 译

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

数学解析教程（下卷）①

Mathematics Analysis Courses

[苏]别尔曼特 著

张理京 译

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书主要介绍了多变量函数及其微分法，微分法的应用，重积分及累次积分法，书中配有相关例题以供读者学习理解. 本书语言简洁，内容丰富，讲解详细，题型多样.

本书适合大学师生及数学爱好者参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

数学解析教程. 下卷. 1/(苏)别尔曼特著；张理京译. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2017. 6

ISBN 978-7-5603-6582-4

Ⅰ. ①数…　Ⅱ. ①别…　②张…　Ⅲ. ①数学分析-教材　Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 088266 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　穆　青
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　787mm × 1092mm　1/16　印张 15.25　字数 289 千字
版　　次　2017 年 6 月第 1 版　2017 年 6 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-6582-4
定　　价　48.00 元

◎ 原序

在这第六版中，本书经过相当多的修订，其首要目的是使本书能完全适合苏联高等教育部所颁布的高等工业学校新教学大纲(1950年).

修订时著者面前摆着下列三项总的任务：

1)把属于哲学方法论上的以及属于历史性的知识放到教程里面去；

2)讲解一些为每个工程师所必需的知识，即关于近似计算法及实际计算以及关于帮助作那些计算所用的计算机；

3)从教学法方面来改进教本，并参照几年来的教学经验，克服教本上所发现的缺点.

著者在引论里面要简略讲到数学的起源问题，讲到数学的重要任务，讲到理论与实践间的相互关系，讲到俄罗斯伟大数学家(欧拉·罗马契夫斯基，切比雪夫)以及其他杰出学者与大工程教学家(如茹科夫斯基，恰普雷金，克雷洛夫)在科学与工程发展史上的地位.

在预篇里，特别有一节讲近似计算法中的初等问题. 本书后面处处尽可能讲到如何把理论应用到数值计算问题上. 因此关于微分概念、有限增量公式、泰勒公式与级数等，对于各种近似值计算法的应用就讲得相当多一些. 书中加了几小节关于普

通方程的近似解法，函数的图解微分与积分法以及微分方程的近似积分法等．此外，著者还设法让读者认识一些重要的自动计算机及计算仪器（迄今所知，这在教科书性质的文献上还是个创举），在预篇的 §3 中要叙述那些处理各个数据的计算机，并且在本书后面适当的地方还要讲那些处理连续数据的仪器（积分制图器，测面器，积分计，测长计，微分及谐量分析器）．

但在添加这些材料时，著者会避免把技术上的细节讲得太多，只能让读者去参考关于这方面的现有专门书籍以及每件仪器上通常都附有的说明书．著者只打算使读者对那些帮助作繁复运算的机械工具，了解一些大概．

现代科学与工程实践上的创造性工作都需要具有极高的数学知识，并且这不仅是指能够搬运公式，而主要的乃是需了解数学解析中各种概念与运算的本质．因此如何克服那个在数学中易陷入的以及在实际教学工作中易犯的“公式主义”，如何克服那随之而来的对数学解析的肤浅学习，乃是我们最重大与主要的问题．著者认为如果按下列程序来拟教材结构的话，就可能正确地解决这个问题，这个程序是：实践—解析的基本概念—这些概念的性质（理论）—计算方法—用法—实践．著者在这全部教程内一贯按这种程序来讲解，那样才可能指出数学与实践的联系．揭露其中一些基本概念的物质根源，并说明在解决具体的物理与技术问题时如何应用数学理论的明显原则．在所有这些要求下，著者当然有责任把本书中的每一部分弄得尽可能易于了解．

从讲解方面来改进本书的路线，是根据著者自身的经验以及用过本书的教授和教师们的许多意见得来的．首先，著者设法把长的以及繁复的一些讨论分成几段．其次，著者在内容方面重新做了各种穿插与编排，使教本的结构更有层次并且更加简单．

