刘彦佩选集

(Selected Publications of Y.P.Liu)

第一编

时代文献出版社

刘彦佩选集

(Selected Publications of Y.P.Liu)

第一编

时代文献出版社

刘彦佩选集（第一编）

作　　者：刘彦佩
出版单位：时代文献出版社

编辑设计：北京时代弄潮文化发展公司
地　　址：北京中关村海淀图书城25号家谱传记楼二层
电　　话：010-62525116　13693651386
网　　址：www.grcsw.com

印　　刷：京冀印刷厂
开　　本：880×1230　1/16
版　　次：2015年10月第1版

书　　号：ISBN 978-988-18772-5-3
定　　价：全套 1978.00元（共计23编）

刘彦佩选集

第 1-23 编总释义

2014 年 11 月 · 北京

选集总释义

经过近 10 余年的酝酿, 现在终于得到了我的选集的一个雏形. 之所以想把自己以及合作的一些工作收集起来, 形成在某种意义上的“巨作”, 是因为我在数学中接触的头绪较多, 兴趣又拉得过广以致远超出数学的范围,一直到今天往往涌出近乎忘却的记忆, 感触良多. 当然, 这个集子限制在数学的范围, 几乎不及其他.

虽然数学兴趣多来自数学本身(至少在一些数学史家的笔端是这样的!), 社会环境、生产水平、以及学术氛围等都决定人们选择所要从事的方向, 尤其是近现代的年轻人.

下面, 就着重以时间延续的次序, 扼要地介绍一些主要专题的发展渊由, 理性的提升, 和后继的启示.

先谈一谈我的大学毕业论文. 所讨论的是一个动态的三选择问题, 目的是确定当时间参数趋于无穷的最优策略. 这个问题是 Bellman(Richard Earnest, 1920–1984, 美国国家科学院院士) 提出的. 在他的专著 [3] 的第 75 页中, 给出问题的形式: 对于 $x, y \geq 0$, 求

$$f(x,y) = \max \begin{bmatrix} A: \ p_1[r_1x + f((1-r_1)x, y)] \\ B: \ p_2[r_2y + f((x, 1-r_2)y)] \\ C: \ p_3[r_3x + r_4y + f((1-r_3)x, (1-r_4)y)] \end{bmatrix}$$

其中 $0 \leq r_3, r_4 \leq 1$, $0 \leq p_3 \leq 1$ 和 $0 \leq r_1, r_2 \leq 1$, $0 \leq p_2, p_2 \leq 1$, 都与时间有关, 以及 A, B 和C 为三种策略.

已经知道混合最优策略 $\{A, B\}$, $\{B, C\}$, 或 $\{A, C\}$ 都是第一象限中的直线. 但很难求出. 当时间参数趋于无穷时, Bellman 认为这些线“无论用任何简单的方法都似不可能求出来”(参见 [3] 的第 239 页). 我的毕业论文就是用积分的方法, 将这些线简单地求出来. 之后, 桂湘云教授在中国科技大学讲授动态规划的课程时,曾提到这个结果.

现在, 时过近半个世纪, 从文献中仍没发现对这个问题研究的任何新进展. 由于当时正处在社会主义建设的热潮中, 人们, 特别是像我那样的年轻人, 都满腔热忱地渴望为国家建设出力, 选择更实际的发展方向. 对于纸上谈兵, 不以为然. 因为没有写成文章发表, 也就没有纳入这个集子中. 只因为觉得这个问题, 无论在管理决策中, 还是在理论上, 都有切实的意义, 希望, 也应该, 终将弄清究竟.

再谈一谈在图书馆被关闭无从查文献的特殊年代, 我被任命负责为第五机械工业部提出一类指挥仪论证的这个小组. 因为要用数字指挥仪代替从苏联进口的模拟指挥仪, 需要论证设计数字指挥仪技术指标的合理性. 理论上, 就是研究系统误差和随机误差伴随信号通过指挥仪, 在输出信号中产生甚么效果. 当时觉得傅立叶级数可视为积分的离散形式,就尝试借助它处理这个问题, 诸如研究了在随机误差为白噪声的情况下, 取样间隔对于输出精度的影响, 提出合理的取样间隔. 这里要提的是, 在数年后图书馆恢复运行, 发现苏联文献中的 z-变换竟然就是傅立叶级数通过简单的变量代替的结果. 虽然这一任务引发出一类非线性的随机控制问题, 也吸引我继续做进一步理论性的研究, 最终考虑到以前的基础和兴趣, 还是选择了回到组合学和运筹学.

下面, 纵览这一套书的内容, 以及相关背景与延伸.

第一编由 5 卷中文文选组成, 含 53 篇文章. 前两篇, 即 1.1 和 1.2, 发表的时间比完成的时间晚近 10 年之久. 它们是从在鞍山钢铁公司生产中提炼出来并予以解决的. 因为当时尚没有数学的学术刊物恢复, 后一篇又恰与丹麦运筹学会会长解决最得意的实际问题思路相近, 才考虑要把我们搞的任务整理成文. 前一篇则是中国科学院数学研究所派人调查 10 余年来所搞的任务, 发现竟然只有这个任务的结果一直在使用.

实际上, 他所解决的是一类特殊的下料问题. 如果用文献中流行的列生成方法, 即使用当时最好的计算机也是无法承受的. 然而, 通过对工艺过程调查和理论力学上的分析, 只要用初等数论中的辗转相除法使得其中的除数每次作必要的调整(那里称为受控辗转相截, 也可称受控更截), 再考虑到工艺上允许的误差, 总可求得一个实际上无余料的方案. 通常比现有方案复杂的多. 进而, 求得方案使得不仅不比原方案复杂, 还在误差允许的范围内无余料.

从数学上, 这个问题就是对给定两个整数 L 和 l, $0 < l < L$, 选择一个正整数 k, 以及 x_i 和 y_i, $x_i + y_i = l, 0 < \alpha \le x_i, y_i \le \beta < l, 1 \le i \le k$, 整数 α 和 β 为已知, 求非负整数 p, $\alpha_{i,j}$ 和 $\beta_{i,j}$, $1 \le i \le p$, $1 \le j \le k$, 使得

$$\min \sum_{i=1}^{p} q_i \tag{1}$$

其中

$$q_i = L - \sum_{j=1}^{k} \alpha_{i,j} x_j - \sum_{j=1}^{k} \beta_{i,j} y_j \ge 0,\ 1 \le i \le p;$$

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_{i,j} = \sum_{i=1}^{p} \beta_{i,j},\ 1 \le j \le k.$$

或等价地，求非负整数 p, $\alpha_{i,j}$ 和 $\beta_{i,j}$, $1 \le i \le p$, $1 \le j \le k$, 使得

$$\max \sum_{j=1}^{k} a_j \tag{2}$$

其中

$$a_j = \sum_{i=1}^{p} \alpha_{i,j} \Big(= \sum_{i=1}^{p} \beta_{i,j} \Big), 1 \le j \le k,$$

满足

$$L - \sum_{j=1}^{k} \alpha_{i,j} x_j - \sum_{j=1}^{k} \beta_{i,j} y_j \ge 0,\ 1 \le i \le p.$$

1.3 和 1.4 反映在当时的 '批林(名彪，中华人民共和国开国十元帅之一，职务曾高至中共中央副主席，坠机亡于蒙古人民共和国的温都尔汗)批孔(名丘, 字仲尼. 中国儒家的鼻祖,尊为至圣先师)' 运动中, 我负责的一个大批判组所干的事. 这个小组中, 除我以外, 还有徐光煇、蔡茂诚、越民义、许国志等. 孙克定有时也参加. 在 1.4 中, 署名车千里. 因为都觉得对儒家一知半解, 对法家也知之甚微, 决定查些古籍, 以借此了解点历史. 例如, 除史书《史记》、《汉书》、《宋史》、《资治通鉴》等有关部分外，主要还有《梦溪笔谈》、《齐民要术》以及《增广智囊补》等. 不料, 在数学史和运筹学思想史方面, 竟发现一些蛛丝马迹. 中国数学史的研究从近代铁路工程师李俨开始. 一则他收藏有关典籍十分广泛, 为后人留下了珍贵的遗产. 再则他通晓古汉语中有关数学的词汇, 为后人继续研究开辟了道路.

