数学物理方法

张援农　赵江南　张绍东　袁志刚　岳显昌　黄开明　霍泰山　编著

Methods of Mathematical Physics

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

数学物理方法

张援农　赵江南　张绍东　袁志刚　岳显昌　黄开明　霍泰山　编著

Methods of Mathematical Physics

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方法/张援农等编著.—武汉:武汉大学出版社,2017.8
ISBN 978-7-307-19629-2

Ⅰ.数… Ⅱ.张… Ⅲ.数学物理方法—高等学校—教材 Ⅳ.O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 200455 号

责任编辑:王金龙　　责任校对:李孟潇　　版式设计:马　佳

出版发行:**武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件:cbs22@whu.edu.cn 网址:www.wdp.com.cn)
印刷:崇阳县天人印刷有限责任公司
开本:787×1092　1/16　印张:19.75　字数:470 千字　插页:1
版次:2017 年 8 月第 1 版　　2017 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-307-19629-2　　定价:39.00 元

前　　言

“数学物理方法”是电子信息类专业的基础理论课。该课程旨在培养学生掌握解析函数的理论、Fourier 变换和 Laplace 变换、数学物理方程等数学知识，从而使得学生具有扎实的数理基础来进行电磁场理论、微波技术、天线和电波传播方面的学习和深入研究。

本书是在武汉大学电子信息学院多年的教学讲义基础上编写而成的，体现了对数学物理方法这门课程的理解，同时规范了教学内容，便于教师教学使用和学生的课堂学习与自学。对于电子信息学院的各个专业，通过数学物理方法的学习是为了获得一种工具，借此工具可以继续学习各门专业课，所以本书概念的引进、定理的推导并没有过多拘泥于理论上的严格性，而是要求学生能建立起概念，从而掌握由概念而推演出来的各种计算方法。

高等数学(包括常微分方程)是数学物理方法的基础，所以本教材不重复高等数学的内容，同时也不重复高等数学中已经介绍过的计算方法，在定理和公式的证明中，特别是在例题的讲解中省略了许多计算步骤。如此可以减少教材的篇幅，突出内容的条理。希望学生能按教材中介绍的思路动手推导一遍，这样有利于概念的理解和计算方法的掌握。

在教学中笔者的经验是，例题讲解相当重要，这和把数学物理方法作为一种工具的目的是一致的，只有通过解题学生才能掌握这个工具。教材中的例题首先是介绍解题的方法，然后列出解题中应该说明的问题，学生如果能仔细阅读这些内容，对理解基本概念和掌握解题方法是很有帮助的。

本书利用积分变换来解一维无界的波动问题、三维无界 Poisson 方程和三维无界波动问题，而不是利用通常教材所介绍的方法。这样可以减少一些讲课课时，而不减少内容，另外可以使学生反复地复习积分变换的知识，从而突出本课程希望学生牢固地掌握积分变换的目的。

本书各章节的习题(一)是一些简单的习题，以达到验证基本概念的目的，习题(二)是一些提高性的习题，以达到灵活掌握概念的目的，这样便于学生循序渐进地学习。

本书按 72 学时来取舍内容，学生通过听课、复习和习题能入门数学物理方法。而本书的内容是武汉大学电子信息学院各专业课所必需的数学基础，具有很强的针对性和实用性，所以不可能在本书中寻找到解析函数和偏微分方程的严格理论，它也不具有手册性和习题集的功能。如果需要了解更广更深的数学物理方法知识，可以通过其他教科书寻求帮助，首推的是郭敦仁先生和梁昆淼先生编写的两本同名著作。此外，以下教材也值得在学

习本课程时参考：西安交通大学高等数学教研室编的《复变函数》(高等教育出版社 2011 年版)、东南大学数学系张元林编的《积分变换》(高等教育出版社 2012 年版)、姚端正和梁家宝编著的《数学物理方法》(武汉大学出版社 2004 年版)。