莫斯科航空学院高等数学教研组在总结对于本书初稿的讨论中，表明他们的希望，认为可以将有关定积分与不定积分的材料予以改编，以便毫无困难地按照任意次序进行这部分材料的讲授，先讲定积分后讲不定积分，或者颠倒来讲都行．有些工学院里讲这几章时宁愿先讲不定积分，著者考虑到他们的愿望，因此也就做了这种改编，最后，本书的全部材料都经重新仔细校阅过并且重写过．

除了上面所讲的以外，本书在各章节上还有如下的一些最重要的改动：

第 2 章中，加上均匀连续性概念，并证明了基本初等函数的连续性．第 3 章中，把微分概念放在全部微分法之后再讲，并加上莱布尼兹公式．第 4 章几乎所有各部分都重编过，里面提出了近似多项式问题，讨论了切比雪夫线性近似式（以及与零相差最小的切比雪夫多项式），讲解了曲线的接触度问题，然后引出曲率概念．在第 6 章中，叙述了奥氏（奥斯特罗格拉德斯基 M. B. Остроградский）的有理分式积分法．第 7 章是新添的，讲直接应用于计算定积

分的积分方法，讲（数值计算的及图解的）近似积分法及旁义积分，并且关于后者的理论大为增加，这一章可以在依照第 5 章、第 6 章的次序讲完后再讲，也可以在依照第 6 章、第 5 章的次序讲完后再讲. 我们又把级数论（三角级数除外）作为第 9 章，其中添入级数的运算法则，扩充了关于幂级数应用问题的材料，补充了一些复数的四则运算法及复平面上的幂级数. 第 10 章中搜集了多变量函数的导数及微分概念以及偏微分法的材料，第 11 章讲微分学的下列应用：在对于所有关于函数的研究，在矢量解析及几何上的应用，其中最后几小节的材料增加得相当多. 第 13 章中把关于场论（势，流及环流）的问题合并成一大节，这可以算是矢量解析的积分部分. 而第 11 章 §2 中的材料则可作为矢量解析的微分部分（梯度，散度及旋度）. 在第 15 章中，我们导出了逐段光滑函数展开为傅里叶级数的充分条件，并叙述了具有有限个间断点及极值点的函数展开为这种级数的类似条件，此外又讲了克雷洛夫使级数收敛性加快的方法.

适用于这新订本的别尔曼特（А. Ф. Бермант）习题汇集也已修订（下略）.

◎ 目录

多变量函数及其微分法

第 10 章

本章讲双变量及多变量函数的基本定义及最简单的分类法、它们的几何意义以及初等研究法，然后讲偏导数、偏微分、方向导数等概念及多变量函数的微分法，最后一节讲多变量函数的高阶微分.

把多变量函数一律看作是多维（多度）空间内动点的函数，这种观点我们在本章内特别予以注意.

本章内的讨论几乎全部是就双变量函数来说的，因为关于多变量函数的相应讨论照例是完全类似于双变量函数的.

§1 多变量函数

151. 定义

两个变量的每一对所考虑的数值对应着另一个变量的一个或几个数值，则第三个变量叫作前两个变量的函数.

可以任意变动的那两个变量（它们的值可由我们随意指定）叫作自变量（或宗标）.

例如矩形的面积 s 乃是两个互不依从的变量——矩形的两边 a 及 b——的函数. 这函数的表达式如下

$$s = ab$$

理想气体的容积 v 是其压力 p 及温度 T 的函数. v 的表达式可自含有 v,p 及 T 三者的克拉佩隆（Clapeyron）方程求出

$$v = \frac{RT}{p} \quad (R = \text{const})$$

给出两个变量的函数的意思，是指出自变量所取得的各对数值的全体，并指出用来从已给宗标值求得其所对应的函数值的方法. 与单变量函数的情形一样，表示双变量函数的最

重要方法有表格法、解析法(用公式)及图形法.

用表格表示时,函数是这样简单地规定的:给某几对自变量值指出其对应的函数值. 例如可按下法来作. 设 x 及 y 代表自变量,而 z 代表函数. 我们在方格表的上面写出一行自变量之一(如 x)的数值,在方格表左边的第一列写出另一自变量(如 y)的数值,然后每一格里写出其同列的 x 值及同行的 y 值所对应的函数 z 的数值(一个或几个).

