无穷维随机动力系统的吸引子

WUQIONGWEI SUIJI DONGLI XITONG DE XIYINZI

赵文强　张一静◎著

重庆大学出版社

无穷维随机动力系统的吸引子

赵文强　张一静◎著

重庆大学出版社

内容提要

本书主要介绍无穷维随机动力系统的吸引子理论及作者在这一领域的最新研究成果,内容共分9章.第1章介绍Sobolev空间的一些预备知识.第2章着重阐述随机动力系统的基本概念和非初始空间上吸引子的存在性和上半连续性结果.从第3章起,主要考虑由白噪声驱动的反应扩散方程、退化的半线性抛物方程、非经典扩散方程、三维Camassa-Holm模型、Boussinesq模型、非自治FitzHugh-Nagumo系统等随机模型的吸引子的存在性、正则性、稳定性、上半连续性等.

本书可供高等院校数学专业高年级学生、研究生和教师阅读,也可供相关科技人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

无穷维随机动力系统的吸引子/赵文强,张一静著.
—重庆:重庆大学出版社,2017.4
ISBN 978-7-5624-9116-3

Ⅰ.①无… Ⅱ.①赵… ②张… Ⅲ.①无限维—随机系统—动力系统(数学)—吸引子 Ⅳ.①O175

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第043202号

无穷维随机动力系统的吸引子

赵文强 张一静 著

策划编辑:杨粮菊

责任编辑:文 鹏 姜 凤 版式设计:杨粮菊

责任校对:谢 芳 责任印制:赵 晟

*

重庆大学出版社出版发行

出版人:易树平

社址:重庆市沙坪坝区大学城西路21号

邮编:401331

电话:(023)88617190 88617185(中小学)

传真:(023)88617186 88617166

网址:http://www.cqup.com.cn

邮箱:fxk@cqup.com.cn(营销中心)

全国新华书店经销

重庆长虹印务有限公司印刷

*

开本:787mm×1092mm 1/16 印张:10.75 字数:268千

2017年4月第1版 2017年4月第1次印刷

ISBN 978-7-5624-9116-3 定价:48.00元

前言

本书的目的是研究无穷维随机动力系统的长时间发展行为,特别是用随机吸引子去描述这一性质.本书所考虑的随机动力系统主要来自一些随机微分方程,包括自治和非自治的.从数学上来看,随机动力系统概念是对确定动力系统概念的一种推广,它结合了一个定义在某概率空间上的保持测度不变,具有遍历性的可测动力系统(用于模拟随机噪声)和满足 cocycle 特征的某度量空间上的拓扑动力系统,其演化规律由随机微分方程的解所确定.

对随机微分方程的研究起源于 20 世纪初期 Gibbs 关于保守力学系统 Hamilton-Jacobi 方程和 Langevin 关于布朗运动随机方程的研究.20 世纪 70 年代,Bensoussan,Temam,Pardouxd 等不少数学家涉入随机非线性微分方程的研究.随着社会科学和自然科学的发展,研究者们发现随机微分方程出现在大量的实际问题中.随机微分方程是介于微分方程和概率论之间的交叉学科,是数学的两个分支相互渗透的结果.对随机偏微分方程的引入,通常的思路是对确定性方程的部分,引入“随机力”“噪声”或“激发力”来弥补确定性方程中所忽略的偶然影响因素.而如何建立随机动力系统的概念则要追溯到 1992 年,一批数学家如 Crauel,Flandoli,Schmalfuß及 Debussche 等建立了无穷维随机维动力系统基本理论,找到了随机吸引子得以恰如其分阐述的基本框架,并研究了反应扩散方程、Navier-Stokes 方程、Burgers 方程等具体的随机微分方程,获得了这些方程生成的随机动力系统及其吸引子的存在性结果.近年来,随机微分方程及其随机动力系统的研究得到了蓬勃发展.

虽然有许多数学家从事随机动力系统的吸引子等相关问题的研究,获得了一些数学物理方程模型,如反应扩散方程、KDV 方程、Wave 方程等在一些函数空间上的吸引子及其上半连续性结果,然而这些结果在应用上还远远不够,很多方程如薛定谔方程等仍然未得到解决.同时,由于方程的非线性以及本身的复杂性,许多来自物理、力学、金融、生物等领域中的非线性微分方程有很多值得研究的问题.