由于编者水平有限，再加之时间仓促，书中难免有不妥和疏漏之处，敬请广大读者指正。

编　者

2017 年 7 月

目　录

第一章　复变函数

复数是数学逻辑的产物，以复数作为自变量的函数是复变函数，对复变函数的研究将沿袭数学分析中研究实函数的方法，由于复变函数中所研究函数的自变量和因变量都是复数，会得到许多新的概念和计算方法。本章我们首先介绍复数域与复平面，并引入复球面与无穷远的概念；然后引入复平面上的点集、区域以及复变函数的定义、极限与连续的概念，为后续学习解析函数理论和方法奠定必要的基础。

1.1　复数

1.1.1　复数的定义和基本概念

定义 1.1　设有一对有序实数(x, y)，遵从下列运算规则：

加法：$(x_1, y_1)+(x_2, y_2)=(x_1+x_2, y_1+y_2)$，

乘法：$(x_1, y_1)\cdot(x_2, y_2)=(x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+x_2y_1)$，

则称这一对有序实数(x, y)为复数z，记为

$$z=(x, y)。\tag{1.1}$$

其中，x称为复数z的实部，记为$x=\mathrm{Re}z$，y称为复数z的虚部，记为$y=\mathrm{Im}z$。

由复数定义中的乘法运算，我们有$(0, 1)\cdot(0, 1)=(-1, 0)=-1$，这样，定义**虚单位** $\mathrm{i}=(0, 1)$，且有$\mathrm{i}^2=-1$。

复数z也可记为

$$z=x+\mathrm{i}y,\tag{1.2}$$

这是我们熟悉的复数的代数形式。

两复数$z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$和$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$相等，是指它们的实部、虚部分别相等。特别地，若复数$z=0$，则必须同时满足$x=0$，$y=0$。

虚部为零的复数就可看作实数，即$x+\mathrm{i}\cdot 0=x$，因此全体实数是全体复数的一部分。注意，复数不能比较大小。

复数$\bar{z}=x-\mathrm{i}y$称为复数$z=x+\mathrm{i}y$的**共轭复数**。容易得到

$$x=\frac{z+\bar{z}}{2},\ y=\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}。\tag{1.3}$$

1.1.2　复数的几何表示

复数$z=x+\mathrm{i}y$与有序实数对(x, y)一一对应，因此一个复数z可以用直角坐标平面

上的一个点 $(x,\ y)$ 表示(见图 1-1)。平面上 x 轴上的点对应着实数，故 x 轴称为实轴；y 轴上的非原点的点对应着虚数，故 y 轴称为虚轴。这样表示复数 z 的平面称为**复平面或 z 平面**。

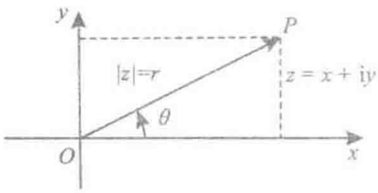

图 1-1

引入了复平面之后，我们在“数”和“点”之间建立了联系，这样可以借助于几何关系和术语研究复变函数，这为复变函数应用提供了条件，也丰富了复变函数的内容。

如图 1-1 所示，在复平面上，复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 还与由原点 O 指向点 $P(x,\ y)$ 的矢量 $\overrightarrow{OP}$ 构成一一对应的关系(复数 0 对应着零矢量)，称对应的矢量为**复矢量**。这种对应关系使复数的加、减法与矢量的加、减法之间保持一致。

对很多平面问题(如静电场问题、流体力学和弹性力学中的平面问题等)，用复数及复变函数作为研究工具是十分有效的，这正是由于复数可以用平面向量表示的缘故。

复矢量的长度称为复数 z 的**模**，记为 $|z|$，用 r 表示：

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}。\tag{1.4}$$

复矢量与正实轴之间的夹角称为复数 z 的**辐角**，记为 $\mathrm{Arg}z$ 或者 θ。

由于复矢量与 x 轴之间的夹角有无穷多个，而且任意夹角之间相差 2π 的整数倍，因此任何一个非零复数的辐角有无穷多个，这个现象称为辐角的多值性。如果以 $\arg z$ 表示其中一个特定的辐角，通常取值在 $(-\pi,\ \pi]$ 之间，从而有

$$-\pi<\arg z\leqslant\pi,\tag{1.5}$$

则一个复数的辐角可以表示为

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi,\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots。\tag{1.6}$$