例如,在螺旋传动中,效率 $\eta(z=\eta)$ 取决于摩擦系数 $\mu(y=\mu)$ 及螺旋角 α $(x=\alpha)$. 这依从关系可用下表给出(见 Берлов 著《机械零件》):

μ \ α	$\frac{\pi}{36}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{5\pi}{36}$
0.01	0.897	0.945	0.961	0.970	0.974
0.02	0.812	0.895	0.925	0.941	0.950
0.03	0.743	0.850	0.892	0.914	0.927
0.04	0.683	0.809	0.861	0.888	0.904
0.05	0.633	0.772	0.831	0.863	0.882

给出双变量函数的表格叫作复式表格.

双变量函数的表格表示法也与单变量函数的一样,是不完备的,因为可能所要的宗标值是表内所没有的.

与单变量函数的情形一样,双变量函数的最重要的表示法是解析表示法或公式表示法(双变量函数的图形表示法在 $n°153$ 中再讲).

函数的解析表示法中,指出了自变量值与其对应函数值之间的数学运算关系及各种数学运算的先后次序,换言之,它给出含三个变量的一个公式(见第 1 章 $n°15$).

例如,下列每个公式

$$z=ax+by+c,\quad z=\frac{xy}{x^2+y^2},\quad z=\frac{\sin(2x+3y)}{\sqrt{1+(x-y)^2}}$$

把 z 表示成 x 及 y 的完全确定的函数.

数学解析的一切处理方法,正就是实际适用于函数的解析表示式的.

任意个自变量的函数的定义完全与双变量函数类似.

n 个自变量的每一批所考虑的 n 个值对应着另一变量的一个或几个值,则最后那个变量称为前面 n 个自变量的函数.

例如,长方体的体积 v 是三个独立变量——长方体的侧棱 a,b,c——的函数

$$v=abc$$

电流所产生的热量 Q 取决于电压 E、电流强度 I 及时间 t,而这些量之间的

函数关系由下面的公式给出

$$Q=0.24IEt$$

n 个自变量的函数也可以用表格给出，但在 $n=3$ 时用表格法给出已经非常麻烦. n 个变量的函数的解析表示法是在给出的公式中，指明连接函数值本身与其对应的 n 个自变量值之间所用的数学运算及其先后次序.

例如，下列每个方程

$$u=ax+by+cz+d,u=\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$$

把 u 表示为 x,y,z 的某些完全确定的函数.

我们以后只研究用解析法表示的函数.

最后应该注意的是：在必要时，常量可以看作是任意个自变量的函数. 这种函数对于每一批自变量的值来说都保持同一数值.

152. 函数的记号及函数的分类

要表示 z 是变量 x 及 y 的函数时，写成

$$z=f(x,y)$$

读作：z 是 x 及 y 的函数或者 z 是"哎夫"x,y. 除了字母 f 以外也可用其他任何字母（$\varphi,F,\Phi,\psi,\cdots$）来作为函数记号.

同样，要表示 u 是 $x,y,z,t,\cdots$ 的函数时，可写成

$$u=f(x,y,z,t,\cdots)$$

在函数记号的括弧里面指出了所有的自变量，所给函数是取决于它们的.

如果所论函数 z 用解析法表示，那么 $f(x,y)$ 代表 x,y 及常量由数学运算记号及已知函数记号所组成的式子.

就函数 $z=f(x,y)$ 来说，对应于自变量的某一对确定数值的函数值叫作该函数的特定值. 设 $x=a$ 及 $y=b$ 时，函数 z 等于 c，可写成下面的等式

$$c=f(a,b)$$

如果让自变量之一，例如 x，保持常数值 $x=a$，而另一自变量 y 仍算作是可变的，那么函数 $z=f(x,y)$ 就变成一个变量 y 的函数

$$z=f(a,y)$$

同样若使 y 保持常数值 $y=b$，则得一个变量 x 的函数

$$z=f(x,b)$$

若双变量函数的每一对所考虑的宗标值对应于一个函数值时，那种双变量函数叫作单值的；若某一对宗标值所对应的函数值多于一个时，函数叫作多值的.