本书介绍了研究无穷维随机动力系统需要的一系列预备知识，包括 Sobolev 空间、随机过程、Wiener 过程等内容. 建立了随机系统在非初始空间上吸引子的存在性和上半连续性标准. 着重研究了白噪声驱动的反应扩散方程、退化的半线性抛物方程、非经典扩散方程、三维 Camassa-Holm 模型、Boussinesq 模型、非自治 FitzHugh-Nagumo 系统等随机模型在不同函数空间上吸引子的存在性、正则性、稳定性、上半连续性等问题，系统地阐述了无穷维随机动力系统的吸引子理论和研究方法，包括紧嵌入法、谱分解法、尾部估计法、能量方程法、渐近预估计法等. 全书共分 9 章，内容的安排以及具有的特点如下：

第 1 章的目的在于介绍泛函分析和非线性分析中的一些基本内容，主要是后面需要用到的一些预备知识和结果. 我们引入了一些 Lebesgue 可积函数空间和 Sobolev 空间，如 $W^{k,p}$ 空间，特别地，当 $k=0$，$p=2$ 时，L^2 为 Hilbert 空间的重要例子. 整理了经常会使用的 Young 不等式、Hölder 不等式、Gronwall 引理、Sobolev 插值、嵌入和紧嵌入等内容. 并系统地介绍了各种收敛，给出了无穷序列空间和加权无穷序列空间上集合的紧性定理.

第 2 章介绍了概率论和无穷维随机动力系统的相关概念和理论. 对速降随机变量给出了等价刻画. 引入了渐近紧、Omega-极限紧、Flattening 条件等内容，并用于刻画吸引子的存在性. 证明了一个重要结果：随机动力系统在非初始空间的吸引子的存在性仅取决于系统在初始空间上的连续性、吸收集的存在性，以及系统在非初始空间的渐近紧性，与系统在非初始空间上吸收集的存在性和连续性无关. 这一发现揭示了随机动力系统更深刻的性质. 最后介绍了吸引子上半连续性的概念，给出了随机吸引子在非初始空间上的上半连续性条件. 这些结果为研究吸引子的正则性提供了理论依据.

第 3 章分别讨论了定义在有界域上，具有加法和乘法白噪声的反应扩散方程：

$$du-\mu\Delta u dt+(f(x,u)+g(x))dt=\sum_{j=1}^{m}h_j(x)dW_j(t),$$

和

$$du-\mu\Delta u dt+f(u)dt=g(x)dt+\sum_{j=1}^{m}b_j u\circ dW_j(t),$$

这里的 μ 为正常数，$f(x,u)$ 满足给定的增长和耗散条件，$\{W_j(t)\}_{j=1}^{m}$ 为 m 维布朗运动. 展示了方程的解在光滑函数空间 $H_0^1(\mathcal{O})$ 上拟连续，并且利用谱分解法证明了带白噪声反应扩散方程的解在 $H_0^1(\mathcal{O})$ 上是 Omega-极限紧的，从而获得了随

机吸引子的唯一存在性结果.最后,在系统参数满足一定的附加条件时,方程的解具有压缩特征.从而证明了此时的吸引子是渐近稳定的,并且仅仅包含一个元素,恰为随机系统的唯一平衡稳定点.

第 4 章分别研究了带加法和乘法噪声的一类半线性退化的随机抛物方程:

$$\mathrm{d}u + (\lambda u - \operatorname{div}(\sigma(x)\nabla u) + f(u))\mathrm{d}t = \sum_{j=1}^{m}\phi_j(x)\mathrm{d}W_j(t),$$

和

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}u + \lambda u\,\mathrm{d}t - \operatorname{div}(\sigma(x)\nabla u)\mathrm{d}t + f(u)\mathrm{d}t\\ &= g(x)\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{m} b_j u \circ \mathrm{d}W_j(t),\end{aligned}$$

这里 div 代表散度,$\{W_j(t)\}_{j=1}^{m}$ 为双边实值 Wiener 过程.方程的非退化性表现在其中的扩散变量 σ 为 $D_N\subset\mathbb{R}^N$ 上的非光滑或者无界函数,其中 $N\geqslant 2$.即 $\sigma:D_N\to[0,\infty)$ 满足假设:

$\mathcal{H}_\alpha$:当 D_N 有界时,则假设对某些 $\alpha\in(0,2)$ 和每一个 $z\in\overline{D_N}$,$\sigma\in L^1_{loc}(D_N)$ 及 $\liminf\limits_{x\to z}|x-z|^{-\alpha}\sigma(x)>0$;

$\mathcal{H}_\alpha^\beta$:当 D_N 无界时,则假设 σ 满足 $\mathcal{H}_\alpha$,以及对某些 $\beta>2$,$\liminf\limits_{|x|\to\infty}|x|^{-\beta}\sigma(x)>0$.

利用谱分解法,证明了生成的随机动力系统在光滑加权函数空间 $D_0^{1,2}(D_N,\sigma)$ 上随机吸引子的存在性结果.利用新的渐近预估计法,证明了在高次可积函数空间 $L^{2p-2}(D_N)$ 上存在吸引子.进一步表明了 $L^2(D_N)$ 空间上获得的吸引子是渐近光滑的和高次可积的.