我们称 $\arg z$ 为辐角的主值，也称主辐角。

当 $z\neq0$ 时，z 的主辐角可由下面的公式来确定：

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & 当 x>0,\ y 为任意实数;\\ \dfrac{\pi}{2}, & 当 x=0,\ y>0;\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & 当 x<0,\ y\geqslant0;\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & 当 x<0,\ y<0;\\ -\dfrac{\pi}{2}, & 当 x=0,\ y<0。\end{cases}$$

注意：

(1)主辐角的取值除了 $(-\pi,\ \pi]$ 外，也可以取其他值，如 $[0,\ 2\pi)$、$\left(-\dfrac{3}{2}\pi,\right.$

$\frac{1}{2}\pi\,\big]$ 等。

(2)当 $z=0$ 时，z 的模为零，而辐角无意义。

显然，复数 z 也可以用点 z 的极坐标 $(r,\ \theta)$ 表示(参见图 1-1)。复矢量在两个坐标轴上的投影分别为 x 和 y，则 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，非零复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 可以表示成三角形式：

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)。\tag{1.7}$$

共轭复数的三角形式表示为

$$\bar{z}=\overline{r\cos\theta+\mathrm{i}r\sin\theta}=r\cos\theta-\mathrm{i}r\sin\theta。$$

在计算主辐角 $\arg z$ 和辐角 $\operatorname{Arg} z$ 时，由图 1-1 知道，z 的值决定了 $\arg z$ 所在的象限。当 z 位于上半平面时，$0\leqslant\arg z<\pi$；当 z 位于上下平面时，$-\pi<\arg z<0$，而 $\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi$，$k=0$，$\pm1$，$\pm2$，…。例如：(1) $z=1+\mathrm{i}$，$\arg z=\frac{\pi}{4}$；(2) $z=-1+\mathrm{i}$，$\arg z=\frac{3}{4}\pi$；(3) $z=-1-\mathrm{i}$，$\arg z=-\frac{3}{4}\pi$；(4) $z=1-\mathrm{i}$，$\arg z=-\frac{1}{4}\pi$；(5) $z=\mathrm{i}$，$\arg z=\frac{\pi}{2}$。

利用 Euler 公式 $e^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，也可以将复数 z 表示成指数形式

$$z=re^{\mathrm{i}\theta},\tag{1.8}$$

则 z 的共轭复数的指数表示为

$$\bar{z}=re^{-\mathrm{i}\theta}。$$

例 1.1　将复数 $z=-\sqrt{12}+2\mathrm{i}$ 化成三角形式和指数形式。

解　由于 $\tan\theta=\frac{y}{x}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，而且 z 位于第二象限，所以 $\arg z=\frac{5}{6}\pi$。又因为

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=4,$$

所以 z 的三角形式为

$$z=4\left(\cos\frac{5}{6}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{5}{6}\pi\right)。$$

指数形式为

$$z=4e^{\frac{5}{6}\pi\mathrm{i}}。$$

1.1.3　复球面和无穷远点

复数域中 ∞ 也对应于复数平面上的一点(称为无穷远点)：以任意方式无限地远离原点，即可到达无穷远点。若由序列 $\{z_n\}$ 各项的模组成的序列 $\{|z_n|\}$，当 $n\to\infty$ 时，其极限是无穷大，我们就说 $\{z_n\}$ 是一个趋向于无穷的点列，记作

$$\lim_{n\to\infty}z_n=\infty \text{ 或 } z_n\to\infty\ (n\to\infty)。$$

为了更直观地理解和表现无穷远点，我们可以引入复数球面。为此，我们取一个在原点 O 与 z 平面相切的单位球面(直径等于 1，见图 1-2)，球面上的切点记为 S。过点 O 的球直径与球面有第二交点 N，称为极点。对于平面上的任一点 z，将它与极点 N 用直线相连接，直线 Nz 与球面有另一个唯一的交点 P(异于 N)；反之，除极点 N 外，对球面上的