例如，下列两个函数

$$z=ax+by+c,z=e^{xy}\sin(x+y)$$

是单值的,而函数

$$z=\sqrt{x^2+y^2},z=\arcsin(x-y)$$

是多值的,并且其中第一个是双值函数,第二个是无限多值函数.

以后我们只讨论单值函数,不再另外声明.在定义函数的解析式子有多值性的情形下,运用数学解析法时,都必须特别选择该函数的单值分支.

与单变量函数一样,多变量函数也常可看作自变量的复合函数.设 u 是宗标 $t,v,w,\cdots$ 的函数

$$u=\varphi(t,v,w,\cdots)$$

而 $t,v,w,\cdots$ 本身又是自变量 $x,y,z,\cdots$ 的函数

$$t=\psi(x,y,z,\cdots),v=\xi(x,y,z,\cdots),w=\eta(x,y,z,\cdots),\cdots$$

于是 u 是自变量 $x,y,z,\cdots$ 的函数.它是由一连串函数所构成的(串联给出法).函数

$$u=\varphi[\psi(x,y,z,\cdots),\xi(x,y,z,\cdots),\eta(x,y,z,\cdots),\cdots]=F(x,y,z,\cdots)$$

叫作自变量 $x,y,z,\cdots$ 的复合函数(函数的函数).例如

$$z=e^t\sin v$$

其中

$$t=xy,v=x+y$$

z 就是两个自变量 x 及 y 的复合函数.

自变量 $x,y,\cdots$ 的复合函数,可以通过不止一个而有两个或更多个中间环节表示出来.例如若 u 取决于变量 $t,v,\cdots$,而 $t,v,\cdots$ 用变量 $\tau,\nu,\cdots$ 的函数给出,其中 $\tau,\nu,\cdots$ 本身又是自变量 $x,y,\cdots$ 的函数,那么 u 是通过两个中间环节(两组宗标 $t,v,\cdots$ 及 $\tau,\nu,\cdots$)而给出的自变量 $x,y,\cdots$ 的复合(链式)函数.

用 n 个中间宗标直接表达出来的复合函数,事实上可能是 m 个($m\neq n$)自变量的函数.例如,双变量函数

$$z=f(u,v)$$

的宗标 u 及 v 为自变量 x 的函数时

$$u=\varphi(x),v=\psi(x)$$

则 z 就是单个自变量 x 的复合函数

$$z=f(\varphi(x),\psi(x))=F(x)$$

在数学解析及其应用上所遇到的复合函数中,作为中间环节的函数常常是自变量的基本初等函数.

若多变量函数的数值可以从自变量及任意常数用有限次代数运算求出时,这种多变量函数叫作代数函数$\left(\text{例如}:z=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x^2-y^2+1}\right)$.多变量的代数函数也可以仿照单变量的代数函数那样来作一般定义(见第 1 章 n°18).

当代数函数的值可用自变量及任意常数间的加、减、乘、除,及整数次乘幂求得时,这种代数函数叫作有理函数$\left(\text{例如}:z=\dfrac{3x^2-5xy+1}{x^2y-y^2-1}\right)$. 除此以外的代数函数叫作无理函数. 当有理函数中施行于自变量的各种运算不包括除法时,这种有理函数叫作整函数或多项式(例如:$z=3x^3y-5x^2y^2-y^3+xy-1$). 一次多项式或线性函数由于其简单性,所以特别重要,这就是能写成下列形式的函数

$$z=ax+by+c, u=ax+by+cz+d,\cdots$$

($a,b,c,\cdots$是常量,$x,y,\cdots$是自变量).

若我们只对多变量函数的某一个或某一组变量来说,则该函数的类别仅看所论那个变量或那组变量的运算性质而定. 例如函数

$$z=3x^2\mathrm{e}^y-2x\sin y+y^2$$

是x的多项式,但对y来说,它是一个非代数函数,把它当作x及y两者的函数来看时,它也是一个非代数函数.