在 1.3 中, 隙积术实际上提供了计算装填物所占面积方法. 现在知道, 这就是解组合学中装填问题(2-维情形)的一种方法. 直到今天, 3-维情形的装填问题仍未得到令数学家公认的解决. 在这篇文章中, 主要探究运筹学思想方法的渊由. 因为运筹学的核心在于局部服从全局的思想，或者说通过局部调整以求总体, 即全局，的优化. 这样的思想在中国的历史上应该是屡见不鲜的，只是以前无人从这一角度查阅典籍罢了. 那里所提到的斗马术却是一种典型的二人 0 和博弈.

1.5 和 1.10 主要解决的是求线性规划解的精度问题. 因为当数据在系数矩阵中分布方式不合适, 即使都准确, 用通常的单形(文献中多称单纯形, 它的对应词复合形已用复形代之, 以便相应)法所得的解, 甚至连最高位有效数字与准确解都不同. 这里提供的所有程序都在数学研究所当时最大的电子计算机上得到验证. 1.5 的内容不是来自公开出版物, 而是数学所的内部资料汇编. 当时在国内尚没有出版这类文章的刊物. 在这里, 还附加了编制子程序的框图, 以便更清晰地解读文中十分复杂的程序.

由于在社会上还没有引起对于基础研究的注意, 人们开始考虑这个问题. 于是清华大学邀请吴文俊先生作有关拓扑学在集成电路布线中的应用之类. 即使在数学研究所, 人们也议论他介绍的理论, 竟几乎没有人听懂, 反映对于理论研究仍心存余悸. 当时出于好奇, 也相信只要是科学形态的就能够搞懂, 多少还带点风险, 开始自己读他的文章. 因为没有拓扑学的基础, 不得不自学一些有关一般拓扑, 特别是代数拓扑的书. 同时, 专攻图论中可能与拓扑和代数有关问题历程与现时进展.

因为 Euler 于 17 世纪创建图的抽象模型, 完满地解决 Konigsburg 七桥问题, 导引了拓扑学的形成与发展, 拓扑学从研究图始创建基业是自然的. 判定图的平面性卷入了至少六位国际范围内的数学明星. 例如, Lefschetz(Solomon, 1884–1972, 美国国家科学奖章获得者), Kuratowski(Kazimierz, 1896–1980, 苏联科学院院士,英国爱丁堡皇家学会会员), Whitney(Hassler, 1907–1989, 美国国家科学院院士), MacLane(Sauders, 1909–2005, 美国国家科学院院士), Tutte (William Thomas, 1917–2002, 英国皇家学会会员, 加拿大皇家学会会员), 吴文俊(1919–, 中国科学院院士，第三世界科学院院士). 在 1.6 中, 从改进吴文俊的结果起, 使得可以将判定图的平面性问题转化为在派生图(也称平面性辅助图)上求一个支撑树. 当时, 这个派生图的阶为原图阶的一个二次函数. 值得一提的是 20 年以后, 在 [2] 中, 用 θ-图同样得到我的有关派生图的定理. 但是 θ-图的阶是原图阶的一个指数函数. 派生图是 θ-图的一个很小的子图. 在 1.7 中, 介绍了上面提到的六位在这方面奠基性的工作, 还特别描述了在计算机上实现的算法思想.

在上一个专题研究的过程中, 一直注意从平面发展到曲面的可能性和拓扑学中提到的三个难题：四色猜想，Heawood 猜想和纽结的识别的研究进展. 对于后者中的前两个猜想, 虽然四色猜想通过计算机得到了验证, 至今仍没有给数学界公认的证明, 从理论上尚不能认为已经解决了. 1.17, 1.18, 1.21, 1.22 和 1.25 反映了四色问题的研究深度及其影响. 在 1.12–1.16 中, 除了全面论述 Heawood 定理(只有在 Klein 瓶的情形与猜想的不同!)的证明外, 还特别介绍了有关图在曲面上嵌入的存在性, 以及图的最大与最小亏格方面研究的水平. 关于纽结将在第六编中谈到, 也可参见 3.52.

对于前者, 因为曲面与平面(即 2-维欧式空间!)不同, 它不是空间而是一类 2 维流形, 不能将平面的理论与方法直接演化到曲面上. 首先在 1.8 中揭示通过在二重图上求出标准 Euler 回, 在其上建立一种非拓扑的运算, 使得每运算一次恰提高一个不可定向亏格, 一举确定了图的不

可定向最大亏格. 接着在第三编的 3.1 中, 建立一种约化准则, 使得能够确定出可定向情形的最大亏格. 由于不能像不可定向一样得到简单的公式, 引出了之后 30 余年仍然不能完满这方面的研究. 在 1.11 中, 用这种方法提供了确定一批典型图类可定向最大亏格的简单公式.

最近, 我的一名学生写文章提到确定图的不可定向最大亏格的公式是 Edmonds(Jack R., 生于 1934 年, 曾获(1985)冯诺曼理论奖)于 1965 年给出的 [9]. 但没有出处. 从文献 [13](未纳入这里,待补遗!)可以看出, 只是在此文的基础上可以导出 1.8 中的公式. 而且, 1.8 所提供的方法, 在 9.1, 9.22, 13.21, 15.12, 16.5, 17.23, 18.24, 以及 19.8 等中, 现在已经可以看到其普遍意义.

在确定一个图的亏格(即最小亏格)方面, 没有继续沿着商嵌入(或者说, 覆盖空间方法)的途径去做, 因为觉得要用更具普遍意义的方法, 例如寻求在图的嵌入上的变换, 使得到在更小亏格曲面上的嵌入. 直到联树法(实际上, 1.8 和 3.1 已经蕴含了联树法的核心!)的出现, 这一想法才初见端倪. 那时只用推演简单地完成了确定图 $K_n - K_3$ 最小亏格的两个未决情形, 参见 1.9, 1.16 和 3.2.

此后, 在加拿大滑铁卢大学工作两年, 与 Tutte 共事. 虽然对 Tutte 早期工作有较系统的了解, 到那里以后才知道, 他自己把主要精力放在对平面三角化的计数上已经近 20 年了. 目标是确定出着色平均. 取得了一系列的进展. 虽然要达到这个目标比四色问题更难, 我已经意识到在这个过程中会带来多方面的理论提升, 决定全力投入只能暂放下其他. 1.23, 1.24, 1.26, 3.3–3.9, 3.11–3.13 基本反映我在那里做的主要工作.

