

现代塑性加工力学

XIANDAI SUXING JIAGONG LIXUE

张贵杰 李海英 编著



冶金工业出版社
www.cnmp.com.cn

现代塑性加工力学

张贵杰 李海英 编著



北 京
冶 金 工 业 出 版 社
2017

内 容 提 要

现代塑性加工力学是应用现代的数学-力学方法来求解塑性加工中的力能参数、变形参数和应力应变在工件内的分布以及与此有关的其他问题。本书主要内容包括泛函、张量分析等数学基础；变形力学方程；塑性变分原理；能量法；有限元法基础；弹-塑性有限元法、刚-塑性有限元法、黏-塑性有限元法；塑性加工中的应力场、温度场等。

通过该书的学习，可以掌握现代塑性加工力学的基本理论、基本方法，使读者具备材料加工更深层次的理论基础，为进入相关研究提供必要理论。

本书适合材料科学与工程专业高年级本科生、研究生以及从事材料加工工程的科研和工程技术人员使用和参阅。

图书在版编目(CIP)数据

现代塑性加工力学 / 张贵杰, 李海英编著. —北京:
冶金工业出版社, 2017. 3
ISBN 978-7-5024-7448-5

I. ①现… II. ①张… ②李… III. ①金属压力加工—
塑性力学 IV. ①TG301

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 043917 号

出 版 人 谭学余

地 址 北京市东城区嵩祝院北巷 39 号 邮编 100009 电话 (010)64027926

网 址 www.cnmp.com.cn 电子信箱 yjcbs@cnmp.com.cn

责任编辑 常国平 美术编辑 彭子赫 版式设计 彭子赫

责任校对 卿文春 责任印制 李玉山

ISBN 978-7-5024-7448-5

冶金工业出版社出版发行；各地新华书店经销；固安华明印业有限公司印刷

2017 年 3 月第 1 版，2017 年 3 月第 1 次印刷

787mm × 1092mm 1/16；13.5 印张；323 千字；205 页

36.00 元

冶金工业出版社 投稿电话 (010)64027932 投稿信箱 tougao@cnmp.com.cn

冶金工业出版社营销中心 电话 (010)64044283 传真 (010)64027893

冶金书店 地址 北京市东四西大街 46 号(100010) 电话 (010)65289081(兼传真)

冶金工业出版社天猫旗舰店 yjgycbs.tmall.com

(本书如有印装质量问题，本社营销中心负责退换)

前 言

现代塑性加工力学是运用现代的数学-力学方法来研究金属等材料在塑性变形过程中的变形力学规律的基础理论学科。它的任务是结合金属等材料的流变特性,分析塑性成型中的应力应变状态、建立变形力学方程、确定塑性加工变形时的力能参数和变形参数以及应力和应变在变形体内的分布,从而为正确选择塑性加工变形方式、制定合理的工艺规程、优化设计轧辊孔型和其他工模具、选择合适的加工设备、确定加工变形界限、分析加工变形过程产生缺陷的原因及其消除方法等提供科学依据。尤其在自动化、智能化的塑性成型工艺及设备不断普及的情况下,对工艺及设备参数的计算精度和应用范围的要求越来越高,现代塑性加工力学的作用也越来越重要。目前,许多工科院校已为高年级本科生,特别是工科研究生开设了这门课程。因此,编写一本适合于工科研究生和高年级本科生的教材,显然是十分必要的。

华北理工大学金属材料及加工系十几年来相继为工科研究生、教师进修班的学员开设了这门课程。本书就是在为历届研究生和教师进修班印发的讲义的基础上,广泛听取授课老师和学员的意见后,经过多次修改、补充编写而成的。为此,我们谨向使用过本书初稿并提出修改意见的老师表示感谢。

全书内容由张贵杰教授统一安排、规划,李海英老师编写第2~4章,张贵杰老师编写其余各章。研究生陈川、宋卓霞、张爱亮、赵伟娜、李康、王英姿、赵景莉等在公式输入、图表绘制等书稿整理过程中付出了辛苦劳动,在此表示衷心的感谢。

本书可供工科院校研究生和高年级本科生作为塑性加工力学的教材使用,也可供有关专业的教师和工程技术人员参考。

虽然本书的初稿曾多次试用、修改,但限于编者水平,书中一定还存在不足和疏漏之处,恳请读者批评与指正。

编著者
2016年11月

目 录

1 塑性加工力学问题的求解方法	1
1.1 初等解析法	1
1.1.1 均匀变形功法	1
1.1.2 滑移线场方法	3
1.1.3 上界元方法	5
1.1.4 流函数法	9
1.1.5 希尔法	11
1.2 近现代求解方法	14
1.2.1 摄动法	14
1.2.2 有限差分法	15
1.2.3 里兹法	16
1.2.4 加权余量法	18
1.2.5 边界元法	22
1.2.6 有限元法	22
2 泛函分析基础	26
2.1 集合及其运算	26
2.1.1 集合的概念	26
2.1.2 集合的运算	26
2.1.3 集合的运算性质	27
2.2 勒贝格积分	28
2.2.1 勒贝格测度	28
2.2.2 可测函数	30
2.2.3 勒贝格积分的概念与性质	31
2.3 常用不等式	32
2.3.1 积分不等式	32
2.3.2 序列型不等式	33
2.4 正交与正交分解	33
2.5 内积空间的标准正交系	34
3 变分法	35
3.1 泛函的概念	35

