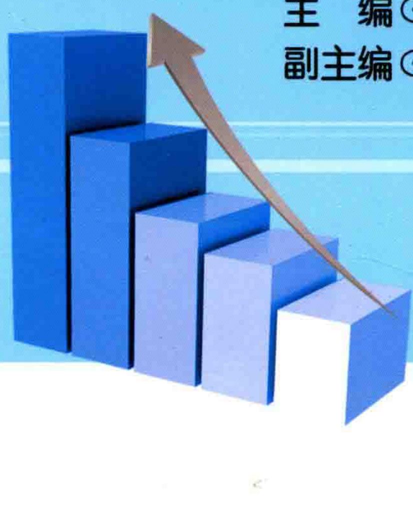
普通高等教育精品教材

概率论与数理统计

学习指导与习题集

主　编⊙陈江彬
副主编⊙沈金良　曾怀杰　方侃



上海交通大學出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

普通高等教育精品教材

概率论与数理统计学习指导与习题集

主　编　陈江彬

副主编　沈金良　曾怀杰　方　俐

上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书是与《概率论与数理统计》教材相配套的学习指导与习题集，全书分三大模块，第一模块为《概率论与数理统计》重点及难点、典型例题解析；第二模块为模拟试卷；第三模块为课后习题.

本书按照学校建设“应用技术型”大学的要求，以及教育部教学指导委员会对《概率论与数理统计》课程的要求，对复杂的理论知识进行处理，在通俗易懂、重在应用和模块编排上下功夫. 在介绍基本理论、基本方法和重要定理之后，通过模拟试卷和课后习题及时巩固所学知识，提高读者运用数学知识和技能分析问题和解决问题的能力.

本书可作为高等学校工科、理科（非数学专业）、经管类各专业的教材以及研究生入学考试的参考书，也可供工程技术人员、科技工作者参考.

图书在版编目（C I P）数据

概率论与数理统计学习指导与习题集 / 陈江彬主编
. -- 上海 : 上海交通大学出版社, 2017
ISBN 978-7-313-13375-5

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①陈… Ⅲ. ①概率论－高等学校－教学参考资料②数理统计－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 013117 号

概率论与数理统计学习指导与习题集

主　　编：陈江彬
出版发行：上海交通大学出版社　　地　　址：上海市番禺路 951 号
邮政编码：200030　　电　　话：021-64071208
出 版 人：郑益慧
印　　制：北京谊兴印刷有限公司　　经　　销：全国新华书店
开　　本：787mm×1092mm　1/16　　印　　张：14.75　　字　　数：234 千字
版　　次：2017 年 2 月第 1 版　　印　　次：2017 年 2 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-313-13375-5/O
定　　价：35.60 元

前　言

“概率论与数理统计”是高等院校理工类和经管类本科各专业的一门重要基础课程，具有不可替代的重要地位. 本书在遵循数学学科教育教学规律的同时，围绕经济社会发展的实际需要，为适应当前应用技术型大学的高等数学教学改革，以及培养科学精神和人文素养兼备的应用型专门人才而编写.

本书在编写过程中，力求体现以下特色：

1．**简洁易懂**

具体内容的编写力求简洁易懂，特别是对数学知识点的阐述和归纳，以及例题的选取均采用由易到难的顺序，使读者能循序渐进地掌握. 对各章节知识点的归纳和教学应用部分覆盖概率论的各个方面，理工类和经管类学生都适用，鼓励读者跨专业全面发展，扩大知识面.

2．**重在应用和模块编排**

本书根据高等院校理工类、经管类学生的特点，对全书的内容进行了严格的选择和合理的安排。全书分为三大模块，第一模块为重点及难点、典型例题解析；第二模块为模拟试卷；第三模块为课后习题.