另外, 3.3 和 [14] 在 6.4 和 10.4 有所反映, 利用 Euler 曲面示性式导出有某种普遍意义的两个不等式. 由此进一步导出的结果中, 一些亏格 0 的特殊情形恰是 Kotzig 的相关结果. 审稿人建议将二者合为一篇, 因不想重写，就收回后者而只发表前者. 3.10 将 1.1 中的派生图的阶由二次降到线性. 在滑铁卢期间, Tutte 连续做了 12 次报告, 介绍他在图论方面的学术生涯,包括成就、环境与启示等. 我把他给我的讲演稿带回国, 经整理译成中文就是 1.9, 1.10, 1.27, 1.28, 1.32, 1.33. 近 20 年后, 以同样的题目的书由牛津大学出版社出版 [16]. 关于 Tutte 的生平及学术思想, 可参见 2.8. 这是应邀为 *世界数学家思想方法* 一书所写, 因为我觉得由此可以找出 Tutte 之所以取得那样多重要学术成就的脉路.

在滑铁卢还结识了 Hammer(Peter Ladislaw, 1936–2006, 布尔优化的奠基人), 他对我在图的平面性方面的工作尤感兴趣, 因为他看到与他当时所搞得二次布尔优化关系密切. 在我要回国之前, 他专程来访, 邀请我访问罗杰斯(Rutger University, 美国新泽西州立大学). 从那时起到他被车祸仙逝, 他一直是该大学运筹学研究中心(RUTCOR)的主任. 我曾多次访问这个研究中心, 以及第一次访问之后不久由罗杰斯、普林斯顿(Princeton University)和 贝尔(Bell Laboratory) 联合组建的离散数学与理论计算机科学研究中心(DIMACS). 从 1.36, 1.37, 1.53, 2.1, 和 2.2 可以看出我们的一些合作. 他同意将这些文章以中文形式发表. 还有 3.19, 3.24 和 3.29 也都是在那里做的. 在 3.19 中, 独立地以布尔优化的方法同样得到 1.7 中的派生图. 而在 3.24 和 3.29 中, 前者第一次得到线性度(边数)的派生图和后者给出到非平面的延伸. 虽然 3.24 已被其后的 6.7 以及 10.7 的结果大为简化, 为了显示历史的演变, 还是将它放到此集子之中.

回国之后, 除继续一些未完成问题外, 如 1.35 就是Tutte 向我建议考虑的. 最终结果出乎我们俩意料的复杂. 直到现在, 我仍然希望能将之进一步简化. 主要精力放在探求一些类型地图计数函数满足的带一个泛函(后来, 被称为*介子泛函*(meson functional))的方程, 以便通过计数和进一步直接求解. 虽然介子泛函与 Rota(Gian-Carlo, 1932–1999, 美国国家科学院院士)用

过的阴影泛函都可视为 Blissard(J., 19 世纪中, 生卒年份不详) 符号算子(见文献 [5], [6]), 但后者是从函数空间到它自己的变换 [15], 而前者则是从函数空间到向量空间. 例如, 在 1.24, 1.29, 1.30 和 1.41–43 中出现的, 已经给出直接的解法, 得到了相应的计数函数, 但在 1.23, 1.34, 1.35, 1.50, 1.51, 2.3, 2.6 中的, 无论通过计数还是直接在我退休前都没有得到解的形式.

在 1.39, 1.40 和 1.52 中, 只讨论至多 3 个参数的一些计数, 使得到的计数函数的每一项不是无和式就是全正有限和. 注意, 1.52 中的偶图是早期的用法. 现在应为二部图, 即圈长均偶数的图. 多称节点次均偶数的图为偶图. 连通的偶图为 Euler图. 1.49 提供此前所发现的各种方程的一个总结.

另外, 1.38, 1.45–48 反映那时顺带作的有关一般图论方面的事情. 1.45 提供判定一个图有 Hamilton 圈的一个充要条件, 由此可以直接导出 Dirac, Ore, 以及当时最强的范更华条件 [10]. 还要提一提 1.44 和 1.28. 前者是 *科学通报* 中的一个通讯, 3.28 是它的英文版(当时在中国只有 *科学通报* 和 *中国科学* 允许一篇文章同有中、英两种版本!). 后者为全文. 他的第一稿是李祥贵写的. 因为推理不能接受, 考虑到董峰明也在做这个问题, 就让他也写一稿. 最后, 由我以董稿为主成文. 1.47 为颜基义和堵丁柱所写, 我只是给他们提供了一些素材. 在 2.17 中, 除有关布尔优化的部分和各段中有关历史的注记和评论外都是由堵丁柱所作.

在我的硕士研究生(或博士前的硕士阶段)中, 对于图的荫度(如魏二玲等 2.24), Hamilton 性与离心度(如毛林繁 2.28, 5.5), NP-完全性(如于濂 2.10), 对称有向图(如薛春玲 2.38), 图上的标号与带宽(如薛春玲 2.35, 贺丹 2.43, 2.60)等方面, 也都有新的研究结果.

第二编含 75 篇中文文章. 在第一编已经提到 2.1–3, 2.6 和 2.8. 早在滑铁卢时, 经 Hammer 介绍认识了 Simeone(Bruno, 意大利组合优化专家), 那时他正与 Hammer 合作在布尔优化与图的联系方面打开了新局面. 他回国后不久, 就邀请我到罗马大学(主校)工作. 正值他与 Morgana(Aurora), Marchioro(Paola) 和 Petreschi(Rossela) 合作研究图在平面上的纵横嵌入使得每一条边恰有一个折的条件. 我与他们结伙一段仍无头绪, 就改变思路不研究恰一折而研究至多一折. 这样的提法本来自理论上的考虑, 之后竟还被该大学的超大规模集成电路(VLSI)设计专家接受. 此后的研究, 特别是前期, 出乎预料的顺利. 虽然在法国, 北欧, 以及北美有人已经从计算经验判断每边至多 4 折是没有问题的, 但没有证明. 我们证明这个判断之后, 及改进到 3. 接着, 又得到了除正八面体图外, 至多 2 折就够了. 并且, 进而研究各种算法实现的问题. 关于至多 1 折可嵌入性, 探求禁用次形中遇到了麻烦. 这就是它们的无限性. 经过一番分析, 最终选择与圈或上圈关联的构形(不是次形!)获得了成功. 这些就组成 2.4(其中的“垂-平”就是此后的“纵横”!), 以及 3.33–3.35, 3.39, 3.51, 3.58, 4.13, 4.62 等.

进而, 如 2.7 和 3.44, 以及 3.48 所示, 考虑无折的情形, 首先注意到如果没有次为 2 的节点, 就不可能有无折的嵌入. 然后引出研究 2 次节点的分布. 通过必要性分析, 将之转化为匹配问题, 乃至运输问题. 最终, 也得到了完备的禁用构形集. 它们仍然是与圈, 或上圈相关联的.