153. 多变量函数的几何意义

表示单变量函数的几何意义时,我们用备有直角坐标系的平面. 要相仿地表示双变量函数的几何意义时,我们显然必须利用空间. 因为定义双变量函数的方程中含有三个变量,而要表示三个变量就得用空间坐标系中的三个坐标轴. 我们以后要用一般解析几何学中的空间直角坐标系(图1).

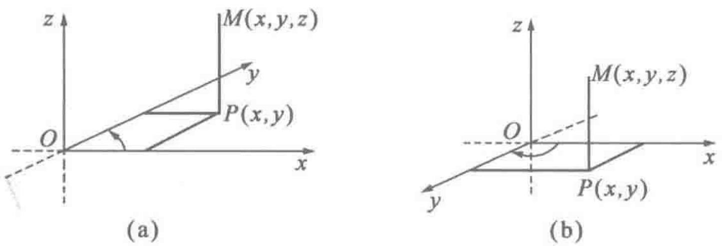

图1

但这里必须说明一件重要的事. 这是由于空间(如同在平面内一样)有两种根本不同的直角坐标系. 这两种坐标系中坐标轴具有彼此不同的指向(相对方向). 在图1(a)中的是右手坐标系,图1(b)中的是左手坐标系. 在右手坐标系中,如果我们按照Oz轴的正方向站着,那么当正半段Ox轴循最短途径转到正半段Oy轴的位置上时,其所循转动方向与顺时针的转动方向相反. 在左手坐标系中,这转动方向就与顺时针的转动方向相同. 如果拿手上的大拇指、食指、中指依次作为Ox,Oy,Oz轴,那么右手的这三个指头就形成右手坐标系,左手的三个指头就形成左手坐标系. 我们还可以拿一个实例来说明:如果把坐标系从Ox轴(循最短途径)转到Oy轴的过程中,同时再把它朝Oz轴正方向推

进，那么右手坐标系就会形成右螺旋动作（右旋螺丝），而左手坐标系就会形成左螺旋动作（左旋螺丝）. 右螺旋动作可以拿右旋开瓶塞钻的动作当作例子，我们知道要右旋开瓶塞钻钻到塞子里面去时，必须把它朝右旋转，同样要把左旋开瓶塞钻钻到塞子里去时，必须把它朝左旋转，这种动作可以作为左螺旋动作的例子. Ox, Oy, Oz 三轴为任意方向时所成的坐标系，只要绕原点 O 旋转（并加以平移）后，就能与两种坐标系（右手的或左手的）之一相重合. 不过我们却不能靠这种变换动作使右手坐标系与左手坐标系两者彼此重合.

在数学解析及解析几何的许多问题中，不管用哪一种（右手的或左手的）坐标系都没有关系，但在有些问题中，由所选坐标系定出的空间指向，是很重要的. 因为一般用的平面坐标系是右手系（从平面上看），所以空间坐标也取右手系，并且为了使作出的图更加清楚起见，我们常把图 1(a) 中的右手坐标系绕 Oz 轴旋转 90°（图 2），使图纸的平面与平面 yOz 相合.

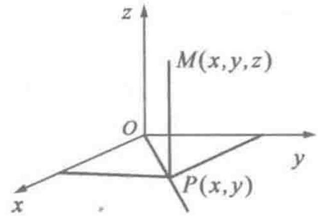

图 2

设已给两个自变量 x 及 y 的函数 z，则凡横坐标及纵坐标各等于自变量值 x 及 y，而竖坐标等于对应函数值 z 的各点，其几何轨迹叫作双变量函数的几何形状或双变量函数的图形. 自变量 x 及 y 的每一对数值在平面 xOy 上定出一点 $P(x,y)$，在点 P 处所作垂直于平面 xOy 且表示函数值的直线的端点，乃是表示一对自双量值及函数值三者的点 $M(x,y,z)$（图 2）. 对应于一切可能的 (x,y) 值（换言之，对应于平面 xOy 上点 P 的一切可能位置）的空间中所有这种点 M 的全体，形成了函数的几何图形. 在通常情况下，这几何图形是某个曲面.