- **第一模块**：在“重点及难点”中，我们将所要掌握的主要内容归纳出来，方便学生对这些重要内容的掌握. 在“典型例题解析”中，我们对一些比较典型的题型进行详细解释与分析，将课本中缺少的题型补全，以便学生学习时对题型的融会贯通；并且加入了部分历年考研真题的分析与讲解，加强学生对知识的综合把握，同时也让学生提前接触和了解考研题型.
- **第二模块**：汇总历年期末考试题，方便学生归纳考点，复习备考.
- **第三模块**：针对每节课程内容都设置了课后习题，配合各个章节的知识点，覆盖面广且从易到难、循序渐进，兼顾文、理科学生课后巩固知识的需要，让读者在每次课后自行思考、解题，以达到对问题更深刻和更透彻理解的目的.

本书由陈江彬担任主编，由沈金良、曾怀杰、方侃担任副主编. 本书第 1，2 章由方侃执笔；第 3，6 章由沈金良执笔；第 4，5 章由曾怀杰执笔；第 7，8，9 章由陈江彬执笔.

由于编者水平有限，书中存在的疏漏之处，敬请广大读者批评指正.

目　录

第一章　随机事件及概率……1
第一节　样本空间与随机事件……1
第二节　随机事件的概率……3
第三节　条件概率……5
第四节　事件的独立性……9
第二章　随机变量及其分布……13
第一节　随机变量及其分布函数……13
第二节　离散型随机变量及其概率分布……14
第三节　连续型随机变量及其概率分布……18
第四节　随机变量函数的概率分布……22
第三章　多维随机变量及其分布……25
第一节　二维随机变量及其分布……25
第二节　二维随机变量的边缘分布与独立性……28
第三节　二维随机变量的条件分布……33
第四节　二维随机变量函数的分布……36
第四章　随机变量的数学特征……42
第一节　数学期望……42
第二节　方差……44
第三节　协方差与相关系数……48
第五章　大数定律及中心极限定理……50
第一节　大数定律……50
第二节　中心极限定理……51
第六章　数理统计的基本概念……54
第一节　总体与随机样本……54
第二节　统计量与样本函数……54
第三节　抽样分布……55

第七章　参数估计 ······ 60
第一节　点估计 ······ 60
第二节　估计量的评价标准 ······ 64
第三节　区间估计 ······ 66
第四节　正态总体均值与方差的区间估计 ······ 66
第五节　单侧置信区间 ······ 70

第八章　假设检验 ······ 71
第一节　假设检验基本概念 ······ 71
第二节　总体平均值的假设检验 ······ 73
第三节　总体方差的假设检验 ······ 75

第九章　一元线性回归分析 ······ 78
第一节　一元线性回归分析 ······ 78
第二节　可线性化的非线性回归 ······ 80

模拟试卷 ······ 82
《概率论与数理统计》期末考试模拟试卷（1） ······ 82
《概率论与数理统计》期末考试模拟试卷（2） ······ 87
《概率论与数理统计》期末考试模拟试卷（3） ······ 92
《概率论与数理统计》期末考试模拟试卷（4） ······ 97
《概率论与数理统计》期末考试模拟试卷（5） ······ 102
《概率论与数理统计》期末考试模拟试卷（6） ······ 107
《概率论与数理统计》期末考试模拟试卷（7） ······ 112
《概率论与数理统计》期末考试模拟试卷（8） ······ 117
《概率论与数理统计》期末考试模拟试卷（9） ······ 123
《概率论与数理统计》期末考试模拟试卷（10） ······ 129

课后习题 ······ 135
《概率论与数理统计》习题集　第一章　随机事件及概率 ······ 135
§1.1　样本空间与随机事件 ······ 135
§1.2　随机事件的概率（一） ······ 139
§1.3　随机事件的概率（二） ······ 141
§1.4　条件概率 ······ 143
§1.5　事件的独立性 ······ 147
习题课 ······ 149