在 2.47–2.49, 4.36 和 5.36 中, 2.47 为 *数学辞海* 第二卷中组合学部分的序. 其中, 我第一次公开提出“数学所研究的对象是数(shū)与数(shǔ)”. 2.48 是组合学中图论分支的序. 2.49 是一个高等教育教科书系列的序. 解释了“博学之、审问之、慎思之、明辨之、笃学之”. 4.36 为 *Discrete Math.* Vol.123 的序, 其中提到几个鲜为西方人知源自中国的组合学问题. 5.36 为与陈建二等合作, *Discrete Applied Math.* 杂志一期的序. 5.28 为冯衍全与他在博士研究生时的导师徐明曜所作, 因为和我讨论过, 而将我插入作者之内. 因为与我熟悉的商嵌入,覆盖空间方法有

关, 故纳入此集.

自从我的专著 图的可嵌入性理论(参见第六编) 和 *Embeddability in Graphs*(参见第十编) 之后, 就准备以此为基础供博士研究生选择研究方向, 但从不指令. 例如, 因为有 2.9 和 5.34 的基础, 李安平的主攻方向就是纯组合集合论的. 欧阳克毅是从证明 Ringel 关于 2 连通极大二部平面图分解为两个树的猜想始(参见 2.11), 研究带限制的子图的存在性问题.

Berman(Kenneth, 美国辛辛那提大学教授) 与我讨论, 在他访问北方交通大学期间, 基于我们共同的兴趣, 完成了 4.2 和 4.3.

由于 1.8, 3.1 和 1.11 的工作基础, 我意识到在图的可定向最大亏格与上可嵌入性方面, 需要也有可能, 在三年左右的时间内, 取得有理论意义的进展, 使我在拓扑图论方面情有独衷地希望引起他们对这两个专题的注意. 例如, 2.12–2.14, 2.16, 2.18, 2.20–2.23, 2.27, 2.32, 2.33, 2.41, 2.63, 2.72, 12.1, 16.8. 以及, 3.56, 4.4, 4.10, 4.11, 4.14, 4.18, 4.20, 4.21, 4.38, 4.46, 4.54, 5.4, 5.22 体现了黄元秋的研究进展. 尤其是他所开辟的与图的各种组合或拓扑不变量的联系是我在开始时远没有预料到的. 例如, 4.17, 4.26, 4.27, 4.34, 4.35, 4.50–4.52, 4.57, 4.60, 4.61 体现了李德明的研究进展. 从 5.37 和 16.6, 可以看出何卫力在上可嵌入性方面的工作. 从 2.57, 12.11, 16.10, 16.14, 16.17 和 19.10, 可以看出董广华在这方面的工作. 另外, 陈仪朝在这方面也有工作. 例如, 13.7, 18.11 和 19.1. 一些硕士研究生在这个方向上已开始做工作. 例如, 王惠艳(2.68), 柴钊(12.3), 等.

在图的一般曲面可嵌入性方面, 刘莹基于 1.8, 4.1 中提供的标准 Euler 圈, 和 6.4, 10.4 中提供的 Jordan 定理的多面形形式的思路, 分别建立了在任给亏格的曲面上, 判定可嵌入性的准则, 现在看来仍然是这方面的首见(4.1). 后来, 我发现这两个判准中有一个共同的疏忽, 从而引出了 17.23 中两条独立地研究图的一般曲面可嵌入性的途径. 她的相关工作, 还可参见 3.53, 4.6, 4.7, 4.12, 4.15. 由于刘同印热衷于图的双圈覆盖猜想, 我一遇到这个问题就意识到应该是从图的曲面嵌入引伸出来的, 但此前人们总是注意它的图论意义, 于是我发表一文(4.41)澄清了双圈覆盖与曲面嵌入的关系. 其基本原理来自 1.8 和 4.1. 在 1.8 和 4.1 的基础上, 提供了一个算法, 经过刘同印的计算, 居然一直得不到这个猜想的反例. 但至今还是证明不了它. 他只能做一些与之相关的工作, 例如 4.19, 4.23, 4.31, 4.39, 4.48, 5.2, 5.15, 5.24.

从双圈覆盖(4.41)的研究使我意识到需要将嵌入依与双圈覆盖接近的程度分类. 这就引出了研究图的最大与最小强或弱亏格的问题. 因为最小亏格在那时, 只有覆盖空间(源自拓扑),或者用我们的语言商嵌入(电流图与电压图均为特例!), 可以利用. 然而只能适用于特殊有较高对称性的图类. 现在有了联树法, 虽然理论上可用, 由于问题本身的难度, 仍尚未能有效解决普遍的问题. 因为早期关于最大亏格的工作(1.8 和 3.1)无需考虑对称性, 自然使我们选择强或弱最大亏格. 这方面的工作, 主要是由魏二玲完成的, 例如 2.46, 2.50, 4.26, 4.59, 5.25, 5.33, 5.45, 12.13, 13.5, 16.6, 17.8, 18.9. 从中可以看出, 比确定最大亏格又增加了新的难度.

在进一步取得一系列关于带根平面地图计数的结果, 例如 1.29, 1.30, 1.35, 1.39–43, 以及 2.6 等之后, 我开始考虑由此引出的渐进估计, 以便了解一类地图在比它广的一类地图中所占的份额, 或者说前类地图在后类地图中出现的概率. 颜基义对此项工作很感兴趣, 就由他主笔完成了 2.5 以及, 3.37. 除了曾用过的方法, 他还利用了复变函数中的 Gauss 积分. 有些结果, 在有限的情形下, 似绝难以预料.

同时, 主要在泛函方程方面(例如, 2.44, 3.11–3.15, 3.25, 3.36, 3.40,), 继续留意新的方程形

式, 以及直接求解的可能. 例如, 2.19, 2.36 和 3.47. 在平面地图的计数及其扩充, 色和与梵和等方面, 进一步发现新的函数方程外, 还特别注意已有结果的简化, 以致到最简(例如, 3.4–9, 3.16, 3.17, 3.20–23, 3.26, 3.27, 3.31–32, 3.38, 3.41–43, 3.45[董峰明], 3.46, 4.9[李德明], 4.44[吴发恩], 16.5, 19.8).

此外, 我也开始注意非平面类型的地图计数(例如, 2.45, 2.51, 2.53, 2.61, 2.69), 先对一些在某种特殊性之下具有普遍性的图类(例如, 2.66), 从总体上或小亏格的曲面开始(例如, 2.67).

自我的专著 *Enumerative Theory of Maps*(参见第十一编) 完稿后, 开始围绕这一方面培养博士研究生. 这本书的中心是围绕带根的平面地图, 也提及一些对曲面和无根地图的调查. 首先, 我仍然希望进一步将平面地图的计数在提取最简单的显式, 增加计数参数的数目, 以及导出参数方程方面有新的发展. 蔡俊亮是第一位选中这个方向的, 使这三个方面的研究水平都有明显的提高. 他的工作可从 2.31, 2.52, 2.55, 2.56, 2.58, 4.8, 4.33, 4.55, 5.1, 5.8, 5.23, 5.35, 5.52, 12.5, 12.17, 16.7, 18.8, 19.9 看出. 此后, 许燕(参见, 16.11, 17.4, 17.5, 19.4) 和刘文忠(参见, 16.2, 17.3, 17.6, 17.10) 也取得了一些新的进展.