第 5 章考虑了定义在三维周期立体 $\mathcal{O}=[0,L]^3\subset\mathbb{R}^3$ 上的随机 Camassa-Holm 方程:

$$\begin{cases}\mathrm{d}(\alpha_0^2 u - \alpha_1^2\Delta u) - \nu\Delta(\alpha_0^2 u - \alpha_1^2\Delta u)\mathrm{d}t - u\times\\ (\nabla\times(\alpha_0^2 u - \alpha_1^2\Delta u))\mathrm{d}t + \dfrac{1}{\rho_0}\nabla p\mathrm{d}t\\ = f(x)\mathrm{d}t + Q(x)\mathrm{d}W(t),\\ \nabla. u = 0,\end{cases}$$

这里 $t>\tau,\tau\in\mathbb{R}.\nu,\rho_0,\alpha_0>0,\alpha_1\geqslant 0$ 为常数.函数 $u=(u_1,u_2,u_3)$ 定义于$\mathcal{O}\times[\tau,t]$表示不可压缩流体的流速,$\dfrac{1}{\rho_0}p=\dfrac{1}{\rho_0}p(x,t)$表示压强.$f(x)$和 $Q(x)\mathrm{d}W(t)$表示流体所受外来干扰因素,随机部分 $Q(x)\mathrm{d}W(t)$与 Brownian 运动 $W(t)$的广义偏微分相联系.这里 $W(t)$为定义在概率空间(Ω,F,P)上的双边实值的 Wiener 过程.我们研究了该方程在 $H^2(\mathcal{O})^3$ 空间中随机吸引子的存在性.然而该模型的解轨道在 $H^2(\mathcal{O})^3$ 中既不紧也不连续,因此传统的

方法不可行. 这里运用了拟连续性概念和 Omega-极限紧性概念，采用谱分解法获得系统在 $H^2(\mathcal{O})^3$ 空间上的 Omega-极限紧性，建立了 H^2-吸引子的存在性，从而进一步展示了吸引子的高维光滑性.

第 6 章研究了具有深厚流体力学背景的带可加噪声的 Boussinesq 模型：

$$\begin{cases} dv+[(v.\nabla)v-\nu\Delta v+\nabla p]dt=e_2(T-\varepsilon_1)dt+\sum_{j=1}^{m}\phi_j dw_j(t), \\ dT+[(v.\nabla)T]dt-\kappa\Delta T=0, \\ \mathrm{div}v=0, \end{cases}$$

这里流体所占区域是单位面积为 1 的平面区域$\mathcal{O}=(0,1)\times(0,1)\subset\mathbb{R}^2$，$e_2\in\mathbb{R}^2$为重力加速度方向的单位向量. $v(x,t)=(v_1(x,t),v_2(x,t))$、$p(x,t)$和 $T(x,t)$分别代表流体的速度、压强和温度域. κ 为常数，表示热传导系数. $\nu>0$ 表示流体的黏滞系数. ε_1 为在顶部 $x_2=1$ 处的温度，而 $\varepsilon_0=\varepsilon_1+1$ 为在底部 $x_2=0$ 处的温度. $\phi_j(x)=(\phi_{j1}(x),\phi_{j2}(x))$为定义在$\mathcal{O}$上属于某 Hilbert 空间的函数. $w(t)=\{w_1(t),w_2(t),\cdots,w_m(t)\}$为双边实值的 Wiener 过程. 方程组赋予非齐次边界条件：

$$\begin{cases} v=0, \text{当 } x_2=0, x_2=1; \\ T=\varepsilon_0, \text{当 } x_2=0, \text{及 } T=\varepsilon_1=\varepsilon_0-1, \text{当 } x_2=1; \\ \psi|_{x_1=0}=\psi|_{x_1=1}, \text{其中 } \psi=v,T,P,\dfrac{\partial v}{\partial x_1},\dfrac{\partial T}{\partial x_1}. \end{cases}$$

在没有参数 $\min\{\nu,\kappa\}>1$ 的限制条件下，利用紧嵌入方法证明了生成的随机系统在$(L^2)^2\times L^2$ 空间上的渐近紧性，从而获得了吸引子的存在性结果.

