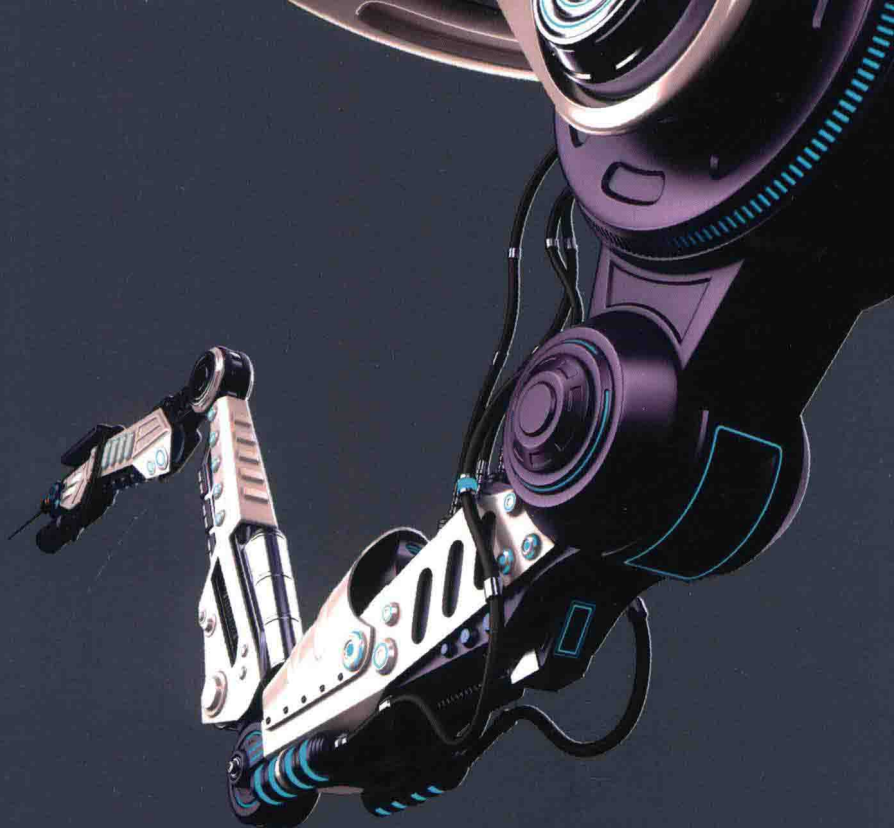




机器人学译丛

ISTE WILEY



[法] 吕克·若兰 (Luc Jaulin) 著

黄心汉 彭刚 译

# 机器人自动化

建模、仿真与控制

AUTOMATION  
FOR ROBOTICS



机械工业出版社  
China Machine Press

机器人学译丛

[法] 吕克·若兰 (Luc Jaulin) 著

黄心汉 彭刚 译

# 机器人自动化

建模、仿真与控制

AUTOMATION  
FOR ROBOTICS



机械工业出版社  
China Machine Press

## 图书在版编目 ( CIP ) 数据

机器人自动化: 建模、仿真与控制 / (法) 吕克·若兰 (Luc Jaulin) 著; 黄心汉等译. —北京: 机械工业出版社, 2017.5

(机器人学译丛)

书名原文: Automation for Robotics

ISBN 978-7-111-57042-4

I. 机… II. ①吕… ②黄… III. 机器人—研究 IV. TP242

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 121743 号

本书版权登记号: 图字: 01-2016-3795

Copyright © ISTE Ltd 2015

All rights reserved. This translation published under license. Authorized translation from the English language edition, entitled Automation for Robotics, ISBN 978-1-84821-798-0, by Luc Jaulin, Published by John Wiley & Sons. No part of this book may be reproduced in any form without the written permission of the original copyrights holder.