任一点 P，复平面上也有唯一的点 z 与它对应，z 就是直线 NP 的延长线和平面的交点。这样，平面上的点和球面上的点(除极点 N 外)之间便建立了一一对应的关系。若点列 $\{z_n\}$ 趋向于 ∞，那么显然地，$\{z_n\}$ 在球面上的像点列就趋向于 N 点。因此，我们把 N 点作为"无穷"的像是很自然的，z 平面上与 N 相对应的那个唯一的点，称为复平面上的无穷远点。我们称这样的球面为**复球面**。

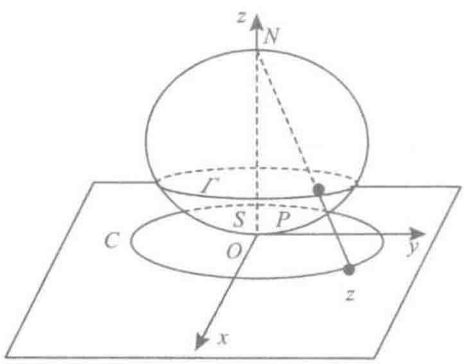

图 1-2

上述的平面与球面之间的对应变换，也叫作测地投影，它建立了球面上的点和平面上包括唯一无穷远点在内的点之间双方单值的对应关系。而包括无穷远点在内的复平面称为**扩充复平面**。

对于无穷远点，还可以用变换(或映射)的语言定义。例如变换 $w = 1/z$ 就建立了复数 z 和复数 w 之间的一一对应关系。复数 $z = 0$ 对应于 $w = \infty$，而 $z = \infty$ 对应于 $w = 0$。

在复数域中，无穷远点∞ 也是一个数，它对应于复球面上的 N 点。对于无穷远点∞，其模大于任何正数，而它的实部和虚部以及辐角都没有意义。

1.2　复数的运算

1.2.1　复数的四则运算

设 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$，$z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$，根据复数的定义，可以得到复数的四则运算法则。

加法和减法：

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2)。$$

乘法：

$$z_1z_2 = (x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1)。$$

复数的乘法按照多项式的乘法法则进行，只是将结果中的 i^2 代之以 -1。特别地，由复数的乘法运算，我们知道复数与共轭复数的乘积为实数，即

$$z\bar{z} = (x + \mathrm{i}y)(x - \mathrm{i}y) = x^2 + y^2 = r^2 = |z|^2。\tag{1.9}$$

除法：

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}=\frac{(x_1+\mathrm{i}y_1)(x_2-\mathrm{i}y_2)}{(x_2+\mathrm{i}y_2)(x_2-\mathrm{i}y_2)}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\quad z_2\neq 0。$$

在进行复数的除法运算时，只要将分母变成实数，即分子和分母同时乘以分母的共轭复数即可。

1.2.2 复矢量的运算

对于平面直角坐标系 (x, y) 上两个矢量的加减也可以利用平行四边形和三角形方法进行。对于复数的加减法，两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 和 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，我们可以利用矢量的加减法来进行计算。图 1-3(a) 和图 1-3(b) 表示利用平行四边形的方法进行复矢量的加减法，图 1-3(c) 和图 1-3(d) 表示利用三角形的方法进行复矢量的加减法。