《概率论与数理统计》习题集　第二章　随机变量及其分布 ······ 153
§2.1　随机变量及其分布函数 ······ 153
§2.2　离散型随机变量及其概率分布 ······ 155
§2.3　连续型随机变量及其概率分布 ······ 159
§2.4　随机变量函数的概率分布 ······ 163
习题课 ······ 167
《概率论与数理统计》习题集　第三章　多维随机变量及其分布 ······ 171
§3.1　二维随机变量及其分布 ······ 171
§3.2　二维随机变量的边缘分布与独立性 ······ 173
§3.3　二维随机变量的条件分布 ······ 177
§3.4　二维随机变量函数的分布 ······ 179
习题课 ······ 183
《概率论与数理统计》习题集　第四章　随机变量的数字特征 ······ 187
§4.1　数学期望 ······ 187
§4.2　方差 ······ 191
§4.3　协方差与相关系数 ······ 195
习题课 ······ 197
《概率论与数理统计》习题集　第五章　大数定律及中心极限定理 ······ 199
§5.1　大数定律与中心极限定理 ······ 199
习题课 ······ 203
《概率论与数理统计》习题集　第六章　数理统计的基本概念 ······ 205
§6.1　总体 样本 统计量 ······ 205
习题课 ······ 209
《概率论与数理统计》习题集　第七章　参数估计 ······ 211
§7.1　点估计 ······ 211
§7.2　估计量与区间估计 ······ 213
习题课 ······ 217
《概率论与数理统计》习题集　第八章　假设检验 ······ 219
§8.1　假设检验 ······ 219
习题课 ······ 221
《概率论与数理统计》习题集　第九章　一元线性回归分析 ······ 223
§9.1　一元线性回归分析 ······ 223
习题课 ······ 225

第一章　随机事件及概率

第一节　样本空间与随机事件

一、重点及难点

1. 随机试验

为了研究实际现象，对客观事物进行的观察或试验，称为**随机试验**，简称试验，记作 E.

2. 样本空间

随机试验 E 每一种可能发生的结果称为一个**样本点**，记为 ω. 随机试验 E 的所有可能的结果组成的集合称为**样本空间**.

3. 随机现象和随机事件

可能发生也可能不发生的现象称为**随机现象**. 例如，明天是雨天.

在随机试验中，可能出现或可能不出现的试验结果称为**随机事件**，简称事件，用大写字母 $A, B, C, \cdots$ 表示.

4. 事件间的关系与运算

（1）**事件的包含与相等**　如果事件 A 发生必然事件 B 也发生，则称事件 A 包含于 B，或者 B 包含 A，记作 $A \subset B$. 如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则称 A 与 B 相等，记作 $A = B$.

（2）**事件的积**　如果事件 A 与 B 同时发生，则称做事件 A 与 B 的交，记作 $A \cap B$.

（3）**事件的并**　如果事件 A 与 B 至少有一个发生，则称做事件 A 与 B 的并，记作 $A \cup B$.

（4）**事件的互不相容**　如果事件 A 与 B 不能同时发生，则称做事件 A 与 B 互不相容，记作 $AB = \varnothing$.

（5）**事件的对立**　事件 A 不发生，这一事件称为 A 的对立事件（或逆事件），记作 $\overline{A}$. 显然，对立事件满足 $A \cup \overline{A} = \Omega, A \cap \overline{A} = \varnothing$.

（6）**事件的差** 如果事件 A 发生而 B 不发生，则称做事件 A 与 B 的差，记作 $A-B$ 或者 $A\overline{B}$.

5. 事件的运算规律

（1）交换律 $A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$.

（2）结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

（3）分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

（4）对偶律 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

二、典型例题解析

例 1 投掷一颗是骰子，设 $A=$ “出现点数不超过 3”，则称 A 为（　　）.

A. 不可能事件　　B. 基本事件　　C. 必然事件　　D. 随机事件

解 D

例 2 设 A,B 是样本空间 S 中的随机事件，则 $(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})$ 表示（　　）.