本书中文简体字版由约翰·威利父子公司授权机械工业出版社独家出版。未经出版者书面许可, 不得以任何方式复制或抄袭本书内容。

本书封底贴有 Wiley 防伪标签, 无标签者不得销售。

本书介绍机器人的建模、仿真和控制方法, 主要内容包括: 线性系统、机械系统、伺服电动机的建模, 非线性系统的计算机仿真, 线性系统及其稳定性和状态控制器, 线性控制系统的能控性与能观性, 线性化控制及非线性系统的稳定性等。此外, 本书通过大量习题对基本概念和基本方法进行演绎与验证。

本书适合作为自动控制相关专业的教材, 也可以作为机器人相关专业人士的参考书。

出版发行: 机械工业出版社 (北京市西城区百万庄大街 22 号 邮政编码: 100037)

责任编辑: 王颖 谢晓芳

责任校对: 殷虹

印刷: 中国电影出版社印刷厂

版次: 2017年6月第1版第1次印刷

开本: 185mm×260mm 1/16

印张: 11.25

书号: ISBN 978-7-111-57042-4

定价: 49.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

客服热线: (010) 88378991 88361066

投稿热线: (010) 88379604

购书热线: (010) 68326294 88379649 68995259

读者信箱: hzsj@hzbook.com

版权所有·侵权必究

封底无防伪标均为盗版

本书法律顾问: 北京大成律师事务所 韩光 / 邹晓东

关于机器人的书籍已经很多，但像本书这样，在简明扼要阐述机器人的建模、仿真和控制方法的基础上，通过大量习题来对基本概念和基本方法进行演绎与验证的书籍尚不多见。如前言所述：“本书的第一个目的是通过多做习题来了解状态表达的概念”，其中，第1章安排了大量不同类型的习题来演绎如何得到状态表达式，第2章对这些已知系统的状态表达式进行计算机仿真；“本书的第二个目的是提出由状态方程描述的系统的控制方法”，包括第3章和第4章的线性系统控制以及第5章的非线性系统的线性化控制等。作为一本介绍机器人自动化的基本原理和方法的书籍，本书对高等院校相关专业的师生以及从事机器人研究和产业化的工程技术人员大有裨益。

本书的翻译工作由黄心汉和彭刚完成，其中前言、第1章、第2章和术语表由黄心汉翻译，第3章、第4章和第5章由彭刚翻译，全书由黄心汉统稿。张世锋、苏豪、周晨阳参加了部分内容的初译。囿于译者学识水平，译文疏漏在所难免，欢迎读者批评指正。

黄心汉

## I.1 状态表达式

与我们紧密相关的生物、经济和机械系统通常都可以用如下微分方程来描述：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)) \end{cases}$$

假设该系统的时间  $t$  是连续的[JAU 05],  $\mathbf{u}(t)$  是系统的输入(或控制)向量,  $\mathbf{y}(t)$  是以一定精度检测出的系统输出向量。向量  $\mathbf{x}(t)$  称为系统的状态, 它表示系统的记忆, 或者说当系统输入为  $\mathbf{u}(t)$  时预测系统结果所需的信息。方程组中的第一个方程称为演化方程, 该方程是一个微分方程, 它给出了  $t$  时刻的状态向量  $\mathbf{x}(t)$  的当前值和施加的控制向量  $\mathbf{u}(t)$ 。第二个方程称为观测方程, 它用来计算  $t$  时刻在已知状态和控制时的输出向量  $\mathbf{y}(t)$ 。注意, 观测方程不同于演化方程, 由于它不包含导数项, 因此它不是微分方程。这两个方程构成了系统的状态表达式。

有时我们用离散时间  $k$  来描述上面的状态方程, 这里  $k \in \mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Z}$  是整数集, 例如计算机就是一个离散时间系统, 它的离散时间  $k$  与微处理器的时钟同步。离散时间系统通常用下述递归方程描述:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}(k)) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}(k)) \end{cases}$$

本书的第一个目的是通过多做习题来了解状态表达的概念。为此, 我们在第 1 章安排了各种各样的习题来揭示如何得到状态表达式, 第 2 章对这些已知系统的状态表达式进行计算机仿真。

本书的第二个目的是提出由状态方程描述的系统的控制方法。换句话说, 我们试图构建自动机械系统(人除了给出命令或设定点外, 并不包含在系统中), 控制器能够

使系统按人的意愿进行控制(按人的需要对系统的行为进行改变)。为此,控制器将根据输出  $y(t)$ (或多或少有噪声)和设定点  $w(t)$  计算系统的输入  $u(t)$ (见图 I-1)。