3.2 变分及其特性	36
3.2.1 泛函的自变函数的变分	36
3.2.2 泛函的变分	37
3.3 泛函的极值条件	40
3.4 变分法的基本预备定理和欧拉方程	40
3.5 在约束条件下泛函的极值——条件极值问题的变分法	44
3.6 泛函极值问题的几种近似算法	46
3.6.1 里兹法	46
3.6.2 康托罗维奇法	48
4 求和约定和张量运算	51
4.1 求和约定	51
4.2 张量及其性质	52
4.3 张量的运算规则	54
5 变形力学方程	58
5.1 静力方程和几何方程	58
5.1.1 静力方程	58
5.1.2 几何方程	58
5.2 屈服条件	59
5.3 等效应力、等效应变和等效应变速率	60
5.4 变形抗力模型	61
5.5 塑性状态下的本构关系	62
5.5.1 弹性状态下的本构关系	62
5.5.2 关于 Drucker 公设和最大塑性功原理	62
5.5.3 关于加载和卸载	65
5.5.4 增量理论	66
5.5.5 全量理论	69
6 塑性变分原理	71
6.1 塑性加工力学边值问题的提法	71
6.1.1 方程组	71
6.1.2 边界条件	72
6.2 虚功(功率)原理	73
6.2.1 存在应力间断面的虚功率原理	75
6.2.2 存在速度间断面的虚功(功率)原理	77
6.3 刚-塑性材料的变分原理	79
6.3.1 刚-塑性材料的第一变分原理	79
6.3.2 刚-塑性材料完全的广义变分原理	81

6.3.3 刚 - 塑性材料不完全的广义变分原理	83
6.3.4 刚 - 塑性材料的第二变分原理	83
6.4 刚 - 黏塑性材料的变分原理	84
6.5 弹 - 塑性硬化材料的变分原理	86
6.5.1 全量理论的变分原理	86
6.5.2 增量理论的最小势能和最小余能原理	87
7 应用能量法解压力加工问题	89
7.1 平面变形锻压矩形坯	90
7.1.1 边界条件	90
7.1.2 位移函数的选择	90
7.1.3 a 和工件外形的确定	91
7.1.4 实验验证	92
7.1.5 变形力的计算	93
7.2 用平锤头带外端锻压	94
7.2.1 假设条件	95
7.2.2 速度场的确定	95
7.2.3 确定待定参数 a	96
7.2.4 确定 $\bar{p}/\sigma_z$	97
7.3 镦粗正多边形棱柱体	98
7.4 平面变形剪切压缩	100
7.5 带外端平面变形压缩厚件时变形力的确定	102
7.6 三维轧制问题	105
7.6.1 小林史郎的工作	105
7.6.2 加藤和典的工作	110
7.7 应用流函数建立运动许可速度场	114
7.7.1 流函数的概念	114
7.7.2 平面变形和轴对称变形的定常塑性成型过程	117
7.7.3 三维定常变形的塑性成型过程	119
7.7.4 棱柱体的镦粗	121
8 等参单元和高斯求积法	123
8.1 三角形线性单元	124
8.2 矩形双线性等参单元	127
8.3 任意四边形等参单元	129
8.4 八结点曲边四边形等参单元	133
8.5 三维等参单元	136
8.6 高斯求积法	142
8.6.1 一维插值求积法	142

8.6.2 一维高斯求积法	143
8.6.3 高维时的高斯求积法	146
9 弹-塑性有限元法	148
9.1 弹性有限元法简单引例	148
9.2 弹性有限元法	152
9.2.1 单元刚度矩阵	153
9.2.2 整体刚度矩阵	155
9.2.3 整体刚度矩阵的修正	159
9.2.4 等效结点和荷载列阵	160
9.2.5 计算步骤及注意事项	160
9.3 弹-塑性矩阵	161
9.4 弹-塑性有限元的变刚度法	166
9.5 弹-塑性有限元的初载荷法	170
9.5.1 初应力法	171
9.5.2 初应变法	172
9.6 残余应力和残余应变的计算	173
10 刚-塑性有限元法	175
10.1 刚-塑性有限元法概述	175
10.2 拉格朗日乘子法	176
10.3 体积可压缩法	180
10.4 罚函数法	184
10.5 刚-塑性有限元法计算中的若干技术问题	185
10.5.1 初始速度场	185
10.5.2 关于收敛判据	186
10.5.3 刚-塑性区分界的确定	186
10.5.4 奇异点的处理	187
10.5.5 摩擦条件	188
10.6 例题——带外端锻压矩形件	188
11 其他有限元法	197
11.1 黏-塑性有限元法	197
11.1.1 弹-黏塑性有限元法	197
11.1.2 刚-黏塑性有限元法	199
11.2 大变形弹-塑性有限元法	199
11.3 能量法与刚-塑性有限元法相结合的方法	202
参考文献	204