A. 不可能事件　　B. A,B 恰有一个发生

C. 必然事件　　D. A,B 不同时发生

思路探索 根据集合运算的性质，$(A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})=\varnothing\cup(A\overline{B})\cup(B\overline{A})\cup\varnothing$，它表示 A 发生且 B 不发生，或者 B 发生且 A 不发生，故应该选 B.

例 3 设 A,B 是两个随机事件，那么事件“A,B 都发生”“A,B 不都发生”“A,B 都不发生”中，哪两个是对立事件？

思路探索 以上三个事件可以表示为 $AB,\overline{AB},\overline{A}\,\overline{B}$，显然 AB 与 $\overline{AB}$ 是对立事件.

例 4 用上述定义的事件间的关系来讨论下列事件的表示：

（1）事件“A,B 发生，C 不发生”可表示成 $\Rightarrow AB\overline{C}$ 或 $AB-C$ 或 $AB-ABC$；

（2）事件“A,B,C 中至少有两个发生”可表示成 $\Rightarrow AB\cup AC\cup BC$ 或 $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$；

（3）事件“A,B,C 中恰好有两个发生”可表示成 $\Rightarrow AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$；

（4）事件“A,B,C 中至多有两个发生”可表示成 $\Rightarrow \overline{ABC}$；

（5）事件“A,B,C 中至多有一个发生”可表示成 $\Rightarrow \overline{A}B\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $\overline{AB\cup BC\cup AC}$；

（6）事件“A 发生而 B 与 C 不发生”可表示成 $\Rightarrow A\overline{B}\,\overline{C}$ 或 $A-B-C$ 或 $A-(B\cup C)$；

（7）事件“A,B,C 中恰好有一个发生”可表示成 $\Rightarrow A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$；

（8）事件“A,B,C 中至少有一个发生”可表示成 $\Rightarrow A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$.

第二节　随机事件的概率

一、重点及难点

1. 频率的概念

在相同的条件下重复进行了 n 次试验，如果事件 A 在这 n 次试验中出现了 n_A 次，则称比值 $\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 发生的**频率**，记为 $f_n(A)$，即 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$.

当试验次数 n 逐渐增大时，事件 A 的频率 $f_n(A)$ 都逐渐稳定于某个常数 p，即呈现出稳定性，这种“频率稳定性”就是通常所说的统计规律性，因此可以用频率来描述概率，**定义概率为频率的稳定值**.

2. 概率的公理化定义

设随机试验 E，Ω 是它的样本空间，对于 E 的每一个事件 A，定义实值函数 $P(A)$，若满足下列条件：（1）非负性 $P(A)\geqslant 0$；（2）规范性 $P(\Omega)=1$；（3）可列可加性，则称 $P(A)$ 为随机事件的**概率**.

3. 概率的性质

（1）$P(\varnothing)=0$.

（2）对于任一事件 A，有 $P(A)=1-P(\overline{A})$.

（3）设 A,B 为两事件，若 $B\supset A$，则有 $P(B-A)=P(B)-P(A)$，且 $P(A)\leqslant P(B)$.

（4）对任意两个事件 A,B，则有 $P(B-A)=P(B)-P(AB)$.

（5）对任意两个事件 A,B，则有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

4. 等可能概型

（1）**古典概型**　如果① 试验的样本空间 Ω 包含有限个样本点，② 试验中每个样本点发生的可能性相同，则把具有这种性质的数学模型称为古典概型，记为

$$P(A)=\frac{\text{事件}A\text{包含的样本点数}}{\text{样本空间}\Omega\text{包含的样本点数}}=\frac{k}{n}.$$

（2）**几何概型**　如果① 试验的样本空间 Ω 包含无限个样本点，并且样本空间表现为某几何区域时为有限区域，② 每个样本点发生的可能性相同，则把具有这种性质的数学模型称为几何概型，记为

$$P(A)=\frac{A\text{的几何度量}}{\Omega\text{的几何度量}}=\frac{L_A}{L_\Omega}.$$

二、典型例题解析

例 1 设 A,B 是随机事件，且 $AB=\varnothing$，则下列命题正确的是（　　）.