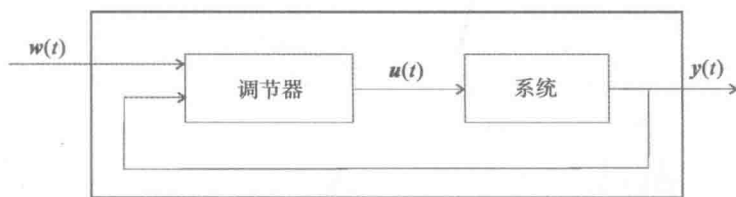


图 I-1 闭环控制系统概念图

从用户的角度来看,具有输入  $w(t)$  和输出  $y(t)$  的闭环系统将产生合适的行为,这样就可以说我们控制了该系统。为了实现这个控制目标,首先来看看线性系统,也就是说,函数  $f$  和  $g$  假定是线性的。因此在连续时间的情况下,系统的状态方程可写成如下形式:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

在离散时间情况下,它可写为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \end{cases}$$

矩阵  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{D}$  分别称为演化、控制、观测和直接矩阵。系统的详细分析将在第 3 章进行,第 4 章将介绍如何使这些系统稳定,最后在第 5 章将像线性系统分析一样介绍工作点附近的非线性系统行为。对于那些工作点附近的非线性系统,可以采用与线性系统相同的方法进行稳定性的分析。

与本书有关的许多 MATLAB 程序可从以下网址得到:

<http://www.ensta-bretagne.fr/jaulin/isteauto.html>

## I.2 习题

### 习题 I.1——水下机器人

法国国立布列塔尼高等先进技术学校(SNSAT)的水下机器人 Saucisse 控制系统 [JAU 09] 的照片如图 I-2 所示。该系统包含 1 台计算机、3 个螺旋桨、1 台摄像机、

1 个罗盘和 1 台声呐装置。什么是该系统对应的输入向量  $u$ 、输出向量  $y$ 、状态向量  $x$  和设定点  $w$ ? 计算机位于控制回路的什么位置?

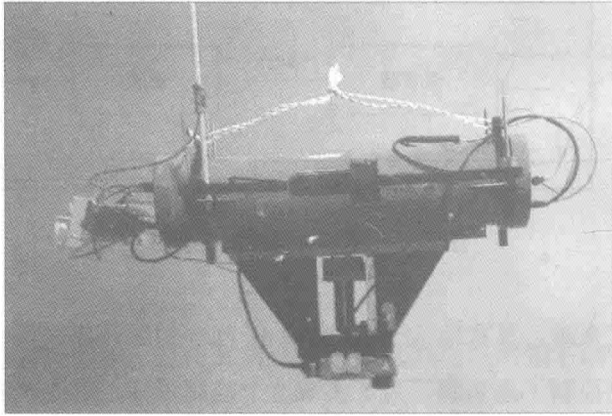


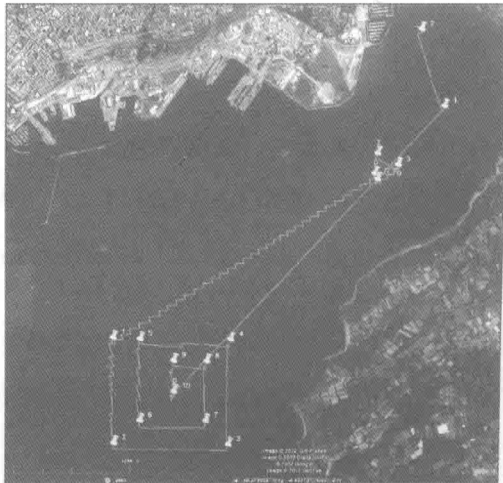
图 I-2 水下机器人的控制

### 习题 I.2——帆船机器人

图 I-3 是法国海洋开发研究所(FRIES)和 SNSAT 的帆船机器人 Vaimos 控制系统[JAU 12a, JAU 12b]。该系统能够自主跟踪航线，它有 1 台安装在桅杆顶部的风速仪、1 个罗盘和 1 台全球定位系统(GPS)。请给出该系统对应的输入向量  $u$ 、输出向量  $y$ 、状态向量  $x$  和设定点  $w$ 。