1 塑性加工力学问题的求解方法

1.1 初等解析法

1.1.1 均匀变形功法

1.1.1.1 塑性应变能

物体发生塑性变形时，外力所做的变形功一部分变成弹性应变能增量储存在物体内部，另一部分变成塑性应变能增量耗散掉。

通常把与应力在塑性应变增量上所做的功相对应的那部分塑性应变能，称为耗散能或消耗能。

如图 1-1 所示，正应力分量 σ_x 在 x 方向所消耗的塑性功增量为

$$(dW_\sigma)_x = \sigma_x dydz dx d\varepsilon_x$$

则单位体积所做的塑性功增量为

$$(dW_\sigma)_x = (\sigma_x dydz \cdot dx d\varepsilon_x) / dV = \sigma_x d\varepsilon_x$$

同理，剪应力分量 τ_{zx} 所做的单位功增量为（图 1-2）

$$(dW_\sigma)_{zx} = (\tau_{zx} dydx dz d\varphi) / dV = \tau_{zx} d\varphi = 2\tau_{zx} d\varepsilon_{zx}$$

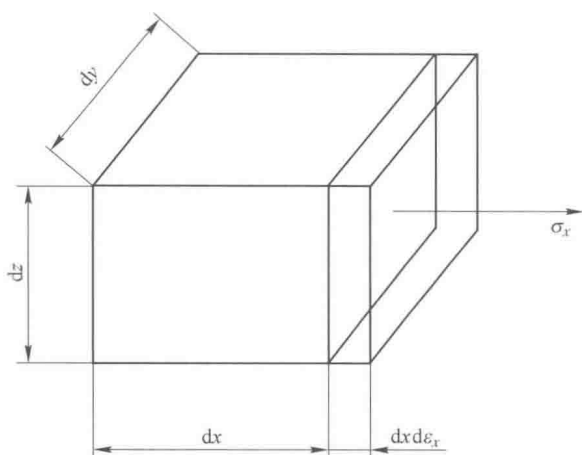


图 1-1 正应力做功示意图

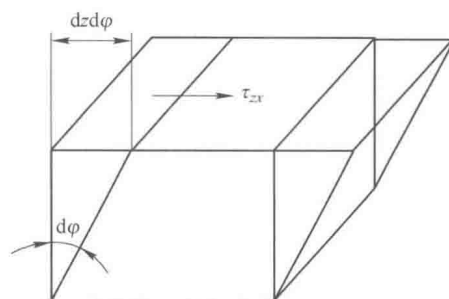


图 1-2 剪应力做功示意图

复杂状态下刚塑性体单位体积的塑性应变能为

$$dW_\sigma = \sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + 2(\tau_{xy} d\varepsilon_{xy} + \tau_{yz} d\varepsilon_{yz} + \tau_{zx} d\varepsilon_{zx}) = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$$

由于塑性变形时体积不变，球应力不做功，则

$$dW_p = (s_{ij} + \delta_{ij} \sigma_m) d\varepsilon_{ij} = s_{ij} d\varepsilon_{ij} + \sigma_m \delta_{ij} d\varepsilon_{ij} = s_{ij} d\varepsilon_{ij}$$

而整个变形体的塑性功为

$$W_p = \int_V s_{ij} d\varepsilon_{ij} dV$$

1.1.1.2 弹性应变能 (图 1-3)

在线弹性情况下, 单元体的弹性能

$$dW_e = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dx dy dz$$

单位体积的弹性能

$$\begin{aligned} dW_e &= \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \\ &= \frac{1}{2} (s_{ij} + \delta_{ij} \sigma_m) (e_{ij} + \delta_{ij} \varepsilon_m) \\ &= \frac{1}{2} (s_{ij} e_{ij} + \delta_{ij} s_{ij} \varepsilon_m + \delta_{ij} \sigma_m e_{ij} + \delta_{ij} \delta_{ij} \sigma_m \varepsilon_m) \end{aligned}$$

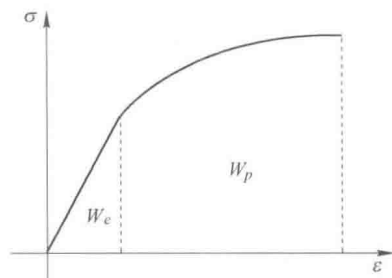


图 1-3 弹性功和塑性功

式中第一项与偏张量有关, 表示形状变化的能量。

$$\begin{aligned} dW_\sigma^s &= \frac{1}{2} s_{ij} e_{ij} = \frac{1}{4G} s_{ij} s_{ij} \\ s_{ij} s_{ij} &= s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 + 2(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = \frac{2}{3} \bar{\sigma}^2 \\ dW_\sigma^s &= \frac{1}{6G} \bar{\sigma}^2 \\ dW_\sigma &= \frac{1}{2G} \left(\frac{1}{3} \bar{\sigma}^2 + 3\sigma_m^2 \right) \\ \begin{cases} \delta_{ij} s_{ij} = s_x + s_y + s_z = 0 \\ \delta_{ij} e_{ij} = e_x + e_y + e_z = 0 \\ \delta_{ij} s_{ij} \varepsilon_m = 0 \\ \delta_{ij} e_{ij} \sigma_m = 0 \end{cases} \\ dW_e &= \frac{1}{2} (s_{ij} e_{ij} + \delta_{ij} \delta_{ij} \sigma_m \varepsilon_m) = \frac{1}{2} (s_{ij} e_{ij} + 3\sigma_m \varepsilon_m) \end{aligned}$$