A. A,B 互斥　　B. AB 是不可能事件

C. $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$　　D. AB 不一定是不可能事件

思路探索　$AB=\varnothing\Rightarrow P(AB)=0$，反之未必. 例如，做连续区间上取点的试验，设 A,B 都表示恰好取到中点，由几何概率知 $P(AB)=0$，但是 $AB\neq\varnothing$，故 A，B 不对. 再如，进行投一枚硬币的试验，$A=$“正面朝上”，$B=$“反面朝上”，满足 $P(AB)=0$，但是 $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$，故 C 不对. 综上所述，应该选 D.

例 2 设 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\frac{1}{16}$，则 A,B,C 全不发生的概率为______，A,B,C 中至少有一个发生的概率为_______.

思路探索　A,B,C 全不发生的概率为

$$\begin{aligned}P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})&=1-P(A\cup B\cup C)\\&=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)]\\&=1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}\right)=\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

A,B,C 中至少有一个发生的概率为

$$P(A\cup B\cup C)=1-P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=\frac{5}{8}.$$

例 3（抽签问题）　设有 15 个人要去看电影，只有 7 张电影票，于是进行抽签决定谁去. 求第 5 个抽签者抽到电影票的概率.

思路探索　设事件 $A=\{$第 5 个抽签者抽到电影票$\}$.

这是一个不放回抽样，且与次序有关，所以样本总数为 $15\cdot14\cdots2\cdot1=15!$.

事件 A 要求第 5 个人抽到电影票，我们可以先任取一张电影票“预留”给第 5 个人，其他 14 个人任意抽取，那么 A 的样本点数为 $7\cdot14\cdot13\cdots2\cdot1=7\cdot14!$，所以

$$P(A)=\frac{7\cdot14!}{15!}=\frac{7}{15}.$$

例 4 将 n 个人随机分到 N 个房间中（$n\leqslant N$），每个人分到哪个房间是等可能的，且设每个房间可容纳的人数没有限制，求：

（1）某指定的一个房间（如第一个房间）恰有 m 个人的概率（$m\leqslant n$）；

（2）每两个人都不在同一个房间的概率．

思路探索 （1）设 $A=\{$某指定的一个房间恰有 m 个人$\}$．

由于每一个人分房间的时候都有 N 种分法，n 个人分完才算结束，所以样本点总数为 N^n．对 A 中样本点数，房间是固定的，但哪 m 个人分到此房间是不确定的．也就是说哪 m 个人分到此房间都可以，则先从 n 个人中选出 m 个人，让这 m 个人在此房间，剩下的 $n-m$ 个人分到其他的 $N-1$ 房间中，所以事件 A 中的样本点数为 $\mathrm{C}_n^m(N-1)^{n-m}$，故得

$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_n^m(N-1)^{n-m}}{N^n}.$$

（2）设 $B=\{$每两个人都不在同一个房间$\}$，样本点数与（1）一致，为 N^n．B 中的样本点数容易求出，为 $N\cdot(N-1)\cdots(N-n+1)=\mathrm{C}_N^n n!$，故得

$$P(B)=\frac{\mathrm{C}_N^n n!}{N^n}.$$

例 5 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只，这 4 只鞋子中至少有 2 只配成一双的概率是多少？

思路探索 **方法一** 样本点总数为 A_{10}^4，设 $A=$“4 只鞋子中至少有 2 只配成一双”，考虑对立事件 $\overline{A}=$“4 只鞋子都不构成一双”，第一只鞋子可从 10 只中任取一只，有 10 种取法；第二只鞋子从余下的 8 只中任取一只，有 8 种取法；第三只鞋子从余下的 6 只中任取一只，有 6 种取法；同理，第四只鞋子有 4 种取法，故 $\overline{A}$ 中包含了个 $10\cdot8\cdot6\cdot4$ 样本点，得