接着, 就要将平面往非平面发展, 特别是在准确计数方面, 因为这是我们一直所关注的. 诸如渐近计数如 [4], 借用别处已有结果表示计数如 [8] 和 [12], 以及计算计数如 [17] 等对于我们均为附带的. 在这方面, 即使对于射影平面和环面, 计数方程的独立提取都远比平面困难. 至今, 仍然依赖平面情形的计数结果, 还是不容易. 任韩在小亏格曲面的地图计数方面打开了新局面, 虽然结果有的还过于复杂, 但它们的取得绝非容易. 他在这方面的工作可参见 2.15, 4.22, 4.24, 4.29, 4.37, 4.40, 4.42, 4.43, 4.49, 4.56, 4.58, 5.6, 5.12, 5.13, 5.16, 5.47, 5.48, 5.51, 5.54, 12.7, 16.1, 18.7.

继之, 在色和以至梵和方面, 即使对于平面的情形, 由于一个多项式参数的卷入, 增加了提取方程的难度. 我希望从广度和深度方面都能得到发展. 郝荣霞和李赵祥在这方面都取得了新的进展. 例如, 在 2.25, 2.62, 5.14, 5.20, 5.21, 5.26, 5.30, 5.38, 5.43, 5.50, 5.53, 5.54, 13.2, 13.8, 17.1, 17.2, 17.7 中, 反映了李赵祥的工作. 郝荣霞连同其他一些方面的工作, 可参见 2.30, 2.65, 2.75, 4.30, 4.47, 5.17–19, 5.29, 5.35, 5.39, 5.41, 5.44, 5.46, 18.5, 18.6, 19.2, 19.3.

在我的专著 *组合地图进阶*(见第九编) 中, 开始正式提出处理图在曲面上嵌入的联树表示法, 和对于具有对称性的地图考虑, 以及从非对称化的地图到恢复对称性(如果有的话!), 参见, 例如 2.71, 2.72, 和 2.74. 由于它们的普遍性和可接近性, 使我相信纳入至少适于博士生的选题. 毛林繁通过引进半自同构(由这些书中给出图的半边表示所蕴示!)和利用群的一些结构性质, 成功地得到相同基准图的根地图与曲面嵌入之间的数量关系, 参见例如, 2.54, 5.11, 5.31, 5.32, 5.42, 5.49, 13.3. 现在, 我仍然希望看到有人在寻求根地图依自同构群阶的分布方面的一批工作. 因为在书中已经提供了确定地图自同构群的一个很有效的算法, 而且一旦这个分布被确定, 即可得到不同构无根地图的相应数目. 另外, 这种分布还有组合上的特殊意义.

在联树方面, 之后的岁月, 虽然我从未怀疑过联树的普遍性与有效性, 也曾得到过来自国内以致国外的质疑, 却得到了多少出乎人们预料的发展. 我需特别指出的是第一位用联树法处理嵌入亏格分布的竟是赵喜梅(参见, 2.64, 12.14, 16.12), 她那时是一名硕士研究生. 继之, 就是李立峰(2.70)和朱子龙(12.4), 他们也是硕士研究生.

在博士研究生和研究工作者中, 万良霞所研究的图类远超过当时人们用其他方法所考虑的范围, 她的工作可从 12.2, 13.6, 16.3(其中有一个递推式由冯克勤解出!), 18.3, 19.12 中可以

看出. 继之, 杨艳(参见, 12.16, 16.18, 18.4) 和邵泽玲(参见, 16.4, 19.5, 19.6). 陈仪朝在这方面的工作重点则是延伸到确定和估计图的平均亏格. 例如, 可参见 12.15, 13.4, 17.9, 18.1. 曾建初则用之推导有关亏格的等式与不等式, 例如, 16.16, 19.11.

另外, 郝荣霞还将联树法的利用拓广到研究有向图的曲面嵌入. 万良霞和邵泽玲还正在致力于用联树法研究图的亏格(即最小亏格!). 这些更使我等待, 而且也相信会, 在不久的将来乐观其成.

应该特别说明, 按从 1958 入大学起算工龄至 2009 退休计 51 年整. 除大学 5 年外, 前 31 年 (1963–1993) 在中国科学院做研究工作, 以论文为主和后 15 年 (1994–2009) 在北方(后改京)交通大学作教学工作, 以研究专著为主, 特别是满足博士研究生之需. 我的第一本专著是 1994 年问世. 前面所谈的基本是全部论文的情况. 除第一至五编所包含的中文文选第 1–10 卷和英文文选第 1–15 卷外, 还有第十二编和第十六编分别含中文文选第 11 卷和第 12 卷, 第十三、十七、十八、十九编分别含英文文选第 16、17、18、19 卷.

从第六编起到第二十编, 每一编都至少含一本专著. 关于写书还得提到我进入中国科学院之初, 那时研究员条款中, 直到现在都使我记忆犹新的是要有研究专著, 编著不能算研究成果. 虽然当时还觉得遥不可及, 但已经刻骨铭心, 以致成为我的终身追求.

第六编和第十编是同一个专题. 它们分别是中文专著 图的可嵌入性理论(含 6.1–6.15) 和英文专著专著 *Embeddability in Graphs*(含 10.1–10.15). 先完成的是后者. 被克鲁维尔(Kluwer)接受之后, 科学出版社要把它译成中文. 我借机直接用中文重写, 以补英文中的不足. 并且在英文之先问世. 在英文出版之前, 又有一次机会改进中文中的不足. 因为这些不足都不是本质的, 无需列出.

这两本专著中, 除我本人已经发表过的理论结果外, 主要含以下值得一提的新结果. 例如, 在 6.2 和 10.2 给出从一般树出发, 求一个图, 只有一个面, 嵌入的思想.

在 6.3 和 10.3 中, 提供图上一种新的同调与上同调理论, 并且发现了同调与上同调为 0 的图论意义. 这就使我们能够一举导出 Lefschetz 通过图的双圈覆盖, Whitney 通过对偶性, MacLane 通过圈基, 研究图的平面性的三个表征定理.

在 6.4 和 10.4 中, 发现了使 Whitney 平面嵌入唯一性定理, 和 Tutte 的平面凸嵌入存在性定理, 分别能刻画唯一性, 和凸可嵌入性, 的条件.

在 6.5 和 10.5 中, 将 Tutte 有关实数域, 和吴文俊二元域, 链群上, 上同调的结果, 统一到二元域向量空间上. 但其对偶形式, 至今仍有待研究.

在 6.6 和 10.6 中, 基于 6.3 和 10.3 给出的同调与上同调定理, 以一种至今看来, 仍然是最简单的方式, 证明了高斯(Gauss, C.F.)刻画一个序列, 是否为纽结在平面上的一个投影, 的猜想 [11]. 此后又发表一篇这方面的文章(参见 3.50).

在 6.7 和 10.7 中, 最终证明了, 平面性辅助图的边数, 也不超过原图阶的, 一个线性函数, 并且给出这个函数系数的一个上界. 达到这样一个, 至今仍然是最好的结果, 经过了约四分之一世纪的历程. 例如, 1.7, 3.10, 3.18, 3.19, 3.24, 3.29 等. 虽然 3.24 已经达到了书中的基本结果, 但令人费解或错处较多, 很不易阅读, 书中的形式则简单, 而且只要弄清基本概念, 我个人觉得极易阅读.