式中第二项表示体积变化的能量。

$$dW_\sigma^v = \frac{3}{2} \sigma_m \varepsilon_m = \frac{3(1-2\nu)}{2E} \sigma_m^2$$

1.1.1.3 均匀变形功法 (功平衡法)

刚塑性体在变形的某一瞬时, 外力 (载荷 P 和表面摩擦力 f) 所做的功增量 (dW_F 和 dW_f) 等于内力 (应力) 所做的功增量 (dW_σ)

$$dW_F - dW_f = dW_\sigma$$

塑性变形功增量

$$\begin{aligned} dW_\sigma &= s_{ij} d\varepsilon_{ij} dV = \frac{3}{2} \cdot \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} s_{ij} s_{ij} dV = \bar{\sigma} \cdot d\bar{\varepsilon} dV \\ d\varepsilon_{ij} &= \frac{3}{2} \cdot \frac{d\bar{\varepsilon}}{\bar{\sigma}} s_{ij}, \quad s_{ij} s_{ij} = \frac{2}{3} \bar{\sigma}^2 \end{aligned}$$

根据密席斯屈服条件, 塑性变形时 $\bar{\sigma} = \sigma_s$, 故整个变形体 (体积为 V) 所消耗的塑性变形功增量

$$dW_{\sigma} = \int dw_{\sigma} = \int (\bar{\sigma} \cdot d\bar{\varepsilon}) dV = \sigma_s \int_V d\bar{\varepsilon} dV$$

摩擦所消耗的功增量

$$dW_f = \int_S \tau du_f dS$$

式中 τ ——接触面 S 上的摩擦应力;

du_f —— τ 方向上的位移增量。

在塑性成型时, 由于摩擦的影响, 变形总是不均匀的, 因而很难确定应变增量。因此需要作变形均匀假设, 这种基于均匀变形假设的变形功法称为均匀变形功法。

1.1.1.4 均匀变形功法的优点

在解决塑性变形问题时, 常见解析计算方法有主应力法、滑移线法、上限法和均匀变形功法, 其中均匀变形功法具有直观、易懂等特点。

(1) 主应力法是应用较早使用较广泛的求解变形力的一种方法。虽然以简单、准确著称, 但由于其只能确定接触面上的应力大小和分布, 与实际情况有所偏差, 故通常选择结果同样误差较小的变形功法计算。

(2) 与滑移线相比, 两种解法结果相差 3% 以内。而求解过程中, 均匀变形功法更为简单便捷, 适用于实际工程中使用。另外滑移线法只适用于应变速率不大、轴对称问题, 复杂的连续挤压过程则需要均匀变形功法解决。

(3) 与上限法相比, 两者均求得上限解, 且温度计算公式均简洁, 但变形功法求得的结果距离真实值相对更接近一些。

(4) 有限元法利用离散化的思想, 利用代数方程组求解。其结果更为精确, 并可以直观、明了地给出温度、应力、应变、损害等各种场变量; 但要求运算者具有较高的操作软件能力, 对于建模、分析均有较高素养, 且运算时间较长, 参数设定的差异可能导致结果不收敛等问题, 不适用于生产第一线人员使用。

(5) 有限体积法与有限元法很接近, 只是在网格计算中有固定的参考系, 以物质的有限体积为基本思想, 结果与有限元法相近, 同样需要较长运算时间和较高技能, 无法达到工厂快速预测的要求。

1.1.2 滑移线场方法

滑移线理论是 20 世纪 20 年代至 40 年代间, 人们对金属塑性变形过程中, 光滑试样表面出现“滑移带”现象经过力学分析, 而逐步形成的一种图形绘制与数值计算相结合的求解平面塑性流动问题变形力学问题的理论方法。这里所谓“滑移线”是一个纯力学概念, 它是塑性变形区内, 最大剪切应力 ($|\tau_{\max}|$) 等于材料屈服切应力 (k) 的轨迹线。

对于平面塑性流动问题, 由于某一方向上的位移分量为零 (设 $du_z = 0$), 故只有三个应变分量 ($d\varepsilon_x$ 、 $d\varepsilon_y$ 、 $d\gamma_{xy}$), 也称平面应变问题。

根据塑性流动法则, 可知

$$\sigma_z = \sigma_2 = (\sigma_x + \sigma_y)/2 = \sigma_m = -p \quad (1-1)$$

式中 σ_m ——平均应力；

p ——静水压力。

根据塑性变形增量理论，平面塑性流动问题独立的应力分量也只有三个 (σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy}) (图 1-4 (a))，于是平面应变问题的最大切应力为

$$\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 = \sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + \tau_{xy}^2} \quad (1-2)$$

可见，这是一个以 $\tau_{\max}$ 为半径的圆方程，这个圆便称为一点的应力状态的莫尔圆 (图 1-4 (c))。图中设 $\sigma_x < \sigma_y < 0$ (即均为压应力，因塑性加工中多半以压应力为主)。值得注意的是绘制莫尔圆时，习惯上规定：使单元体顺时针旋转的切应力为正，反之为负。因此图 1-4(c) 中的 τ_{yx} 为正值，而 τ_{xy} 取负值。