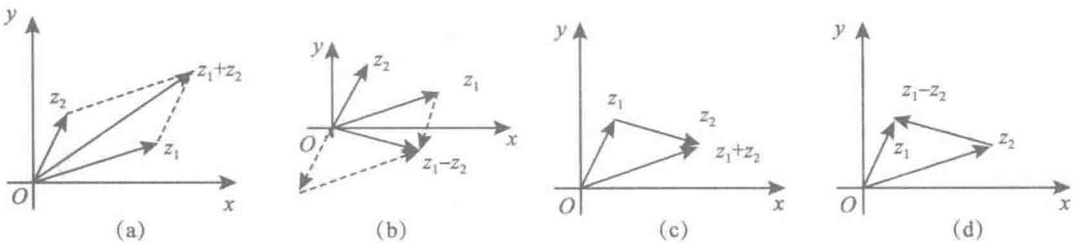

图 1-3

1.2.3 复数的极坐标和指数表示及其运算

在复数的三角表达式下，复数的乘法和除法运算变得很简单，并且具有明确的几何意义。设有两个复数 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$ 和 $z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$，它们的乘积是

$$\begin{aligned}z_1z_2&=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)]\\&=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]。\end{aligned}\tag{1.10}$$

同样，两个复数相除为

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)]。\tag{1.11}$$

由式(1.10)和式(1.11)可知，两个复数的乘积 z_1z_2 与商 z_1/z_2 的模分别等于 z_1 和 z_2 的模的积和商，而它们的辐角分别是 z_1 和 z_2 辐角的和与差，即

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\quad\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}\quad(z_2\neq 0);\tag{1.12}$$

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\theta_1+\theta_2=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2,\ \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\theta_1-\theta_2=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2。\tag{1.13}$$

图 1-4 给出了两个复矢量乘积的几何表示。

利用复数的指数表示法也可以简单进行复数的乘除运算，具有明确的几何意义。设有两个复数 $z_1=r_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1}$ 和 $z_2=r_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}$，则有

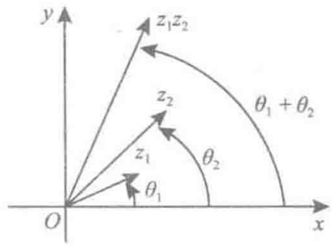

图 1-4

$$z_1z_2 = r_1e^{i\theta_1}r_2e^{i\theta_2} = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)},$$

当 $|z_2| \neq 0$ 时，

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1e^{i\theta_1}}{r_2e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}。$$

由此得到与式(1.12)和式(1.13)相同的结论。

1.2.4 复数的几何应用

由于复数与平面上的点具有一一对应的关系，因此平面点集(或者曲线)也可以用复数所满足的某些关系式来表示，反之亦然。

例如，$\mathrm{Im}z > 0$ 表示上半平面，而 $\mathrm{Re}(z+3)=0$ 表示 $x=-3$ 的直线。一般来说，若将曲线 $f(x, y)=0$ 用复数的方程来表示，则将 $x=\frac{z+\bar{z}}{2}$，$y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$ 代入即可，即函数 $f\left(x=\frac{z+\bar{z}}{2}, y=\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)=0$ 表示曲线的复数方程。若要知道复数的某些关系式 $F(z, \bar{z})=0$ 表示何种曲线，则将 $z=x+iy$，$\bar{z}=x-iy$ 代入即可。

另外，利用矢量的加减法也可以确定复平面上的一些曲线。

例 1.2 写出复平面上以 λ 为圆心、r 为半径的圆方程。

解 如图 1-5 所示在复平面上取一点 z，$z-\lambda$ 是如图所示的点 λ 到点 z 的矢量，$|z-\lambda|$ 就是点 z 和 λ 的距离，故方程

$$|z-\lambda| = r \tag{1.14a}$$

就是复平面上圆方程。

利用式(1.9)，有

$$|z-\lambda|^2 = (z-\lambda)\overline{(z-\lambda)} = r^2, \tag{1.14b}$$

得到

$$z\bar{z} - \lambda\bar{z} - \bar{\lambda}z + \lambda\bar{\lambda} - r^2 = 0。 \tag{1.14c}$$

这也是复平面上圆的方程，它确定了圆心在 z 平面的位置和半径的大小。

若将 $z=x+iy$ 和 $\lambda=\alpha+i\beta$ 代入，可以求得圆在平面解析几何中的方程。也可以将此圆的方程写成参数形式，即

$$z-\lambda = re^{i\theta}\ (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)。 \tag{1.15}$$