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{10\cdot8\cdot6\cdot4}{\mathrm{A}_{10}^4}=\frac{13}{21}.$$

方法二 从 10 只鞋子任取 4 只的取法有 C_{10}^4．如果所取鞋子都配不成对，那么相当于从 5 双不同的鞋子中任取 4 双，再从每双中任取一只，可得 $\overline{A}$ 中样本点数为 $\mathrm{C}_5^4 2^4$，得

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{\mathrm{C}_5^4 2^4}{\mathrm{C}_{10}^4}=\frac{13}{21}.$$

第三节 条件概率

一、重点及难点

1. 条件概率

设 A,B 是两个事件，若 $P(A)>0$，称 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为 A 发生的条件下 B 发生的条

件概率.

条件概率亦具有概率的三条基本性质:

性质 1　对任一事件 B, $P(B|A)\geqslant 0$;

性质 2　$P(\Omega|A)=1$;

性质 3　设 $B_1,B_2,\cdots$ 是两两互不相容的事件，则有

$$P(B_1\cup B_2\cup\cdots|A)=P(B_1|A)+P(B_2|A)+\cdots.$$

2. 乘法公式

(1) 两个事件的乘法公式：若 $P(A)>0,P(B)>0$，有

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B).$$

(2) 多个事件的乘法公式:

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

3. 全概率公式

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分，且 $P(A_i)>0\,(i=1,2,\cdots,n)$，对任意 $B\subset\Omega$，有

$$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+\cdots+P(A_n)P(B|A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i).$$

4. 贝叶斯公式

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分，且 $P(A_i)>0\,(i=1,2,\cdots,n)$，对任意 $B\subset\Omega$，有

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n}P(A_k)P(B|A_k)}.$$

二、典型例题解析

例 1　假设 $B\subset A$，则下列命题正确的是(　　).

A. $P(\overline{A}\overline{B})=1-P(A)$　　B. $P(\overline{A}-\overline{B})=P(\overline{A})-P(\overline{B})$

C. $P(B|A)=P(B)$　　D. $P(A|\overline{B})=P(A)$

思路探索　由 $B\subset A$ 知 $\overline{B}\supset\overline{A}$，故 $P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A})=1-P(A)$，A 正确，B 不对.

$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{P(B)}{P(A)}$，C 不对，$P(A|\overline{B})=\dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}\neq P(A)$，D 也不对，故答案为 A.

例 2 已知 $P(B)=0.3$，$P(\overline{A}\mid B)=0.2$，$P(A\mid\overline{B})=0.75$，求 $P(B\mid A)$．

解 $$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A\mid B)P(B)}{P(A\mid B)P(B)+P(A\mid\overline{B})P(\overline{B})}$$
$$=\frac{(1-0.2)\times 0.3}{(1-0.2)\times 0.3+0.75\times(1-0.3)}$$
$$=0.3137.$$

例 3 10 个考签中有 4 个难签，有甲、乙、丙 3 人参加抽签（不放回），现甲先抽，乙次，丙最后．分别求甲抽到难签；甲、乙都抽到难签；甲没抽到难签而乙抽到难签以及甲、乙、丙都抽到难签的概率．

思路探索 设事件 A,B,C 分别表示甲、乙、丙各抽到难签，则用古典概型、乘法公式即可算得上述各事件的概率，现计算如下：

$$P(A)=\frac{4}{10};$$

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{12}{90};$$

$$P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})=\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{24}{90};$$

$$P(ABC)=P(A)P(B\mid A)P(C\mid AB)=\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{2}{8}=\frac{1}{30}.$$

注：

（1）本题中的条件概率都是直接用古典概型求得的；

（2）读者不妨算一下 $P(B)$ 和 $P(C)$．

例 4 一批产品共 100 件，对其进行抽样检查，整批产品被拒绝接受的条件是被抽查的 5 件产品中至少有一件是不合格产品，若在该批产品中有 5%是不合格品，试问该批产品被拒绝接受的概率是多少？