第 7 章考虑了强度为 ε 的加法噪声扰动下，定义在无界域上的随机非经典扩散方程：

$$\begin{cases} u_t-\Delta u_t-\Delta u+u+f(x,u)=g(x)+\varepsilon h\dot{W}, x\in\mathbb{R}^N, \\ u(x,\tau)=u_0(x), x\in\mathbb{R}^N, \end{cases}$$

其中初值 $u_0\in H^1(\mathbb{R}^N)$，$\varepsilon\in(0,1]$为噪声强度，$\dot{W}(t)$为 Wiener 过程 $W(t)$的广义偏导数，$W(t)=W(t,\omega)=\omega(t)$，$t\in\mathbb{R}$. $g\in L^2(\mathbb{R}^N)$，$h\in H^1(\mathbb{R}^N)$. 因为考虑了介质的黏性、弹性和压强等因素对系统的影响，在研究非 Newtonian 流体、固体力学和热传导问题中，非经典扩散方程具有重要的应用. 这里用能量方程方法证明了随机系统在 $H^1(\mathbb{R}^N)$上的渐近紧性，获得了吸引子的存在性结果. 最后通过验证随机解和确定解的收敛性，结合吸收集随 ε 单调不减的特征，证明随机吸引子在 $H^1(\mathbb{R}^N)$空间上在点 $\varepsilon=0$ 处的上半连续性结论.

第 8 章讨论了定义在$\mathbb{R}^N$上的带加法噪声的非自治的耦合系统：

$$\begin{cases} \mathrm{d}\tilde{u} + (\lambda\tilde{u} - \Delta\tilde{u} + \alpha\tilde{v})\mathrm{d}t = f(x,\tilde{u})\mathrm{d}t + g(t,x)\mathrm{d}t + h_1\mathrm{d}\omega_1(t), \\ \mathrm{d}\tilde{v} + (\sigma\tilde{v} - \beta\tilde{u})\mathrm{d}t = h(t,x)\mathrm{d}t + h_2\mathrm{d}\omega_2(t), \end{cases}$$

其中初值$(\tilde{u}_0,\tilde{v}_0)\in L^2(\mathbb{R}^N)\times L^2(\mathbb{R}^N)$，参数$\lambda,\alpha,\beta$和$\sigma$为正常数，$h_1$和$h_2$为$\mathbb{R}^N$上满足某些正则条件的函数，非自治项$g$，$h\in L^2_{loc}(\mathbb{R},L^2(\mathbb{R}^N))$，非线性函数$f$具有指数为$p-1,p>2$的多项式型增长，$\omega(t)=(\omega_1(t),\omega_2(t))$为定义在概率空间$(\Omega,F,P)$上的 Wiener 过程. 运用一种新的渐近预估计技术，在不知道非线性函数在最大值时的正负的情况下，获得了随机圈在$L^p(\mathbb{R}^N)\times L^2(\mathbb{R}^N)$上的渐近紧性，从而证明耦合系统在非初始空间$L^{\varpi}(\mathbb{R}^N)\times L^2(\mathbb{R}^N)$上具有唯一拉回吸引子，其中$\varpi\in(2,p]$.

第 9 章研究了具有乘法白噪声和非自治项的反应扩散方程：

$$\begin{cases} \mathrm{d}u + (\lambda u - \Delta u)\mathrm{d}t = f(x,u)\mathrm{d}t + g(t,x)\mathrm{d}t + \varepsilon u \circ \mathrm{d}\omega(t), \\ u(\tau,x) = u_0(x), x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

这里$u_0\in L^2(\mathbb{R}^N)$，$\lambda>0$，ε为噪声强度，$t>\tau$，$\omega(t)$为概率空间(Ω,F,P)上的双边实值过程，$f(x,s)$具有多项式形式的增长. 首先，证明了在以原点为中心的球域外部，当时间和半径趋于无穷时，方程的解在$H^1(\mathbb{R}^N)$空间拓扑下任意小. 其次，给出了一个新的估计方法，获得了当截断常数无限增大时，解的L^{2p-2}-范数在紧的一维区间上的积分趋于零. 最后，结合谱分解技术，证明了方程生成的随机圈在$H^1(\mathbb{R}^N)$空间的渐近紧性，并获得了随机吸引子在$H^1(\mathbb{R}^N)$空间上的上半连续性结果.

本书的主要内容完全是作者近年来对相关问题的心得体会和最新的研究成果. 作者在撰写本书的过程中参阅了国内外大量的研究文献，在此向有关学者表示诚挚的感谢！同时衷心感谢重庆大学出版社的有关同志！

限于作者水平，书中欠妥之处在所难免，恳请读者指正.

赵文强

2016 年 10 月于重庆

目录

第 1 章 Sobolev 空间

本章的目的在于介绍泛函分析和非线性分析中的一些基本内容，强调后面需要用到的一些结果. 我们引入了一些 Lebesgue 可积函数空间和 Sobolev 空间，如 $W^{k,p}$ 空间，特别地，当 $k=0, p=2$ 时，L^2 为 Hilbert 空间的重要例子. 整理了经常会使用的 Young 不等式、Hölder 不等式等内容. 并证明了无穷序列(加权)空间上的一些紧理论.

1.1 度量空间、赋范空间、巴拿赫(Banach)空间

数学中的基本概念就是集合，在应用中需要在元素之间建立某种关系，元素之间的距离就是它们之间的关系体现. 有了这种关系，就可以研究数学中的一些问题. 例如，在实数集合 $\mathbb{R}$ 上的一个距离就是用绝对值描述，$d(x,y)=|x-y|, x,y\in\mathbb{R}$，于是我们可以研究实数列的极限、一元函数的极限、微分和积分等问题.