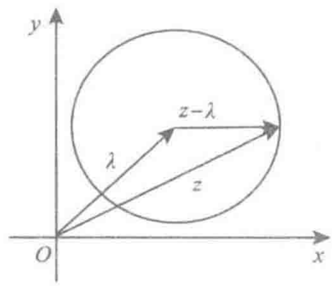

图 1-5

如果有一个圆方程 $z\bar{z}-(5-12\mathrm{i})z-(5+12\mathrm{i})\bar{z}=0$，根据式(1.14b)和式(1.14c)可知圆心在 $\lambda=5+12\mathrm{i}$，而 $\lambda\bar{\lambda}=169$，所以半径 $r=13$。

$|z-\lambda|<r\ (r>0)$ 表示 z 平面中以 λ 为圆心、r 为半径的圆的内部，而 $|z-\lambda|>r$ 则表示圆的外部。

1.2.5 复数的乘幂和方根

设 $z\neq 0$ 为一复数，记为 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，如果 n 是正整数，z^n 是 n 个 z 相乘的积，则由乘法公式(1.12)，我们得到

$$z^n=\overbrace{zz\cdots z}^{n\text{个}z}=[r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)。\tag{1.16}$$

式(1.16)也可以用指数形式表示为

$$z^n=(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n=r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}=r^n\mathrm{e}^{n(\arg z+2k\pi)\mathrm{i}}。$$

令 $z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}$，则有

$$z^{-n}=r^{-n}[\cos(-n\theta)+\mathrm{i}\sin(-n\theta)]=r^{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}。$$

因此，对于任意整数 n，总有

$$z^n=r^n[\cos(n\theta)+\mathrm{i}\sin(n\theta)]=r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}。$$

特别地，当 $|z|=1$ 时，有

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta,\tag{1.17}$$

式(1.17)称为德摩弗(De Moivre)公式。

设 z 为已知复数，称满足方程 $w^n=z$（n 为整数）的复数 w 为 z 的 n 次方根，记为 $w=\sqrt[n]{z}$。方根是乘幂的逆运算。

由方程 $w^n=z$，我们有

$$|w|^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\mathrm{Arg}w}=|z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{Arg}z},$$

由于 n 为整数，比较上式两端的模和辐角，可以得到

$$\begin{cases}|w|=\sqrt[n]{|z|}=|z|^{1/n},\\ \mathrm{Arg}w=\dfrac{\mathrm{Arg}z}{n}=\dfrac{\arg z+2k\pi}{n}。\end{cases}$$

因此，z 的 n 次方根为

$$w=\sqrt[n]{z}=|z|^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\arg z+2k\pi}{n}},\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots。\tag{1.18}$$

在式(1.18)中，当 k 取连续的 n 个整数值，例如取 $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ 时，得到辐角的 n 个值，其中任意两个相差不大于 2π，因此式(1.18)实际上有 n 个不同的值，当 k 取其他值时，只是这 n 个值的重复。为了确定起见，式(1.18)可写成

$$w_k=\sqrt[n]{z}=|z|^{\frac{1}{n}}e^{i\frac{\arg z+2k\pi}{n}},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1。\tag{1.19}$$

由式(1.19)可知，任何一个复数 z 的 n 次方根有 n 个值，且具有相同的模，它们都落在复平面上以原点为圆心、$\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆周上；而任意两个下标相连的根 w_k 和 w_{k+1} 之间的辐角差都是 $2\pi/n$，所以这 n 个值在圆上等距分布，其第一个根的辐角为 $\frac{\arg z}{n}$。这样，任意一个不为0的复数的 n 次方根有 n 个值，在几何上它是以原点为圆心、半径为 $|z|^{\frac{1}{n}}$ 的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点。