思路探索 本题若直接设 $B_i=\{$第i件被抽查的产品是不合格产品$\}$ $(i=1,2,\cdots,5)$，$B=\{$产品被拒绝接受$\}$．显然，用此假设会增加计算难度，请想一想为什么这样说，此时 B 与 B_i 之间是什么关系？

可设：

$A_i=\{$第 i 件被抽查的产品为合格品$\}$ $(i=1,2,\cdots,5)$，

$A=\{$产品被接受$\}$（又为什么要这样假设？并与上述假设比较之）．

由此假设可知：A 与 A_i 关系可用乘法公式表示为

$$A=A_1A_2A_3A_4A_5.$$

于是 $$P(A)=P(A_1A_2A_3A_4A_5)$$
$$=P(A_1)P(A_2\mid A_1)\cdots P(A_5\mid A_1A_2A_3A_4)$$

$$=\frac{95}{100}\times\frac{94}{99}\times\frac{93}{98}\times\frac{92}{97}\times\frac{91}{96}\approx 0.77\ .$$

所以产品被拒绝接受的概率为

$$P(\overline{A})=1-P(A)\approx 0.23\ .$$

例 5 X 型汽车在 A,B,C 三个车场中分别占 $\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{2}$，所有汽车出售的机会均等. 某人随机选一车场并随机选一车试开. 若此车恰好是 X 型的，求此人是在车场 A 选车的概率.

思路探索 令 $A_1=\{车场 A\}$，$A_2=\{车场 B\}$，$A_3=\{车场 C\}$，$B=\{试开的车为 X 型\}$，则由贝叶斯公式

$$P(A_1\mid B)=\frac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)+P(A_3)P(B\mid A_3)}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}=\frac{2}{9}\approx 0.22\ .$$

例 6 一只某种病菌在人口中的带菌率为 0.03，若设：$A=\{检验呈阳性\}$，$B=\{带菌\}$. 经多年检查统计有如下结果：

$$P(A\mid B)=0.99\,,\,P(\overline{A}\mid B)=0.01\,,$$
$$P(A\mid \overline{B})=0.05\,,\,P(\overline{A}\mid \overline{B})=0.95\ .$$

现若某人检验结果为阳性，试问他带菌的概率为多少？

思路探索 显然这是一个由结果找原因的问题，因此要用贝叶斯公式，其中“结果”发生的概率大小则可由全概率公式时关键要找出样本空间的一个划分，本题中，{带菌}与{不带菌}构成了样本空间的一个划分.

若设：$A=\{检验呈阳性\}$，$B=\{带菌\}$，则

$$P(A)=P(B)P(A\mid B)+P(\overline{B})P(A\mid \overline{B})=0.03\times 0.99+0.97\times 0.05=0.078\,2\ ,$$

则某人检验结果为阳性是因带菌引起的概率为

$$P(B\mid A)=\frac{P(B)P(A\mid B)}{P(B)P(A\mid B)+P(\overline{B})P(A\mid \overline{B})}=\frac{0.99\times 0.03}{0.99\times 0.03+0.05\times 0.97}=0.380\ .$$

计算结果说明，其带菌的可能性已接近 0.4，因此需做进一步确诊治疗.

例 7 某厂仓库存有 1，2，3 号箱子分别为 10，20，30 个，均装有某产品. 其中，1 号箱内装有正品 20 件，次品 5 件；2 号箱内装有正品 20 件，次品 10 件；3 号箱内装有正品 15 件，次品 10 件. 现从中任取一箱，再从箱中任取一件产品，问：

（1）取到正品及次品的概率各是多少？

（2）若已知取到正品，求该正品是从 1 号箱中取出的概率.