根据平面流动的塑性条件， $\tau_{\max} = k$ (对 Tresca 塑性条件 $k = \sigma_s/2$ ；对 Mises 塑性条件 $k = \sigma_s/\sqrt{3}$)。

于是，由图 1-4 (c) 的几何关系可知

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -p - k \sin 2\phi \\ \sigma_y &= -p + k \sin 2\phi \\ \tau_{xy} &= k \cos 2\phi \end{aligned} \quad (1-3)$$

式中 p ——静水压力， $p = -\sigma_m = -(\sigma_x + \sigma_y)/2$ ；

ϕ ——最大切应力 $\tau_{\max} (=k)$ 方向与坐标轴 Ox 的夹角。

通常规定为 Ox 轴正向为起始轴逆时针旋转构成的倾角 ϕ 为正，顺时针旋转构成的倾角 ϕ 为负 (图 1-4 中所示 ϕ 均为正)。由图 1-4 可知，倾角 ϕ 的数值大小与坐标系的选择有关，但静水压力 p 为应力不变量，不会随坐标系的选择而变化。

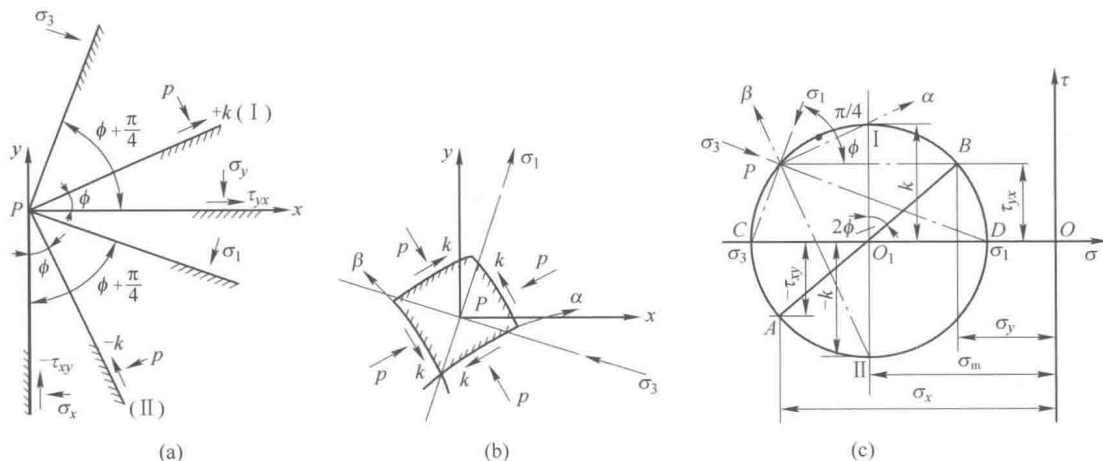


图 1-4 平面应变问题应力状态的几何表示

(a) 塑性流动平面 (物理平面)；(b) α - β 正交曲线坐标系的应力特点；(c) 应力莫尔圆

现设塑性流动平面上的点 P 在莫尔圆上的映射点 (称为 Prager 极点) 为 P' 点，该点为过点 $B(\sigma_y, \tau_{yx})$ 引平行 σ 轴的平行线与莫尔圆的交点。 BP' 轴表示塑性流动平面中的 X 轴。根据几何关系，连 $P'C$ 的最大主应力 σ_1 的作用方向；连 $P'D$ 的最小主应力 σ_3 的作用方向。连 $P'I$ 的 $\tau_{\max} = k$ 的作用方向，常用 α 表示；连 $P'II$ 的 $-\tau_{\max} = k$ 的作用方向，常

用 β 表示。由此可知：自 σ_1 作用方向顺时针旋转 $\pi/4$ ，即为 α 方向；逆时针方向旋转 $-\pi/4$ 即为 β 方向。并且 σ_1 的作用方向总是位于 α - β 构成的右手正交曲线坐标系的第一或第三象限。据此，根据已知的 σ_1 作用方向便可确定 α 、 β 的走向。

对于理想刚塑材料，材料的屈服切应力 k 为常数。因此塑性变形区内各点莫尔圆半径（即最大切应力 $\tau_{\max}$ ）等于材料常数 k 。如图1-5所示，在 x - y 坐标平面上任取一点 P_1 ，其 $\tau_{\max}=k$ ，即 α 方向为 $\tau_{\alpha 0}$ ，沿 $\tau_{\alpha 0}$ 方向上取一点 P_2 ，其 α 方向为 $\tau_{\alpha 1}$ ，依次取点 P_3 ，其 α 线方向为 $\tau_{\alpha 2}$ ，依次连续取下去，直至塑性变形区的边界为止……，最后获得一条折线 $P_1-P_2-P_3-P_4\cdots$ ，称为 α 线。按正、负两最大切应力相互正交的性质，由 P 点沿与 τ_{α} 垂直的方向，即在 P 点的 $(-\tau_{\max})$ 方向上取点，也可得到一条折线 $P_1-P'_2-P'_3-P'_4\cdots$ ，称为 β 线。当所取点间距无限接近时，以上两折线便为光滑曲线。依次从线上的其他点，如从点 P_1 、 P_2 、 $P_3\cdots$ 和 P'_1 、 P'_2 、 $P'_3\cdots$ 出发，同样可作出