例 1.3 计算 $\sqrt[3]{i}$ 的值。

解 复数 i 的辐角为 $\mathrm{Arg}(i)=\frac{\pi}{2}+2k\pi=\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi$，根据式(1.18)有

$$w_k=(i)^{\frac{1}{3}}=e^{i\frac{(2k+1/2)}{3}\pi}\ (k=0,\ 1,\ 2)。$$

$k=0$ 时，$w_0=e^{\frac{i\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$；

$k=1$ 时，$w_1=e^{\frac{i5\pi}{6}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$；

$k=2$ 时，$w_2=e^{\frac{i3\pi}{2}}=-i$。

k 取其他整数时，重复以上的值。

这样，复数 i 的 3 次方根有 3 个值，在几何上它是以原点为圆心、单位圆的内接正 3 边形的 3 个顶点，如图 1-6 所示。

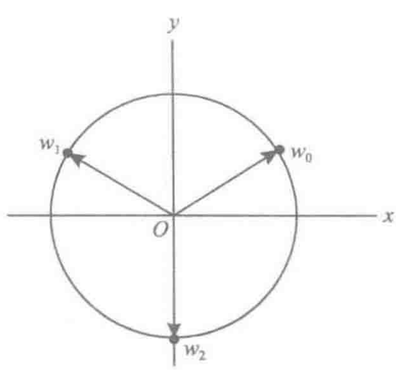

图 1-6

1.3 复平面的点集

1.3.1 基本概念

为了更好地研究复变函数，我们定义以下几类复数点集(参见图 1-7)。

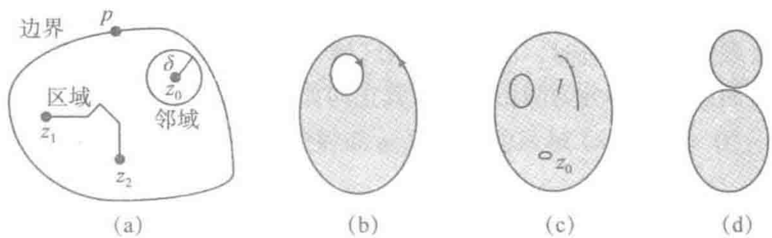

图 1-7

定义 1.2(邻域) 满足 $|z-z_0|<\delta$ ($\delta>0$ 的任意正实数)的点集称为 z_0 的 δ 邻域，简称邻域；满足不等式 $0<|z-z_0|<\delta$ 的点集称为 z_0 的去心邻域。

定义 1.3(内点和外点) 对复平面上点集 D，若点 z_0 及其邻域是均属于 D 的点集，则 z_0 称为 D 的内点；若不论 δ 取何值，点 z_0 及其邻域有不属于 D 的点，则称 z_0 为 D 的外点。

定义 1.4(区域) 同时满足以下两个条件的点集 D 构成区域：(1) D 内的点均为内点；(2) D 是连通的。所谓连通，是指 D 中的任意两点都可以用属于 D 内点的一条折线连接起来。图 1-7 中(b)、(c)和(d)的图形都是区域。

如果区域包括 $z=\infty$，则称之为无界区域，否则称为有界区域。

定义 1.5(边界) 若点 z_0 的任意小的邻域内既有属于点集 D 的点，又有不属于 D 的点，则称 z_0 为 D 的边界点。所有区域的边界点组成区域的边界 C。

1.3.2 区域与曲线

1. 闭区域

区域 D 及其边界 C 所构成的点集称为闭区域，记为 $\overline{D}$，则 $\overline{D}=D+C$。

例如，由 $|z-1|<1$ 构成的点集是区域，而 $|z-1|=1$ 是区域的边界，故 $|z-1|\leq 1$ 是闭区域。但是由 $|z-1|<1$ 和 $|z+1|<1$ 构成的点集是开集，且它们不是连通的，所以不是区域。

2. 简单曲线

没有重点的连续曲线称为简单曲线，如果简单曲线的起点与终点重合称为简单闭曲线。

3. 单连通区域和多连通区域

若在区域 D 内作任意简单的闭合曲线，闭合曲线内的点均属于区域 D，这样的区域