1.1.1 度量空间、向量空间

首先引入度量空间的概念，详细的讨论见文献[86].

定义 1.1 设 X 是一个集合，一个定义在 $X\times X$ 上的非负函数 $d: X\times X\to[0,+\infty)$，使得对一切 $x,y,z\in X$ 满足如下度量公理：

i) $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$；

ii) $d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$，

则称 $d(x,y)$ 是 x,y 之间的距离，称 (X,d) 为度量空间或距离空间.

容易证明 $d(x,y)$ 具有对称性，即 $d(x,y)=d(y,x)$.

例如，无穷序列空间 $S=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots); x_k\in\mathbb{R}, k=1,2,\cdots\}$，按

$$d(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{|x_k-y_k|}{1+|x_k-y_k|}$$

成一度量空间. 再比如，空间 $C[a,b]$ 表示闭区间 $[a,b]$ 上实值(或复值)连续函数全体，定义

$$d(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)| \qquad x,y\in C[a,b],$$

则容易验证它满足距离条件 i) 和 ii)，因此 $C[a,b]$ 为度量空间.

定义 1.2 设$\{x_n\}$是度量空间 X 中的点列，我们称 $x_0\in X$ 为$\{x_n\}$的极限，记为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$，如果

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x_0)=0,\qquad \text{或者}\quad \lim_{n\to\infty} d(x_0,x_n)=0.$$

定义 1.3 设 X 为度量空间，$x_0\in X$，子集

$$B(x_0,\delta)=\{x\in X;d(x,x_0)<\delta\},$$

称为 x_0 的 δ-邻域；设 $A\subset X$，如果存在 x_0 的某个 δ-邻域 $B(x_0,\delta)\supset A$，则称 A 为有界集；如果存在一个 δ-邻域 $B(x_0,\delta)\subset A$，则称 x_0 为 A 的内点；如果 A 中的每一点都是 A 的内点，则称 A 为开集. 显然邻域是开集. 另外，x_0 是 A 的极限点是指 x_0 的每一个 δ-邻域都含有 A 中不同于 x_0 的点；x_0 是 A 的边界点是指 x_0 是 A 的极限点但不是 A 的内点；A 的边界点的全体称为 A 的边界，记为∂A；称 $\overline{A}=A\cup\partial A$ 为 A 的闭包；如果 $\overline{A}=A$，则称 A 为闭集.

定义 1.4 设$\{x_n\}$为度量空间 X 中的点列，如果对任意的 $\eta>0$，存在正数 $N>0$，使得对所有的 $m,n\geqslant N$，都有

$$d(x_n,x_m)<\eta,$$

则称$\{x_n\}$为 X 中的柯西(Cauchy)点列. 如果度量空间 X 中的每一个柯西点列都存在极限 $x_0\in X$，则称 X 是完备的度量空间.

完备空间具有很好的性质，例如在完备度量空间上具有重要的巴拿赫(Banach)压缩映像原理：设 X 为完备的度量空间，$F:X\to X$ 是压缩映射，即存在 $\alpha\in[0,1)$，使得对任何 $x,y\in X$，有

$$d(F(x),F(y))\leqslant \alpha d(x,y),$$

则 F 有唯一的不动点 x^*，即 $F(x^*)=x^*$. 进一步，任意取 $x_0\in X$，取

$$x_n=F(x_{n-1}),n=1,2,\cdots,$$

则有

$$d(x_n,x^*)\leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}d(x_1,x_0),n=1,2,\cdots.$$

在许多数学问题和实际问题中，研究的空间不仅要有极限运算，还要求元素之间可以有所谓的加法和数乘的代数运算. 这样就产生了线性空间.

定义 1.5 设 X 是一非空集合，在 X 中定义了元素的加法和实数(或者复数)与元素的乘法运算，并满足下列条件：

(1)加法交换群成立，即对任意 $x,y\in X$，有 $x+y\in X$，使得

i)$x+y=y+x$；

ii)$(x+y)+z=x+(y+z)$，对任意的 $x,y,z\in X$；

iii)存在零元素 $\theta\in X$ 使得对任意的 $x\in X$，$x+\theta=x$；

iv)对每一个 $x\in X$，存在负元素 x'，使得 $x+x'=\theta$，称 x'为 x 的负元素，记作 $-x$.

(2)对每一个 $x\in X$ 及任何实数(或者复数)a，有数乘运算 $ax\in X$，且满足：

i)$1x=x$；

ii)$a(bx)=(ab)x$，对任何实数(或者复数)a,b 成立；

iii)$(a+b)x=ax+bx$；$a(x+y)=ax+ay$，则称 X 按上述加法和数乘运算成为线性空间或者向量空间，其中 X 的元素称为向量.