思路探索　(1) 设 A_i = “取到第 i 号箱子” $(i=1,2,3)$，则 $\{A_1, A_2, A_3\}$ 构成样本空间的一个划分，且

$$P(A_1)=\frac{10}{60}=\frac{1}{6}, P(A_2)=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}, P(A_3)=\frac{30}{60}=\frac{1}{2}.$$

设 B = “取得正品”，$\overline{B}$ = “取得次品” 则由全概率公式得

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)=\frac{1}{6}\times\frac{20}{25}+\frac{1}{3}\times\frac{20}{30}+\frac{1}{2}\times\frac{15}{25}=\frac{59}{90},$$

$$P(\overline{B})=1-P(B)=\frac{31}{90}.$$

(2) 已知取到正品，求该正品是从 1 号箱中取出的概率，这是一个条件概率问题.

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{6}\times\frac{20}{25}}{\frac{59}{90}}=\frac{12}{59}.$$

第四节　事件的独立性

一、重点及难点

1. 两个事件的独立性

若事件 A 发生的可能性不受事件 B 发生的影响，即 $P(A|B)=P(A)$，则称事件 A,B 相互独立，此时有 $P(AB)=P(A)P(B)$.

注:

独立性的定义和互不相容不要混淆，事实上，当 A,B 互不相容，且 $P(A)>0$，$P(B)>0$ 时，A,B 不独立；而当 A,B 相互独立，且 $P(A)>0, P(B)>0$ 时，A,B 相容.

定理　若事件 A,B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 中每一对事件都相互独立.

2. 多个事件的独立性

若对任意的 $k\ (1<k\leqslant n)$，任意 $1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n$，有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_n})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_n}),$$

则 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 称为相互独立事件.

注意:

（1） $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为相互独立事件时，定义中共有个 $(2^n - n - 1)$ 等式.

（2）若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，则 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两独立；反之不然.

3. 伯努利概型

定义 具有以下两个特点的随机试验称为 n 重伯努利试验:

（1）在相同条件下，重复 n 次做同一试验，每次试验只有两个可能结果 A 和 $\overline{A}$，且 $P(A) = p\ (0 < p < 1), P(\overline{A}) = 1 - p = q$；

（2） n 次试验是相互独立的（即每次试验结果的概率不受其他次试验结果发生情况的影响）.

定理 在 n 重伯努利概型中，每次试验事件 A 发生的概率为 $p\ (0 < p < 1)$，则在 n 次试验中，事件 A 恰好发生 k 次的概率为

$$P_n(k) = \mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n)，其中 q = 1 - p .$$

二、典型例题解析

例 1 设 A, B, C 是两两独立且不能同时发生的随机事件，且 $P(A) = P(B) = P(C) = x$，则 x 的最大值为（　　）.

A. $\frac{1}{2}$　　B. 1　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

思路探索 考虑式 $P(AB \cup AC \cup BC)$，而

$$\begin{aligned} P(AB \cup AC \cup BC) &= P(AB) + P(AC) + P(BC) - 3P(ABC) + P(ABC) \\ &= P(AB) + P(AC) + P(BC) = 3x^2, \end{aligned}$$

而 $P(AB \cup AC \cup BC) \leqslant 1$，故答案为 D.

例 2 设有两两相互独立的三事件 A, B, C 满足条件 $ABC = \varnothing$，$P(A) = P(B) = P(C) < \frac{1}{2}$，且已知 $P(A \cup B \cup C) = \frac{9}{16}$，则 $P(A) =$（　　）.

思路探索 结合题设，$P(A \cup B \cup C) = \frac{9}{16}$，且 A, B, C 两两独立，则有

$$\frac{9}{16} = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) = 3P(A) - 3P^2(A),$$

从而 $3P^2(A) - 3P(A) + \frac{9}{16} = 0$，解得 $P(A) = \frac{1}{4}$.

例 3 甲，乙两人独立地对同一目标射击一次，其命中率分别为 0.6 和 0.5. 现已知目