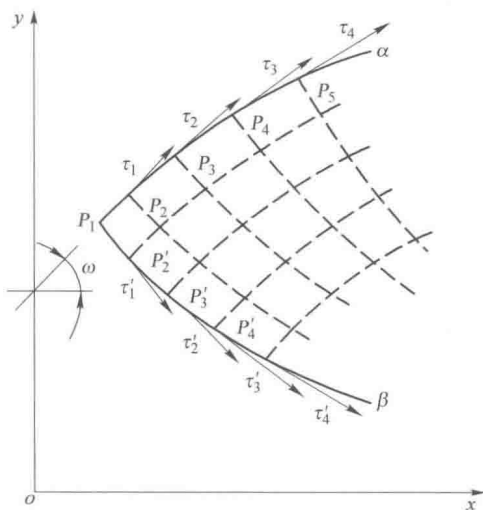


图 1-5 x - y 坐标系与 α - β 滑移线网络

许多类似的滑移线，布满整个塑性变形区，它们由两族相互正交的滑移线网构成，称为滑移线场。其中， α 线族上的 $\tau_{\alpha}=\tau_{\max}=k$ ， β 线族上的 $-\tau_{\beta}=\tau_{\max}=k$ 。两滑移线的交点称为结点。由此可见，滑移线为塑性变形区内最大剪切应力等于材料屈服切应力的迹线，表明曲线上任一点的切线方向即为该点最大切应力的作用方向。

由图1-5可知，滑移线的微分方程为

$$\begin{cases} \text{对 } \alpha \text{ 线} & \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\alpha} = \tan \phi \\ \text{对 } \beta \text{ 线} & \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\beta} = \tan (\phi + \pi/2) = -\cot \phi \end{cases} \quad (1-4)$$

以上分析表明，在力学上滑移线应是连续的。但根据金属塑性变形的基本机制是晶体在切应力作用下沿着特定的晶面和晶向产生滑移，滑移结果在试样表面显露出滑移台阶，而滑移台阶是原子间距的整数倍，是不连续的。因此，滑移线的物理意义是金属塑性变形时，发生晶体滑移的可能地带。只有特定的晶面和晶向的切应力达到金属的临界屈服切应力时才会使晶体产生滑移变形。

滑移理论法是一种图形绘制与数值计算相结合的方法，即根据平面应变问题滑移线场的性质绘出滑移线场，再根据精确平衡微分方程和精确塑性条件建立汉盖（Hencky）应力方程，求得理想刚塑性材料平面应变问题变形区内应力分布以及变形力的一种方法。

1.1.3 上界元方法

为了使上限法在塑性加工中的应用程式化，20世纪50年代开始，Kudo对平面应变和

轴对称问题提出了单位矩形变形区和单位圆柱变形区的概念,在此基础上形成了所谓UBET (upper bound elemental technique) 方法。这种方法的出现,使上限法与有限元法的差别大为缩小。但是,UBET 方法容易掌握,对计算机的要求比有限元方法低得多,因而在塑性加工领域中获得广泛的应用。

UBET 主要是通过建立较规范的上限单元流动模式,即将变形体划分若干单元,对每个单元作上限分析,再通过集成和优化参数,确定最优速度场,求解变形力、变形功,显示流动情况,并在对流动模式进行优化处理之后,得到令人满意的上限解。

上限元法的主要思想是把工件划分成一定数量的标准简单单元。每个单元与工件整体一样都分别适于上限定理,并用上限法求解。此时各单元的运动许可速度场可用边界速度表示。边界速度应满足如下三个条件:(1) 工件与工具接触处的速度边界条件;(2) 各单元间边界上的法向速度连续;(3) 各单元体积不变。

目前,用上限元法对轴对称和非轴对称模锻变形过程进行了解析,上限单元技术适用于求解平面应变问题和轴对称问题。

1.1.3.1 基本原理

下面介绍圆柱体压缩平行速度场的矩形元(图1-6和图1-7)。假定矩形元边界为直线,且法向速度均匀分布。

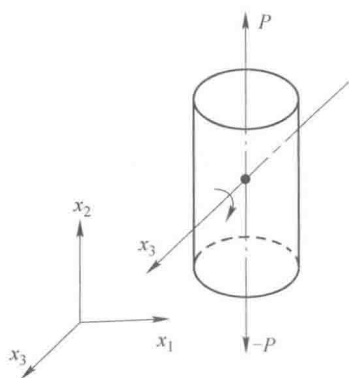


图 1-6 棒料的刚性转动

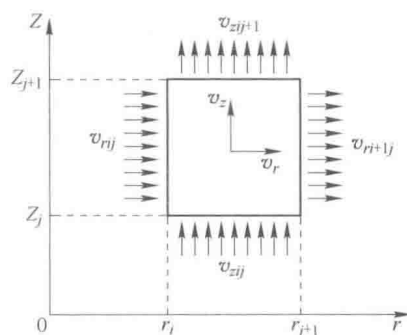


图 1-7 矩形元的速度场

对轴对称工件由体积不变条件得

$$2\pi(Z_{j+1} - Z_j)(r_{i+1}v_{ri+1j} - r_i v_{rij}) + \pi(r_{i+1}^2 - r_i^2)(v_{zij+1} - v_{zij}) = 0$$