a) 帆船机器人 Vaimos



b) Vaimos 的航线

图 I-3 Vaimos 依据风帆逆风行驶路线形成的曲折多变的航迹

### I.3 习题解答

#### 习题 I.1 的解答

输入向量  $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^3$  为 3 个螺旋桨的给定电压，输出向量  $\mathbf{y}(t)$  包括罗盘、声呐数据和摄像机获取的图像，状态向量  $\mathbf{x}$  对应机器人的位置、方向和速度，设定点  $\mathbf{w}$  由操作者选定。例如，如果我们要进行航线控制，那么设定点  $\mathbf{w}$  就是机器人的期望速度和路径。控制器是由计算机执行的程序。

#### 习题 I.2 的解答

输入向量  $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^2$  为帆船的长度  $\delta_v^{\max}$  和船舵的角度  $\delta_g$ ，输出向量  $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^4$  包含 GPS 的数据  $m$ 、超声风速仪(桅杆上的风速仪)  $\psi$  和罗盘  $\theta$ ，设定点  $\mathbf{w}$  对应要跟踪的航线段  $ab$ 。图 I-4 显示了该控制回路。操作者(未出现在图中)以机器人跟踪期望路径的方式分段跟踪航线序列(这里由 12 条线段形成一个方形路线，然后返回港口)。

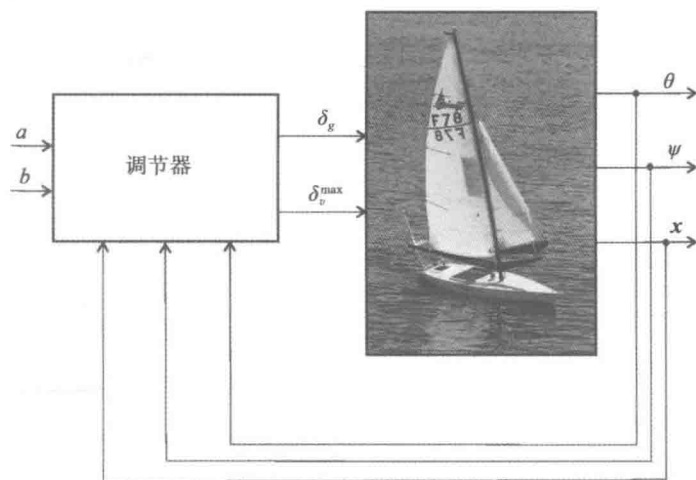


图 I-4 帆船机器人的控制回路



# 目 录

Automation for Robotics

译者序

前言

## 第 1 章 建模 ..... 1

1.1 线性系统 ..... 1

1.2 机械系统 ..... 1

1.3 伺服电动机 ..... 2

1.4 习题 ..... 3

1.5 习题解答 ..... 15

## 第 2 章 仿真 ..... 35

2.1 向量场的概念 ..... 35

2.2 图形表示 ..... 36

2.2.1 模式 ..... 37

2.2.2 旋转矩阵 ..... 37

2.2.3 齐次坐标 ..... 38

2.3 仿真 ..... 39

2.3.1 欧拉法 ..... 40

2.3.2 龙格-库塔法 ..... 40

2.3.3 泰勒法 ..... 41

2.4 习题 ..... 41

2.5 习题解答 ..... 50

## 第 3 章 线性系统 ..... 62

3.1 稳定性 ..... 62

3.2 拉普拉斯变换 ..... 63

3.2.1 拉普拉斯变量 ..... 63

3.2.2 传递函数 ..... 64

3.2.3 拉普拉斯变换 ..... 64

3.2.4 输入-输出关系 ..... 65

3.3 状态方程与传递函数的  
关系 ..... 66

3.4 习题 ..... 66

3.5 习题解答 ..... 75

## 第 4 章 线性控制 ..... 92

4.1 能控性和能观性 ..... 92

4.2 状态反馈控制 ..... 93

4.3 输出反馈控制 ..... 94

4.4 小结 ..... 96

4.5 习题 ..... 96

4.6 习题解答 ..... 107

## 第 5 章 线性化控制 ..... 132

5.1 线性化 ..... 132

5.1.1 函数的线性化 .....	132	5.4 习题解答 .....	147
5.1.2 动态系统的线性化 .....	133	<b>术语表</b> .....	168
5.1.3 工作点附近的线性化 ...	133	<b>参考文献</b> .....	169
5.2 非线性系统的稳定性 .....	134		
5.3 习题 .....	136		