1.1.2　赋范空间、巴拿赫(Banach)空间

在泛函分析中，特别有用的一类度量空间是赋范线性空间. 在赋范线性空间中，元素可以相加或者数乘，元素之间不仅有度量，而且每一个元素有类似向量长度的称作范数的量.

定义 1.6　一线性空间 X 上的一个非负函数 $\|.\|:X\to[0,+\infty)$，使得对一切的 $x,y\in X$ 满足：

i) $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$；

ii) $\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$，对所有的 $\lambda\in\mathbb{R}$；

iii) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$(三角不等式)，则称 $\|x\|$ 为 x 的范数，称 X 按范数 $\|.\|$ 为赋范线性空间.

一个赋范线性空间称为完备的，如果 X 中的每一个 Cauchy 序列收敛于 X 中的点. 完备的赋范线性空间称为巴拿赫(Banach)空间，其范数记为 $\|.\|_X$.

一个子集合 $E\subset X$ 称为在 X 中稠密的，如果 E 的闭包 $\overline{E}=X$. 等价的，X 中的每一元素 x 能由 E 中的元素逼近，即对任意的 $\eta>0$，存在 $y\in E$，使得 $\|x-y\|_X\leqslant\eta$. 特别地，如果 $x\in X$，那么一定存在一序列 $y_n\in E$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|y_n-x\|_X=0$. 后面我们看到，光滑函数空间在 Lebesque 可积函数空间里是稠密的，这一性质是非常重要的. Banach 空间 X 称为可分的，如果 X 具有可数稠密子集.

定义 1.7　设 X 为 Banach 空间，X 上的两个范数 $\|.\|_1$ 和 $\|.\|_2$ 称为等价的，如果存在正实数 a,b，使得对任意的 $x\in X$，有

$$a\|x\|_2\leqslant\|x\|_1\leqslant b\|x\|_2.$$

可以证明定义在欧式空间 $\mathbb{R}^m$ 上的所有范数都是等价范数，见文献[79].

1.2　连续函数空间 $C^k(\mathcal{O})$ 和 $C_0^k(\mathcal{O})$

本书中，我们用 $\mathcal{O}$ 表示欧式空间 $\mathbb{R}^m$ 的开子集，$\overline{\mathcal{O}}$ 表示 $\mathcal{O}$ 的闭包，$\partial\mathcal{O}$ 表示 $\mathcal{O}$ 的边界. $C^0(\mathcal{O})$ 表示 $\mathcal{O}$ 上所有连续函数的全体，$C^0(\overline{\mathcal{O}})$ 表示 $\overline{\mathcal{O}}$ 上所有连续函数的全体. 注意到 $C^0(\mathcal{O})$ 中的函数不一定有界，然而如果 $\mathcal{O}$ 有界，那么 $C(\overline{\mathcal{O}})$ 中的函数有界而且一致连续. 于是，$C(\overline{\mathcal{O}})$ 上的范数为上确界范数，

$$\|u\|=\|u\|_\infty=\sup_{x\in\mathcal{O}}|u(x)|.$$

可以证明，如果 $\mathcal{O}$ 有界，那么按上述范数 $C(\overline{\mathcal{O}})$ 为 Banach 空间，而且是可分的，见文献[80].

为了介绍一些高次可微函数的集合，需要引入一些记号. 用记号 D_j 表示 $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$，例如，梯度 $\nabla u=(D_1u,D_2u,\cdots,D_mu)$ 以及 $|\nabla u|^2=\sum\limits_{j=1}^{m}|D_ju|^2$. 对于 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)\in\mathbb{R}^m$，其中 $\alpha_i\geqslant 0$，则称 α 为多重指标. 对于多重指标 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$，定义

$$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_m,$$

$$D^{\alpha} = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \cdots D_m^{\alpha_m},$$

于是

$$D^{\alpha} u = \frac{\partial^{\alpha} u(x)}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_m}^{\alpha_m}}.$$

对于$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$上的向量函数 $v=(v_1, v_2, v_3)$，定义其散度为

$$\operatorname{div} v = \nabla. v = D_1 v_1 + D_2 v_2 + D_3 v_3.$$

定义 v 的旋度为

$$\operatorname{curl} v = \nabla \times v = (D_2 v_3 - D_3 v_2, D_3 v_1 - D_1 v_3, D_1 v_2 - D_2 v_1)$$

如果 v 是$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$上的向量函数，则其旋度为

$$\operatorname{curl} v = D_1 v_2 - D_2 v_1.$$

类似的可以定义高维数空间$\mathbb{R}^m (m>3)$上的散度与旋度概念.