设定矩形元的运动许可速度

$$v_z = C_1 Z + C_2$$

$$v_r = -\frac{1}{2}C_1 r + \frac{C_3}{r}$$

$C_1 \sim C_3$ 可按单元的几何条件和边界条件来确定,即按 $\frac{\Delta v_z}{\Delta Z} = C_1$; $Z = Z_i$ 时, $v_z = v_{zij}$, $r = r_i$ 时, $v_r = v_{rij}$ 得

$$C_1 = (v_{zij+1} - v_{zij}) / (Z_{i+1} - Z_j)$$

$$C_2 = (v_{zij}Z_{j+1} - v_{zij}Z_j) / (Z_{i+1} - Z_j)$$

$$C_3 = v_{ij} r_{ij} + (v_{zij+1} - v_{zij}) r_i^2 / 2 (Z_{i+1} - Z_j)$$

由设定的速度场求等效应变速率, 进而求单元的变形功率

$$N_d^e = \sigma_s \iiint_{V_e} \dot{\varepsilon} dV$$

$$\text{单元间边界上的剪切功率为 } N_s^e = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_s \iint_S |\Delta v_i| ds$$

式中 $|\Delta v_i|$ ——单元间的相对滑动速度。

$$\text{接触面摩擦功率损失为 } N_f = \frac{m}{\sqrt{3}} \sigma_s \iint_{S_f} |\Delta v_i| ds$$

求出以上各种功率之后, 其总和就是总功率。对后者进行优化, 得到的最小总功率所对应的速度场就是所求的速度场。

设所划分的单元数为 m 个, 包括外部边界在内的总边界数为 n , 其中外部边界数为 n_0 。为了确定所有单元的运动许可速度场, 必须确定所有边界的法向速度。与这些法向速度有关的 m 个单元可列出 m 个体积不变方程, 即相当于 m 个约束条件。这样, 就需要另外确定 $N = n - (m + n_0)$ 个边界的法向速度。将这些法向速度作为独立变量进行解析, 即把总功率看成是这些独立变量的函数将其优化。这样就把此问题归结为求 N 个变量多元函数的极值问题。

1.1.3.2 求解思路

为了确定接触面上一点处的单位压力, 须在该点处假想一个单元 E , 令其一个面为该点处工件与工具的接触微面 (ΔS)。首先按 UBET 确定包含此假想单元在内的, 并考虑工具以同一速度 v 作用时的总功率 $\dot{W}$ 。然后在假想单元 E 和工具接触的微面上加以微小的速度增量 Δv , 使此微面上的速度为 $v + \Delta v$, 而接触面的其他部分速度为 v , 并用 UBET 求出此状态下的总功率 $\tilde{\dot{W}}$ 。于是作用在该点处的单位压力 p 为

$$p = \frac{\Delta \dot{W}}{\Delta S \Delta v}$$

其中

$$\Delta \dot{W} = \tilde{\dot{W}} - \dot{W}$$

上限单元法是这样建立流动模型的: 用直线段代替变形轮廓的曲线段, 将变形体划分为若干规范单元, 当前常采用矩形单元和直角三角形单元。直角三角形单元按其几何位置的不同又分为四种, 故总共有五种基本单元, 如图 1-8 所示。

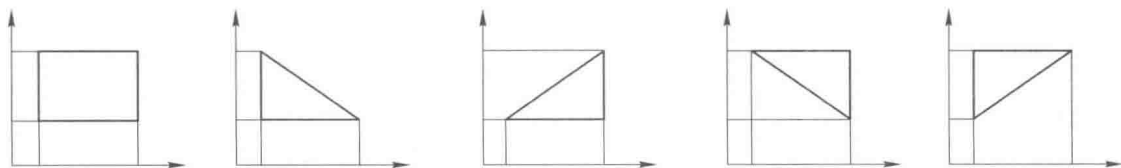


图 1-8 五种基本单元

且作如下假设: (1) 变形体材料符合 Mises 屈服准则; (2) 各单元内部为连续速度场; (3) 各单元满足金属塑性变形的体积不变条件; (4) 各单元边界法向速度分量连续, 而切向速度可以间断; (5) 各单元垂直边界的速度分量均匀分布。进而建立规范单元的

运动许可速度场通解。以此为基础,在求得单元上限功率后求出整个变形体的上限总功率,即得到

$$W_e \leq W_e^* = \sum W_i^* + \sum W_s^* + \sum W_f^*$$

式中 W_e ——真实塑性变形总功率;

W_e^* ——虚拟的总上限变形功率;

$\sum W_i^*$ ——所有单元的上限塑性变形功率之和;

$\sum W_f^*$ ——所有单元与工具接触面上消耗的上限摩擦功率之和;