寻找系统相对精确的状态表示的过程称为建模。一般情况下，常量参数(例如物体的质量、惯性力矩、黏性摩擦系数、电容容量等)会出现在状态方程中，在这些情况下，系统辨识是必不可少的。本书中假设所有的参数都是已知的，否则，请读者阅读 Eric Walter 的书[WAL 14]来了解各种辨识方法。当然，不存在普适的系统建模方法。本章及后面习题的目的是用一些不同的例子来展示如何获取状态表达式。

## 1.1 线性系统

在连续时间的情况下，线性系统可以用以下状态方程描述：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

实际上，线性系统非常少。然而，用线性代数方法相对容易计算，并且在非线性系统工作点附近用线性系统方法是可接受的。

## 1.2 机械系统

运用动力学的基本原理很容易得到机械系统(例如机器人)的状态方程。对复杂系统而言，计算相对复杂，而且计算机对代数系统的使用也是有效的。为了获得由若干个假定为严格的子系统  $S_1, S_2, \dots, S_m$  构成的机械系统的状态方程，可遵循以下三个步骤。

1) 获取微分方程。对每一个具有质量  $m$  和惯性矩阵  $\mathbf{J}$  的子系统  $S_k$ ，可以用下列关系式：

$$\sum_i \mathbf{f}_i = m\mathbf{a}$$

$$\sum_i \mathbf{M}_{f_i} = J\dot{\omega}$$

其中,  $f_i$  是作用在子系统  $S_k$  上的力,  $\mathbf{M}_{f_i}$  表示由力  $f_i$  作用在  $S_k$  中心上产生的转矩。向量  $\mathbf{a}$  表示  $S_k$  的切向加速度, 向量  $\dot{\omega}$  表示  $S_k$  的角加速度。根据它们的组成要素分解这  $2m$  个向量方程后, 可得到  $6m$  个标量微分方程, 它们中的一些可能产生退化。

2) 消除内力。在微分方程中存在所谓的黏合力, 它们在机械系统的内部, 但在组成机械系统的每个子系统的外部。它们表示一个子系统  $S_k$  对另一个子系统  $S_l$  的作用。根据作用-反作用原理, 这种力(用  $f^{k,l}$  来表示)的存在意味着另一个力  $f^{l,k}$  (表示  $S_l$  对  $S_k$  的作用)的存在, 使得  $f^{l,k} = -f^{k,l}$ 。在计算微分方程的同时考虑作用-反作用原理, 就有可能消除内力。由此得到的微分方程的数目减少为  $n$ ,  $n$  为系统的自由度  $q_1, \dots, q_n$ 。

3) 获得状态方程。从  $n$  个微分方程构成的方程组中解出二阶导数  $\ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_n$ , 由此得到向量关系如下:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u})$$

其中,  $\mathbf{u}$  是除了势能之外的外力向量(也就是那些施加到系统中的力向量), 状态方程可写成:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u}) \end{pmatrix}$$

机械系统的完整约束动力学可以用关系式  $\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{u})$  来描述。对于一个完整约束系统,  $\mathbf{q}$  和  $\dot{\mathbf{q}}$  是相互独立的。如果有一个非完整约束使它们中的两个关联(如  $h(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0$ ), 则该系统称为非完整约束系统。轮式移动机器人可能就属于这种系统 [LAU 01]。对机械系统建模的更多细节感兴趣的读者可以参考 [KHA 07]。