在 6.8 和 10.8 中, 提出图的纵横可扩张性, 可嵌入性和可实现性, 三个等级的概念, 进而纵横凸性, 也产生着三个层次的概念, 从理论上建立了相应的判别准则. 事实上, 只对于扩张性,

给出了完满地, 有效解决.

在 6.9 和 10.9 中, 分别利用 2.7 和 3.44 与 3.48 作为理论基础.

在 6.10 和 10.10 提供的判定两个多面形同构有效算法. 在因特网上, 一位德国计算机科学家的研究生, 曾断定这种算法是不实际的. 从第九编里的两部专著中可以看出, 由这种算法所导出的, 却都是与多面形棱数成线性关系的算法, 并且已经在计算机上实现. 它们的程序是王涛编的(参见 19.7).

在 6.11 和 10.11 中, 主要分解的原理, 都是基于辅助图新作的.

在 6.12 和 10.12 中所讨论的曲面上的可嵌入性是由 1.8 和 3.1 引伸出来的.

在 6.13 和 10.13 中, 提供一些与嵌入相关的优化问题, 基于本书基本理论的解法, 和有效性研究.

在 6.14 和 10.14 中, 由 6.3(或 10.3) 的同调与上同调定理, 和由 6.5(和 10.5) 的基于辅助图的定理, 都导出了判定拟阵图性, 或上图性, 的新准则(参见, 例如 4.28).

在 6.15 和 10.15 中, 基于 6.3(或 10.3) 与 6.6(或 10.6) 给出的理论, 导出纽结的一个, 新的多项式拓扑不变量, 同时推广了图论中的 Tutte 多项式, 和拓扑学中的 Jones 纽结多项式(详细情况, 还可参见 3.52).

从这两部专著, 以及之后的发展可以看出, 由 1.7 所引发出来的, 在算法有效性方面的, 纯粹数学理论上的分析, 已经足以形成一部专著. 考虑到还需要充实有关算法实现方面的研究, 和还有更多迫在眉睫的专著等待完成, 一直未能动笔.

第七编包含两部中文专著: 纵横嵌入术 和 运输网络术. 如果说第六编和第十编是以纯粹数学理论为中心, 那么本编的两部专著, 则是以应用数学理论为侧重点.

前者由 7.1–7.9 组成. 它的理论工作基础, 参见诸如, 3.49. 当时主要考虑, 在超大规模集成电路, 人们倾向用纵横嵌入, 根据这一背景的实际, 提出一些可接近的数学模型. 通过对这些模型的定性和定量分析, 以致求解的研究, 形成具有某种指导意义的理论与方法.

后者由 7.10–7.18 组成. 它的理论工作基础, 参见诸如, 3.59. 本书的思想路线, 是从网络上运输, 这样一个十分实际的应用数学方面的主题, 演变到解决一些典型, 甚至在数学本身(或者说, 纯粹数学!)的研究中, 也曾占有地位的问题的, 一种具有一定普遍性的方法, 以向人们揭示, 应用数学对于纯粹数学的重要性. 其核心在于, 先引进单向网络上的运输问题, 论证了在基本圈上调整, 即可得最优解. 以此为基础, 在双向网络上, 导致我国的图上作业法. 虽然图上作业法, 是中国邮路问题的理论基础, 国外只注意后者而忽略前者. 事实上, 本书表明, 不仅图上作业法的原理, 与网络流理论是等价的, 而且前者比后者, 更具有理论上的优越性.

可惜在书中, 并没有给出有关在双向网络上的, 运输问题解法的有效性. 直到现在, 我仍然相信, 也想亲手将这一任务完成, 总是不能转到这方面来. 一旦这一任务完成, 就可以考虑第二版和英文版了.

另外, 我的前期工作, 已经有一批, 用禁用构形, 刻画某种全局性质(例如各种可嵌入性, 或最优性等)的存在, 而这种构形, 一般不是曾在文献中狂热一时, 的次形(如果不考虑收缩运算, 就是子形), 也曾想通过禁用构形综合为一种理论, 但觉得应该有待在着色方面取得更进一步的研究进展.

第八编与第十一编为同一个专题, 分别含中文专著 数组合地图论 和英文专著 *Enumerative Theory of Maps*. 它们分别由 8.1–8.13 和 11.1–11.12 组成. 因为后者先于前者, 在前面曾提到,

这里重点谈一谈前者. 最重要的新结果, 是在 8.2 中给出的泛 Halin 地图的, 一类亏格多项式. 它是当时存在的亏格多项式中最简单的, 从而也是最易计算的. 此外, 8.8 中确定 Euler 无环平面根地图, 节点剖分计数的泛函方程, 比以前简单了, 和 8.9 中, 给出了单节点曲面根地图, 以棱数为参数计数函数的一个显式.

第九编含两部中文专著: 组合地图进阶 和 地图的代数原理. 它们分别由 9.1–9.10 和 9.11–9.25 组成. 前者中的"进阶" 是指从专著 *Introduction to Combinatorial Maps*(将在第二十编中看到), 作理论上的提升. 也许在 1.49 中是第一次, 公示我的用局部对称性, 描述一个地图的理念. 在 9.1 中, 则是第一次, 将图也纳入用局部对称性, 描述一个组合构形(或者系统)的范畴. 也是第一次, 抽象出有限递归原理, 和强有限递归原理(它们在有限数学中的作用, 与数学归纳法在无限数学中相当!), 以及曲面闭曲线定理(可以视为 Jordan 公理, 即平面闭曲线定理, 在曲面上的推广!). 在 9.2–9.6 中, 进一步建立, 地图在曲面上的不变量, 及其依此之分类. 9.7 和 9.8 分别提供地图和根地图的, 组合不变量, 以及基于它们之分类. 9.9 和 9.10 分别讨论地图和根地图, 在给定边数之下, 组合不同构的数目.

所谓嵌入的联树模型, 虽然可追述到 1.8 和 3.1, 第一次明晰的表述式是在 9.1 中, 以算法的形式出现的. 此后按时间序, 赵喜梅、李立峰、万良霞、陈仪朝、郝荣霞、邵泽玲、杨艳、曾建初等, 成功地用之研究, 各种有关图的曲面嵌入与亏格的问题. 以致王涛将之连同我的同构算法, 在计算机上一并实现, 使得列出参数较小时, 所有组合上、拓扑上、或代数上不同的根地图、地图、以及嵌入.

在这些工作的基础上, 为答国内外朋友的疑惑, 使我不能不完成, 本编的后一部专著. 除了在 9.11–9.21 中, 将 9.1–9.10 的内容, 澄清和重组外, 特别增添了新内容 9.22–9.25. 其中, 9.22 也可参见 12.10.

第十编虽然与第六编是同一个专题, 但是独立地写的, 而不是直接翻译.

第十一编虽然与第八编是同一个专题, 但是独立地写的, 而不是直接翻译.

第十二编由中文文选第 11 卷和两部中文专著: 运筹学导引(上篇) 和 纵横布局论 组成. 中文文选第 11 卷包括 12.1–12.17. 因为除 12.6, 12.8 和 12.9 下面将会提到外, 全在上面提到了, 仅谈一下这两部专著.