$\sum W_s^*$ ——所有单元之间边界上相对剪切消耗的上限功率之和。

上式中各项功率可由下列公式求得

$$W_i^* = \int_V \sigma_{ij}'^* \varepsilon_{ij}'^* dV = 2K \times \int_V \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{ij}'^* \times \varepsilon_{ij}'^* \right)^{\frac{1}{2}} dV \quad (1-5)$$

$$W_s^* = \int_{S_D} K |\Delta u_t| dS_D \quad (1-6)$$

$$W_f^* = \int_{S_u} mK |\Delta u| dS_u \quad (1-7)$$

式中 $\sigma_{ij}'^*$, $\varepsilon_{ij}'^*$ ——各单元的虚拟偏应力分量和虚拟偏应变速率分量;

Δu_t ——速度间断面上的切向速度间断值;

Δu ——变形体单元与工具接触面上的切向速度差;

m ——变形体与工具接触面的摩擦因子;

K ——变形材料的剪切屈服应力;

S_D ——单元之间的剪切面;

S_u ——单元与工具的接触面。

求出了全部单元的各项功率,即可得到变形体的上限总功率,根据能量守恒,它与虚拟外载荷所做的功应相等

$$P^* v = W_e^* = \sum W_i^* + \sum W_s^* + \sum W_f^* \quad (1-8)$$

式中 P^* ——上限载荷;

v ——工具移动速度。

由上式可得上限载荷。

上限单元技术一般取变形上限总功率为目标函数进行优化,求出了最小上限总功率,也就求出了最接近真实的上限解。变形体的上限总功率主要决定于单元速度场,优化上限总功率就是优化速度场,速度场一旦建立,各单元的应变速率就可得到。根据轴对称变形体的应变速率与速度的关系

$$\begin{aligned} \varepsilon_R^* &= \frac{\partial u^*}{\partial R} & r_{RZ}^* &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial R} + \frac{\partial \omega^*}{\partial R} \right) \\ \varepsilon_\theta^* &= \frac{u^*}{R} & r_{\theta Z}^* &= r_{\theta R}^* = 0 \\ \varepsilon_Z^* &= \frac{\partial \omega^*}{\partial Z} \end{aligned} \quad (1-9)$$

将式(1-9)代入式(1-5)即求出单元的塑性变形功率

$$W_i^* = 2K \int_V \sqrt{\frac{1}{2}(\varepsilon_R^{*2} + \varepsilon_\theta^{*2} + \varepsilon_Z^{*2} + 2\gamma_{RZ}^{*2})} dV$$

公式中的切向速度间断值直接由速度场方程求得。

综上所述,UBET的基本理论首先包括单元的三类基本方程:(1)单元体积不变方程。规定了单元边界法向速度之间的关系。(2)单元内部速度场方程。在单元内部建立一个满足速度边界条件的、连续的、可用解析式表达的近似速度场。(3)单元上限功率分量方程。利用单元边界的几何位置和法向速度分量,求解单元上限功率分量。

1.1.3.3 上限单元法的发展方向预测

(1) 扩大上限单元法的适用范围,使上限单元法除了可以求解轴对称问题外,还可以求解非轴对称问题和三维问题。

(2) 上限单元法与有限元法结合应用于正向模拟和反向模拟技术中,即首先应用上限元法反向模拟出预成型件,然后再用有限元法正向模拟去验证结果的真实性和可靠性,这样可以极大地提高数值模拟的精度。

(3) 目前上限单元技术常用的单元模型是矩形单元和三角形单元。采用这两种单元模型使得上限单元法程序的通用性受到了限制,且对于非轴对称问题来讲,单元的划分过于简化,影响了分析结果的精度。针对这种缺陷,改善上限单元法模型及其程序的通用性将成为研究者的主要目标,山东工业大学提出的复合块思想和浙江大学提出的混合单元模型就是针对这种缺陷进行研究的实例。

(4) 随着计算机软硬件的发展,人工智能技术和专家系统开始广泛地在机械行业中应用。如果能把上限单元法和人工智能技术结合起来,将会使虚拟制造技术变得简单、方便,专家系统的引入也必将提高模拟的准确性。

(5) 随着计算机软件技术的发展,出现了许多可视化的编程语言,人们将主要精力放在了对应用程序本身的研究上,即利用这些可视编程技术,将模拟程序与之相结合,开发出可视化的界面,方便模拟过程的演示和用户的使用。

(6) 将上限单元技术和模具设计软件,如UG、PRO-E等高端设计软件联合起来应用,可提高产品的工艺水平和模具设计水平,促进产品质量的改善,提高生产效率。

1.1.4 流函数法

流函数法解析属能量法范畴,它视变形体是不可压塑的,认为塑性变形问题是一个无源场(或称管形场),变形区的空间相当于流管,则任意曲线坐标的速度场为

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \nabla\psi(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \times \nabla\phi(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \\ &= \frac{1}{g_2 g_3} (\psi_{\beta_2} \phi_{\beta_3} - \psi_{\beta_3} \phi_{\beta_2}) \bar{i} + \frac{1}{g_3 g_1} (\psi_{\beta_3} \phi_{\beta_1} - \psi_{\beta_1} \phi_{\beta_3}) \bar{j} \\ &= \frac{1}{g_1 g_2} (\psi_{\beta_1} \phi_{\beta_2} - \psi_{\beta_2} \phi_{\beta_1}) \bar{k} \\ &= v_{\beta_1} \bar{i} + v_{\beta_2} \bar{j} + v_{\beta_3} \bar{k}\end{aligned}$$