### 1.3 伺服电动机

机械系统由力或力矩控制并遵循动力学模型, 该动力学模型依赖许多未知的系数。由运动学模型表述的相同的机械系统由位置、速度或加速度控制, 运动学模型取决于已知的几何系数而且比较容易写成方程。在实际中, 通过加入伺服电动机, 可以将动力学模型转换成运动学模型。总而言之, 伺服电动机是具有电气控制电路和(位置、速度或加速度)传感器的直流电动机。控制电路计算出电动机的给定电压  $u$ , 以便与传感器测量的设定值  $\omega$  对应,  $\omega$  通常以脉宽调制(PWM)的方波形式给出。有以

下三种伺服电动机。

- 位置伺服。传感器测量电动机的位置(或角度) $x$ ，其控制规则为  $u=k(x-w)$ ，如果  $k$  很大，则  $x \approx w$ 。
- 速度伺服。传感器测量电动机的速度(或角速度) $\dot{x}$ ，其控制规则为  $u=k(\dot{x}-\dot{w})$ ，如果  $k$  很大，则  $\dot{x} \approx \dot{w}$ 。
- 加速度伺服。传感器测量电动机的(切向或角)加速度  $\ddot{x}$ ，其控制规则为  $u=k(\ddot{x}-\ddot{w})$ ，如果  $k$  很大，则  $\ddot{x} \approx \ddot{w}$ 。

## 1.4 习题

### 习题 1.1——积分器

积分器是由微分方程  $\dot{y}=u$  描述的线性系统，求该系统对应的状态表达式，并用矩阵形式给出这个表达式。

### 习题 1.2——二阶系统

考虑输入为  $u$  和输出为  $y$  的系统，该系统的二阶微分方程为：

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = bu$$

取  $x=(y, \dot{y})$ ，求该系统对应的状态方程，并用矩阵形式给出该状态方程。

### 习题 1.3——质量-弹簧系统

考虑如图 1-1 所示的输入为  $u$  和输出为  $q_1$  的系统( $u$  是作用在第二个物体上的力， $q_i$  是第  $i$  个物体相对于它的平衡点的偏差， $k_i$  是第  $i$  个弹簧的刚度， $\alpha$  是黏性摩擦系数)。