反过来说，在备有坐标系的空间中给出曲面之后，就建立了两个自变量 x 及 y 的某一函数 z. 因为，这曲面上点的竖坐标可由其横坐标及纵坐标来决定，也就是说，曲面上点的竖坐标是横坐标及纵坐标的函数. 所以，双变量函数的图形表示法是由在备有坐标系的空间中给出曲面来实现的.

如果函数用解析式

$$z=f(x,y)$$

来表示，那么代表该函数的曲面上的点显然能满足这等式，于是可知，这式子便是曲面的方程. 反过来说，每个曲面的方程可以把竖坐标 z 表示成为横坐标 x

及纵坐标 y 的某个函数.

例如,函数

$$z=\frac{c}{ab}\sqrt{a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2}$$

的图形是椭球面(图 3),其中心在原点,半轴长为 a,b,c,且各位于 Ox,Oy,Oz 轴上,因为关系式

$$z=\frac{c}{ab}\sqrt{a^2b^2-b^2x^2-a^2y^2}\quad\left(\text{或}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\right)$$

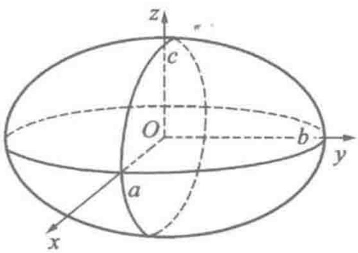

图 3

就是这椭球面的方程.

函数

$$z=x^2+y^2$$

表示旋转抛物面(图 4),因这抛物面的方程是 $z=x^2+y^2$.

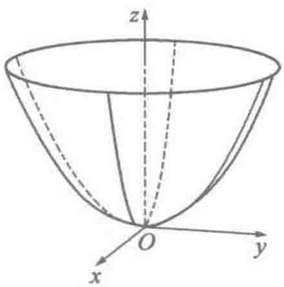

图 4

线性函数

$$z=ax+by+c$$

表示平面,特别是对应于方程

$$z=c\quad(c\text{ 为常数})$$

的乃是平行于坐标面 xOy 的平面.

所以,正如单变量函数与平面曲线之间的关系一样,双变量函数与空间曲面之间也有互相对应关系:每个函数可用某个曲面表示,每个曲面定出某个

函数.

显然,函数的单值性在几何上表示为:垂直于平面 xOy 的任一直线与表示函数的曲面相交不多于一点.

根据上面所讲关于双变量函数的几何表示法,可以给出多变量函数的同样的几何意义. 以单变量函数

$$y=f(x)$$

来说,它的自变量可用在直线(自变量轴)上变动的点 $P(x)$ 来表示,而函数 y 可用在点 P 处垂直于自变量轴的一段直线来表示.

在双变量函数

$$z=f(x,y)$$

的情形下,两个宗标 x 及 y 的全体也可以用点 $P(x,y)$ 来表示,不过这时的点 $P(x,y)$ 已在平面(自变量平面)上变动,而函数 z 则可用在点 P 处垂直于该平面的一段直线来表示.

由此可见,在以上两种情形下,我们都可以把函数看作是点 P 的函数

$$y=f(P),z=f(P)$$

不过在第一种情形下的点 P(函数的宗标)只在直线上变动,而在第二种情形下的点 P 在平面上变动.

一般来说,如果点 P 的每个所考虑的位置对应着一个量的确定值,该量就叫作动点 P 的函数.

三个自变量的函数也可以看作是动点 $P(x,y,z)$ 的函数,不过这时的点在三维空间(通常空间)内变动

$$u=f(P)=f(x,y,z)$$

讲到这种函数的几何表示法时,那么仿照单变量函数与双变量函数的说法,就必须要有四维空间才行. 讲到四维空间,我们在这里应该理解为 x,y,z 及 u 四者一切可能值的总体. 而这四维空间内的点无非就是包括 x_0,y_0,z_0,u_0 四者的某一批数:$M(x_0,y_0,z_0,u_0)$. 于是三维空间内点 $P(x,y,z)$(函数的宗标)的每一所论位置就对应着四维空间内的一点 $M(x,y,z,u)$,而该点 M 则表示三个宗标值及其对应函数值四者的总体.