利用上述多重指标，我们定义 $C^k(\mathcal{O})$表示在$\mathcal{O}$上直到 k 阶偏导数都存在而且连续的函数全体，

$$C^k(\mathcal{O}) = \{f; D^{\alpha} f \in C^0(\mathcal{O}), |\alpha| \leqslant k\}.$$

$C^k(\overline{\mathcal{O}})$表示在$\overline{\mathcal{O}}$上直到 k 阶偏导数都存在而且连续的函数全体，

$$C^k(\overline{\mathcal{O}}) = \{f; D^{\alpha} f \in C^0(\overline{\mathcal{O}}), |\alpha| \leqslant k\}.$$

注意，$C^k(\overline{\mathcal{O}})$可以等价的定义为 $C^k(\mathcal{O})$中直到 k 阶偏导数在$\mathcal{O}$有界且一致连续函数全体. 光滑函数空间 $C^{\infty}(\mathcal{O})$表示$\mathcal{O}$上具有无穷阶偏导数的函数全体，即

$$C^{\infty}(\mathcal{O}) = \bigcap\nolimits_{k=0}^{\infty} C^k(\mathcal{O}).$$

在适当的范数下，闭集上的连续函数空间构成 Banach 空间. 设$\mathcal{O}$有界，则 $C^k(\overline{\mathcal{O}})$，$k<\infty$，按范数

$$\|f\|_{C^k} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \sup_{x \in \mathcal{O}} |D^{\alpha} f(x)|$$

为一可分的 Banach 空间. 注意，无法找到这样的范数使得 $C^{\infty}(\overline{\mathcal{O}})$为 Banach 空间，见文献[79].

函数 f 的支集定义为

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x; f(x) \neq 0\}}$$

因为$\mathcal{O}$是开子集，所以讨论 $C^k(\mathcal{O})$中函数簇的紧性是很困难的，因此，下面我们定义具有紧支集的连续函数空间.

$C_0^k(\mathcal{O})$表示$\mathcal{O}$内具有紧支集的 $C^k(\mathcal{O})$函数全体，$0 \leqslant k \leqslant +\infty$，即

$$C_0^k(\mathcal{O}) = \{f \in C^k(\mathcal{O}); \operatorname{supp} f \text{ 有界且 } \operatorname{supp} f \subset \mathcal{O}\}.$$

$C_0^k(\mathcal{O})$可以等价定义为在边界 $\partial(\mathcal{O})$附近为 0 的 $C^k(\mathcal{O})$函数的全体. 事实上，函数在边界附近是否为零，对研究偏微分方程来说是非常重要的，边界附近为零对估计和计算都方便，否则将变得更为复杂.

一个函数 $f: X \to X$ 称为 γ-Hölder 连续的，$0<\gamma\leqslant 1$，如果存在常数 C 使得

$$\|f(x) - f(y)\|_X \leqslant C \|x - y\|_X^{\gamma}, x, y \in X.$$

如果 $\gamma=1$，则 f 是 Lipschitz 连续的，其中 C 称为 Lipschitz 常数. 我们用 $C^{k,\gamma}(\overline{\mathcal{O}})$表示 $C^k(\overline{\mathcal{O}})$中的函数，使得其 k 阶偏导数是 γ-Hölder 连续的，即常数 $C>0$(可以依赖 f)，使得

$$|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)| \leqslant C|x-y|^\gamma, |\alpha| = k.$$

空间 $C^{k,\gamma}(\overline{\mathcal{O}})$ 按如下的范数为 Banach 空间：

$$\|f\|_{C^{k,\gamma}} = \|f\|_{C^k} + \sup_{x,y\in\overline{\mathcal{O}},|\alpha|=k} \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|}{|x-y|^\gamma}.$$

1.3　Lebesgue 积分

1.3.1　重要不等式

首先给出几个重要的不等式，它们在估计偏微分方程的解时是不可缺少的工具.

引理 1.1　i)(Young 不等式)　设 $a,b\geqslant 0,\varepsilon>0,p>1,q>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

ii)(带权的 Young 不等式)　设 $a,b\geqslant 0,\varepsilon>0,p>1,q>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则

$$ab \leqslant \frac{\varepsilon a^p}{p} + \varepsilon^{-\frac{q}{p}}\frac{b^q}{q}.$$

iii)(逆 Young 不等式)　设 $a,b\geqslant 0,0<p<1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则

$$ab \geqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

iv)(带权的逆 Young 不等式)　设 $a,b\geqslant 0,\varepsilon>0,0<p<1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则

$$ab \geqslant \frac{\varepsilon a^p}{p} + \varepsilon^{-\frac{q}{p}}\frac{b^q}{q}$$

证明　i)考虑函数

$$f(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{1}{q} - t, t \geqslant 0.$$