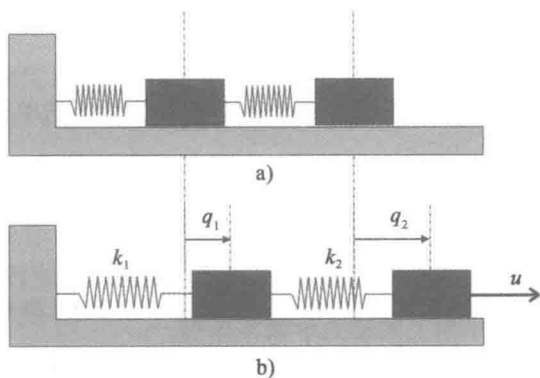


图 1-1 a) 静止时的质量-弹簧系统，b) 处于任意状态时的系统

考虑状态向量：

$$\mathbf{x} = (q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2)^T$$

1) 求出系统的状态方程。

2) 该系统是线性的吗？

#### 习题 1.4——单摆

考虑图 1-2 中的单摆，系统的输入是加在单摆轴上的动量  $u$ ，输出是  $y(t)$ ，即质量  $m$  与垂直轴线之间的距离：

1) 确定系统的状态方程。

2) 将机械能  $E_m$  表示为系统状态的函数。说明当动量  $u$  为零时后者仍为常量。

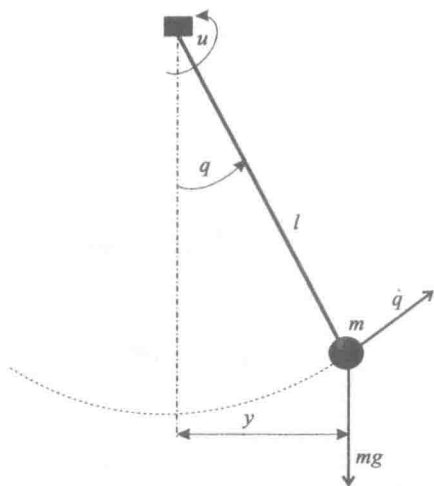


图 1-2 状态向量为  $\mathbf{x} = (q, \dot{q})$  的单摆

#### 习题 1.5——倒立摆的动态建模

考虑倒立摆系统，它由安放在可移动小车上的长度为  $l$  的单摆组成，如图 1-3 所示。 $u$  是作用在质量为  $M$  的小车上的外力， $x$  表示小车的位置， $\theta$  是单摆和垂直轴线之间的夹角， $\vec{R}$  是小车作用在单摆上的力。单摆顶点  $B$  的质量  $m$  是固定的，摆杆的质量可以忽略， $A$  是摆杆与小车的连接点， $\vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{k}$  是摆杆的旋转向量。

1) 写出作用在小车和单摆上的动力学基本原理。

2) 说明  $B$  点的速度向量是由关系式  $\mathbf{v}_B = (\dot{x} - \dot{\theta} \cos \theta) \vec{i} - \dot{\theta} \sin \theta \vec{j}$  确定的，计算  $B$

点的加速度  $\dot{v}_B$ 。

3) 证明倒立摆建模的状态向量为  $x = (x, \theta, \dot{x}, \dot{\theta})$ 。

4) 给出倒立摆的状态方程。

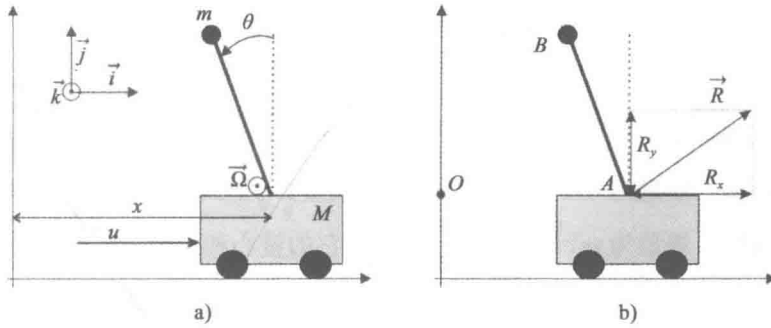


图 1-3 倒立摆

### 习题 1.6——倒立摆的运动学建模

在运动模型中，输入量不再是力或力矩，而是运动学变量，换言之，就是位置、速度或加速度。伺服电动机的作用就是把这些运动变量转换成力或力矩。

沿用前面习题中建立的倒立摆状态方程：

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \\ \frac{-m \sin \theta (l \dot{\theta}^2 - g \cos \theta)}{M + m \sin^2 \theta} \\ \frac{\sin \theta ((M + m)g - ml \dot{\theta}^2 \cos \theta)}{l(M + m \sin^2 \theta)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{M + m \sin^2 \theta} \\ \frac{\cos \theta}{l(M + m \sin^2 \theta)} \end{pmatrix} u$$

1) 如果以加速度  $a = \ddot{x}$  取代作用在小车上的力作为输入，状态模型会发生什么变化？

2) 说明当  $K$  很大时，采用  $u = K(a - \ddot{x})$  的比例控制，是如何将动力学模型变成运动学模型的。这种控制是以什么方式运用了伺服电动机或运算放大器的原理？

### 习题 1.7——电动平衡车

如图 1-4a 所示的电动平衡车是一种两轮单轴代步车。由于是可控的，因此它是稳定的。在建模时，我们假定电动机是不可控的。

它的开环特性非常接近图 1-4b 所示的平面独轮车，图中， $u$  表示车体和车轮之间施加的动量。

车体与车轮之间通过一个枢轴销连接，分别用  $B$  和  $A$  表示车体和车轮的重心， $C$  是轮盘上的一个固定点。 $\alpha$  表示向量  $\vec{AC}$  和水平轴线之间的夹角， $\theta$  表示独轮车的车体和垂直轴线之间的夹角。该系统有  $\alpha$  和  $\theta$  两个自由度，系统的输出状态由向量  $x = (\alpha, \theta, \dot{\alpha}, \dot{\theta})^T$  给定。

系统的参数如下。

- 对于轮盘：质量为  $M$ ，半径为  $a$ ，转动惯量为  $J_M$ 。
- 对于摆杆：质量为  $m$ ，转动惯量为  $J_p$ ，它的重心和轮盘中心的距离为  $l$ 。