前者包括 12.18–12.27, 通常被认为是一本介绍运筹学的书, 只能编现有文献中的结果. 一旦读起来, 就会发现, 实则处处渗透, 我本人近半个世纪, 的研究心得. 例如, 线性规划可以看作, 在任何域(包括有限域)中, 作为 1.7 中模 2 规划的自然推广. 一般的优化, 都可以在有序集上进行. 尤其是 12.22, 12.24, 12.26 和 12.27, 在流行的有关运筹学的书中, 都未曾见过.

后者包括 12.18–12.33. 在各种纵横嵌入存在性，或最优性的理论完成后, 本书的中心任务在于，确定节点和边, 在平面上的几何位置. 这些是通过建立相应的方程, 给出合适的求解算法, 来实现的. 进一步地, 还可参见 4.32 和 5.3. 由此基础上, 曾引起对一些, 具有各种普遍性的, 图的不同侧面,的研究. 例如, 傅超(2.29, 2.39, 2.42), 于紫薇(2.37, 2.40), 万良霞(2.59, 5.9), 姜伟(12.12), 赵鲁闽(16.3), 王立东(16.15) 等.

在 14.11 和 17.19 中, 将会看到由于新曲面模型的发现, 使得这一理论, 可以延伸到任意曲面, 从而避免分层多, 带来的困难, 实现在 1.16 中我提出的, 以打洞代替分层的夙愿. 虽然可以想象, 还会带来别的困难, 毕竟总能与分层相得益彰. 进而, 考虑线的宽度问题, 使得真正实现 VLSI 有关布局设计的自动化. 到那时, 将会看到面貌全新的也许不止一本专著.

第十三编由英文文选第 16 卷和专著: *Theory of Polyhedra* 组成. 其中英文文选 16 卷由 13.1–13.8 组成和这个专著由 13.9–13.23 组成. 前者, 除 13.1 外, 全在上面提到了. 而 13.1 与 5.55 同为魏二玲所作. 因为我为国际离散数学杂志审一稿, 已经推荐发表. 但我感到他们的结果不够深入, 就与魏二玲讨论, 他很感兴趣. 当取得结果已经比较满意, 就整理成文也投到这个杂志. 但估计约 2 年后, 主编来信说, 文中的结果与别人的有重, 问是否可以合成一篇. 由于我们当时并不知道他们的结果, 又觉得即使有的结果一样, 证明不会相同. 因烦于不十分必要的通信, 就附那位主编的信, 改投国内英文刊物. 事实上, 至今我们仍未见到他们的结果.

后者, 即由 13.9–13.23 组成的专著, 只是源于国内外朋友(包括文章的审者!), 对于我的联树法提出的质疑, 觉得有必要在理论上, 澄清流行的文献中, 一些容易引起模糊和混肴的概念, 顺便也初试一下, 我的数学一体观(辩证唯物观的一种体现!). 这就是将有关曲面、嵌入、地图等都统一到多面形. 进而, 单面形(这一点是此后的事!).

第十四编只含专著: *Topological Theory on Graphs*. 由 14.1–14.15 所组成. 在 13.9–13.23 的基础上, 我第一次明确地, 将一个图用多面形的一个集合表示, 使得我以前在一个图上所建立的, 同调与上同调理论顺理成章, 避免读者的误解 [1]. 但是仍未发现吴文俊-Tutte 引发的上同调论对偶, 相应的图上结构, 之准确形式. 另一个促使我考虑这本专著的, 是前面提到的那篇文章 [2].

第十五编只含专著: *General Theory of Map Census*. 由 15.1–14.18 所组成. 因为在地图计数理论上, 与以前有质的进展, 例如一些曲面上地图计数、色和、梵和等, 更具有普遍性结果的发现, 得到了一个图的上地图, 与它的曲面嵌入之间, 的准确数量关系, 使得将图、嵌入与地图的计数, 有机地联系在一起, 以及地图计数本身的, 从平面到非平面, 和从非对称到对称的发展, 使得我不能不考虑, 形成以地图计数为中心的, 更具普遍性的理论.

第十六编由中文文选第 12 卷和中文专著: 数组合地图论(第二版) 组成. 其中中文文选第 12 卷包括 16.1–16.18 和 数组合地图论(第二版) 包括 16.19–16.32. 因为前者全已提过, 这里只谈后者. 由于第一版问世之后的研究进展, 所有带普遍性的地图类的计数, 都从平面逐步转到曲面, 已经标志新阶段的到来, 为便于以后的发展, 不能不考虑, 出版第二版. 这就是它被问世的背景.

第十七编由英文文选卷 17 和中文专著: 图的可嵌入性理论(第二版) 组成. 前者包括 17.1–17.10. 他们已经被提到了. 后者含 17.11–17.21. 之所以将他们形成一部专著, 主要由于完成了, 自第一版问世以来的, 一个表征图在给定亏格曲面上, 可嵌入性的夙愿.

第十八编由英文文选卷 18—卷 19 和专著: *Elements of Algebraic Graphs* 组成. 前者包括 18.1–18.11. 其中, 只有 18.10 上面没有被提到. 这是我在与 Hammer 共事时, 从他的一个有关图的完全二部子图分解猜想引起的, 有一个证明的轮廓, 在董进全攻读博士期间, 让他考虑这个猜想, 并没有告诉我的证明思路. 因为他的思路与我的不同, 在最后行文时, 采用的是他的. 在此基础上, 他延着这个方向, 提供了给定二部完全子图类型的分解, 以及相关算法. 此外, 他还完成了诸如, 4.45, 4.53, 5.10, 5.27(在算法上曾得到张存权(C.Q. Zhang)的帮助), 5.40. 我本人的那个证明, 已拟纳入与 Hammer 等合编的, 有关布尔优化的书中, 但因 Hammer 被车祸突然离世, 至今我仍腾不出手将之继续完成.

后者包括 18.12–18.30. 自上个世纪 70 年代以末, 我从充分研究图的平面性入手, 在获得理论上堪称新结果的基础上, 试图扩展到非平面这一更为艰难, 也更为复杂, 但确十分广阔, 的

方面. 至今, 所有谈论这方面内容的书, 都是借助代数, 如矩阵和群的基本概念, 与拓扑直观的一些手法, 研究图的结构性质.

本书反其道而行之, 则是从调查不对称对象本身, 的局部对称性着手. 在书中, 只是以图和地图为对象, 用它们的局部结构对称性, 揭示它们的内在的全局性质. 在 18.12 中, 提供基本概念形成的渊由. 通过单面形研究多面形, 曲面, 图在曲面上的嵌入, 地图, 以及图等组合构形. 而不是反之.

实际上, 建立了在单面形上的一种新的代数. 这一路线是通过作者本人所创建的, 联树模型实现的. 联树模型比至今一直在国际上被人们利用的 Heftter-Edmonds 嵌入模型优越之处, 在于能十分有效地构造出这些构形. 也简化了 Klein-Tutte 地图模型.