显然 $f'(t)=t^{p-1}-1=0$ 有唯一的驻点 $t=1$，且 $f''(1)>0$，所以函数有最小值 $f(1)=0$，故对所有的 $t\geqslant 0$，$f(t)\geqslant 0$ 恒成立. 令 $t=ab^{-\frac{q}{p}}$，得到

$$\frac{a^p b^{-q}}{p} + \frac{1}{q} - ab^{-\frac{q}{p}} \geqslant 0.$$

注意到 $q-\frac{q}{p}=1$ 即得到结论.

ii)在上述不等式中，用 $\varepsilon^{\frac{1}{p}}a$ 和 $\varepsilon^{-\frac{1}{p}}b$ 代替 a 和 b 即可证带权的 Young 不等式.

iii)若 a,b 中至少一个为零，则显然成立. 不失一般性，假设 $b\neq 0$，由于 $0<p<1$，所以 $\frac{1}{p}>1$，因此，利用 Young 不等式 i)可推得

$$\frac{a^p}{p}=\frac{1}{p}((ab)^p.b^{-p})\leqslant\frac{1}{p}\left(\frac{ab}{\frac{1}{p}}+\frac{b^{\frac{p}{p-1}}}{\frac{1}{1-p}}\right)=ab-\frac{b^q}{q}.$$

引理 1.2(Gronwall 引理)　设 g,h,y 为定义在(t_0,∞)上的三个局部可积函数,同时 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$也是局部可积的,且满足

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\leqslant gy+h,t\geqslant t_0,\tag{1.1}$$

则对所有的 $t\geqslant t_0$,成立

$$y(t)\leqslant y(t_0)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^t g(\tau)\mathrm{d}\tau}+\int_{t_0}^t h(s)\mathrm{e}^{\int_s^t g(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s.\tag{1.2}$$

证明　用 $e^{-\int_{t_0}^t g(\tau)\mathrm{d}\tau}$乘以不等式(1.1)的两边,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(y(t)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^t g(\tau)\mathrm{d}\tau}\right)\leqslant h(t)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^t g(\tau)\mathrm{d}\tau}.$$

于是,从 t_0 到 t 积分就得到了式(1.2).

引理 1.3(一致 Gronwall 引理)　设 g,h,y 为定义在(t_0,∞)上的三个正的局部可积函数,同时 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ 也是局部可积的,且存在正常数 $a_i(i=1,2,3),r$,使得对所有的 $t\geqslant t_0$ 满足如下条件:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\leqslant gy+h,\tag{1.3}$$

$$\int_t^{t+r}g(s)\mathrm{d}s\leqslant a_1,\int_t^{t+r}h(s)\mathrm{d}s\leqslant a_2,\int_t^{t+r}y(s)\mathrm{d}s\leqslant a_3,\tag{1.4}$$

则对所有的 $t\geqslant t_0$,成立

$$y(t+r)\leqslant\left(\frac{a_3}{r}+a_2\right)\mathrm{e}^{a_1}.$$

证明　设 $t_0\leqslant t\leqslant s\leqslant t+r$,把式(1.3)中的 t 换为 s.用 $\mathrm{e}^{-\int_t^s g(\tau)\mathrm{d}\tau}$乘以式(1.3)的两边,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(y(s)\mathrm{e}^{-\int_t^s g(\tau)\mathrm{d}\tau}\right)\leqslant h(s)\mathrm{e}^{-\int_t^s g(\tau)\mathrm{d}\tau}.$$

从 t_1 到 $t+r$ 积分,得

$$y(t+r)\leqslant y(t_1)\mathrm{e}^{\int_{t_1}^{t+r}g(\tau)\mathrm{d}\tau}+\int_{t_1}^{t+r}h(s)\mathrm{d}s\mathrm{e}^{-\int_t^{t+r}g(\tau)\mathrm{d}\tau}\leqslant(y(t_1)+a_2)\mathrm{e}^{a_1}$$

再把 t_1 从 t 到 $t+r$ 积分,就得到结果.

引理 1.4(Gronwall 类型引理)　设 y,y'和 h 为$[a,\infty)$上的三个局部可积函数.设 y,h 非负,使得对所有的 $s\geqslant a$,

$$y'(s)+by(s)\leqslant h(s),\tag{1.5}$$

则对所有的 $t>\tau\geqslant a$,成立

$$y(t)\leqslant\mathrm{e}^{-bt}\left(\frac{1}{t-\tau}\int_\tau^t y(s)\mathrm{e}^{bs}\mathrm{d}s+\int_\tau^t h(s)\mathrm{e}^{bs}\mathrm{d}s\right).\tag{1.6}$$

证明　用 e^{bs}乘以式(1.5)的两边,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(y(s)\mathrm{e}^{bs})\leqslant h(s)\mathrm{e}^{bs}.$$

于是对 s 从 l 到 t 积分$(\tau<l<t)$,则