求出系统的方程。

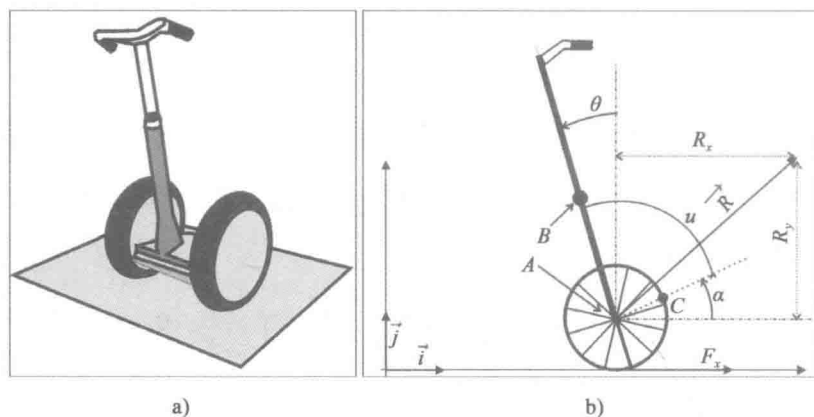


图 1-4 有两个轮子和一个轴的电动平衡车

### 习题 1.8——哈密顿方法

哈密顿(Hamilton)方法只用单个能量函数来表示守恒机械系统的状态方程(换言之,其能量是守恒的)。为此,定义哈密顿函数为系统的机械能,也就是势能和动能之和。哈密顿函数可以表示为自由度  $q$  和相关的运动量(或旋转状态下的动力矩)  $p$  的函数  $H(q, p)$ , 哈密顿函数可以写为:

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q} \end{cases}$$



1) 考虑图 1-5 中的单摆, 摆杆的长度为  $l$ , 它由点质量  $m$  组成。计算系统的哈密顿函数, 并推导出状态方程。

2) 证明: 如果一个系统由哈密顿方程来描述, 那么哈密顿函数是常量。

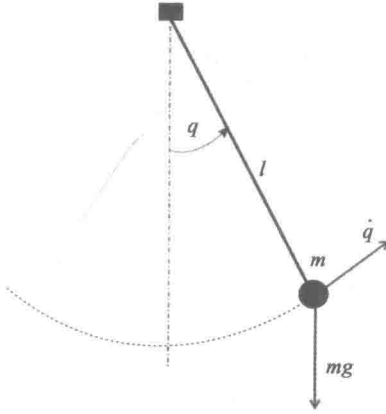


图 1-5 单摆

### 习题 1.9——全向机器人

图 1-6 是有三个全向轮的机器人, 全向轮是在其周围装有许多小滚轮的轮子, 使它可以向侧翼滑动(也就是垂直于它标称的运动方向滑动)。用  $v_i$  表示第  $i$  个轮子的连接点的速度向量, 如果  $i_i$  是轮子运动方向的法向量, 那么由  $i_i$  确定的合成速度向量  $v_i$  对应轮子的旋转向量  $\omega_i$ , 而外围小滚轮的旋转方向则垂直于  $i_i$ 。如果  $r$  是轮子的半径, 那么就可得到关系式  $r\omega_i = \langle v_i, i_i \rangle = \|v_i\| \cdot \|i_i\| \cdot \cos\alpha_i$ , 其中  $\alpha_i = \cos(\widehat{v_i, i_i})$ 。如果  $\cos\alpha_i = \pm 1$ , 轮子就处在它的标称状态, 它就是一个经典的轮子; 如果  $\cos\alpha_i = 0$ , 轮子就不再运动, 处于制动状态。

1) 用  $x = (x, y, \theta)$  表示状态向量,  $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  表示输入向量, 给出系统的状态方程。

2) 画出由下列状态方程描述的坦克模型的控制回路。

$$\begin{cases} \dot{x} = v \cos\theta \\ \dot{y} = v \sin\theta \\ \dot{\theta} = u_1 \\ \dot{v} = u_2 \end{cases}$$