一个不易被人们理解之处, 在于联树以某个树结构为出发点. 但从理论上已经证明, 用联树处理这些构形, 不依赖此树形结构的选择. 18.13–18.23 就是在完成这一任务的同时, 确定出各种等价类的完全不变量(理论上, 全是多项式型的不变量). 18.24 则在前面建立的理论指导下, 将 Tutte, Harary, 以及我本人, 曾用高等方法解决的, 有关树的计数问题, 变为一种纯组合分类的初等问题(参见 16.5 和 19.8). 以及由此的延伸. 18.25 和 18.26, 讨论上述构形与泛函方程, 以及与图本身的关系. 18.27 在这种理论的基础上, 提出了确定一般(不一定带有对称性, 即自同构群非平凡!)图的, 各种亏格的理论. 第一次脱离了, 只考虑具有好对称性的图(因为只有这种图, 才能用电路图与电压图, 或者说拓扑学中, 覆盖空间的方法等).

18.28 是图论中的一个新专题, 也是由联树法引起的. 这就是考虑, 是否能用一个图的亏格多项式, 刻划这个图. 本章提供了一个准则, 以构造出具有相同亏格多项式, 而不同构图的无穷类, 推进了对于图同构的研究.

18.29, 对于一直无从着手, 几乎快要被人们忘却的, 在给定亏格的曲面上, 图(非平面情形!)的可嵌入性问题, 在联树原理下, 给出了四个具有独立理论意义的表征. 目前, 除在国外出现一篇新文章(即 [7])外, 都只是讨论小亏格的曲面(如, 射影平面, 环面), 而且十分复杂. 这里的四个表征都是对于一般的曲面, 即亏格不受限制. 值得一提的, 其中一个表征在亏格为 0 的特殊情形(及平面情形), 却直接导致我本人于十数年前给出的, 图上一种同调与上同调理论, 那时就一举同时导出 Lefchetz, MacLane, Whitney 从三个不同的方向, 具有独立理论意义, 图的三个平面性表征. 这些表征同发表在上世纪 30 年代. 而这篇新文章, 也只是将 MacLane 平面表征推广到曲面上(参见 [7]). 数年前, 在国外, 也有一篇讨论将 Whitney 平面表征推广到射影平面(亏格为 1 的不可定向曲面!)上的文章(参见 [1]). 不过, 这两篇文章都比本章所提供的要复杂得多.

在 18.12–18.29 的每部分最后一节的注记, 都提供 10 余道问题, 共 200 余道, 都是我从研究中得到, 或体会到, 虽然都程度不同是很困难的, 但具有近期可接近性.

在 18.30 中, 除澄清一些理论概念外, 还提供了基于联树法的计算机实现. 同样，也是国际上第一次出现.

同时, 借此机会, 我把图的曲面可嵌入性的 4 条独立的理论途径第一次用英文形式发表. 相信英文读者也会在将来把 14.8 中的那个图上的, 上同调理论发展到其对偶形式. 从而, 得到另一种代数途径判定图的曲面可嵌入性.

还要提一提在 18.28 中, 所提供的是研究一个多项式不变量是否完全, 或接近程度的一种尝试. 实际上是研究图的色多项式唯一性的延伸. 董峰明在攻读博士期间, 虽然在平面地图计

数方面取得一些进展(例如 3.45), 但他之后的主要兴趣完全在色多项式唯一性方面. 因为我对色多项式有所了解, 就建议他从研究这个多项式系数与图内在结构的关系入手, 虽有些新进展, 但遇到的难度愈来愈大, 只能另途它径(参见 3.55, 3.57, 4.5(K.M. Koh), 4.16), 后到新加坡继续, 并获得博士学位.

第十九编仅由专著: *Introductory Map Theory* 组成. 含 19.1–19.16. 在内容上 19.1–19.21 是 9.11–9.21 的延伸. 除扩充几个新专题(例如, 19.12–19.15)外, 主要是将思考题、练习题和研究题分别扩充到 200 余道. 他们都是从研究过程中形成的.

第二十编由中文文选, 第 13 卷, 英文专著: *Introduction to Combinatorial Maps* 和中文专著: 组合泛函方程 组成. 中文文选第 13 卷, 含 20.1–20.15. 在两个专著中, 前者含 20.16–20.25. 虽然现在看来已不值一提了, 但可以使人们了解如何从它演化到诸如 9.1–9.10, 9.11–9.25, 以致 19.1–19.16. 这个过程却反映了我在这个专题上的理论发展主线.

后者包括 20.26–20.36. 主要是从我在地图计数这一专题研究中提炼出来的. 之所以形成一本专著, 是因为在对于几个一直在求解方面毫无进展的泛函方程中, 没成想现在已经发现, 可以给出其解的形式. 同时, 又发现几个新的可给出解形式的非线性介子方程. 无疑为直接求解提供了目标.

尤其是在这个过程中, 引发出对这些方程的普遍性研究, 以致形成在整域扩张上, 只通过代数运算, 求解的正项有限和表示. 从这个意义上, 可以说这本专著, 是一种泛函, 特别是介子泛函方程理论的书. 不过, 它在组合对象的计数中有直接的应用. 由此延拓, 可能会引起一系列的进一步发展. 例如物质由分子的结构决定的. 分子由原子组成. 每个原子都有一个价. 分子中原子价的剖分向量(节点次的剖分向量!), 就是分子间同构的一个不变量.

至此, 从已经出版的专著中, 可以显示, 以下 8 条研究路线.

第一条: (1) *Embeddability in Graphs*(1995)$\Longrightarrow$ (2) 图的可嵌入性理论(1994) $\Longrightarrow$ (3) *Topological Theory on Graphs*(2008) $\Longrightarrow$ (4) 图的可嵌入性理论(第二扩充版, 2010).

因为 (1) 被 Kluwer 决定出版之后, 才开始写 (2), 虽然后者出版在先, 这里是工作次序.

第二条: (5) 纵横嵌入术(1994)$\Longrightarrow$ (6) 纵横布局论(1997).

第三条: (7) *Enumerative Theory of Maps*(1999)$\Longrightarrow$ (8) 数组合地图论(2000)$\Longrightarrow$ (9) 数组合地图论(第二版, 2008)$\Longrightarrow$ (10) *General Theory of Map Census*(2009).

第四条: (11) 运输网络术(1998) $\Longrightarrow$ (12) 运筹学导引(上篇, 2002).

第五条: (13) *Introduction to Combinatorial Maps*(2002) $\Longrightarrow$ (14) 组合地图进阶(2003)$\Longrightarrow$ (15) *Introductory Map Theory*(2010).

第六条: (16) *Theory of Polyhedra*(2008).

第七条: (17) 地图的代数原理(2006)$\Longrightarrow$ (18) *Elements of Algebraic Graphs*(2013).

第八条: (19) 组合泛函方程论(2015)

但我对每一个研究专题, 都安排三个阶段: 首先是理论成果的系统化, 通过结构的有效化, 以求达到实现的智能化. 由此观之, 上面的所有专著都只是较完满地完成了第一阶段. 为第二阶段提供了基础性的理论结果. 可惜的是都没有能完满完成第三阶段. 只是做了些算法实现方面的理论准备.

第二十一编由英文文选, 卷 20, 卷 21 和两本中学教材 *Mathematics* I 和 *Mathematics* II 组成. 卷 20 含 21.1–21.11 和卷 21 含 21.12–21.23. Mathematics I 为 21.24 和 Mathematics II 为