对于四个自变量、五个自变量的函数及一般任意个自变量的函数来说,情形也相类似.

n 个自变量 $x,y,z,\cdots,t$ 的函数 u 是 n 维空间内的动点 P 的函数

$$u=f(P)=f(x,y,z,\cdots,t)$$

不过即使就双变量函数来说,已经由于我们对于空间直观能力的限制与不可能描出空间,而不易直接应用双变量函数的几何意义,所以我们研究双变量或多变量函数时,通常总想把它化成单变量函数的研究(见 $n°158$).

设已给函数

$$z=f(x,y)$$

假定自变量之一(如 x)保持不变:$x=a$. 这样就限制了点 $P(x,y)$ 的自由变动——点 $P(x,y)$ 只可能在平面 xOy 上的直线 $x=a$ 上移动. 于是得单变量函数

$$z=f(P)=f(a,y)$$

条件 $x=a$ 在几何上的意义是:表示函数 $z=f(x,y)$ 的曲面 S 被平面 $x=a$ 所截,假定这时在截面上得一平面曲线 AB(图 5). 等式

$$z=f(a,y)$$

是曲线 AB 在平面 yOz 上正投影的方程,也就是,这正投影是函数 $z=f(a,y)$ 的图形.

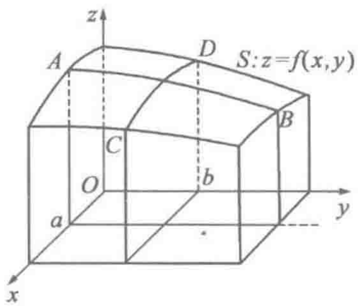

图 5

同样,函数

$$z=f(P)=f(x,b)$$

的宗标 P 只能在平面 xOy 上的直线 $y=b$ 上移动. 如果曲面 S 与平面 $y=b$ 截成的平面曲线是 CD(图 5),那么单变量函数

$$z=f(x,b)$$

的图形就是曲线 CD 在平面 xOz 上的正投影.

§2 函数的最简研究

154. 函数的定义域

如果平面 xOy 上的点 $P(x,y)$(也就是说,一对数值 x,y)按某种法则对应着函数 z 的值,那么我们说函数

$$z=f(x,y)$$

在点 $P(x,y)$ 处有定义. 平面 xOy 上凡是使函数有定义的一切点的整体称为该

函数的定义域. 双变量函数的定义域当然可能是平面上的任何一批点,但是我们所考虑的函数大多定义在一条或数条曲线所围成的平面的某部分上(在该部分平面内的个别点或个别线上,函数可能没有定义).

凡是由一条或数条曲线所围成的一部分平面,不管它是闭合的或是延展到无穷远处的都叫作域①,域的界线叫作它的边界.

如果域与边界一起考虑,这种域叫闭域;如果边界不包括在域内,这种域叫开域(在无须区别这两种情形的问题里,我们只说域).

如同在自变量轴上的区间可用不等式表示的情形一样,平面上的域可用一个或几个不等式来定出.

举例:

1)以各边在直线

$$x=a, x=b, y=c, y=d$$

上的矩形(图6)来说,这矩形所围成的域 D 可用下列不等式定出

$$a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d \quad (\text{闭域})$$

或

$$a<x<b, c<y<d \quad (\text{开域})$$

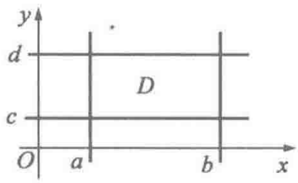

图6

因为位于域 D 上的任一点的坐标满足这些不等式,反过来说,满足这些不等式的任何两个数 x 及 y 乃是域 D 上某点的坐标.

2)设域 D 以中心在原点且半径等于 r 的圆周为界,则域 D 可用下列不等式定出

$$x^2+y^2\leqslant r^2 \quad (\text{闭域})$$

$$x^2+y^2<r^2 \quad (\text{开域})$$

位于第一象限内的那部分圆,可用如下的一组不等式给出

$$x^2+y^2\leqslant r^2 \quad (x\geqslant 0, y\geqslant 0)$$

或

① 在近世点集论(及函数论)中,域的概念具有更精确的意义.