21世纪精品规划教材系列

数值计算方法

SHU ZHI JI SUAN FANG FA

主编◎巩军胜　郭胜红　张来彩

延边大学出版社

21世纪精品规划教材系列

数值计算方法

主　编　巩军胜　郭胜红　张来彩
副主编　韩灵娟

延边大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数值计算方法 / 巩军胜, 郭胜红, 张来彩主编. —
延吉 : 延边大学出版社, 2016.7
ISBN 978-7-5688-0685-5

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①巩… ②郭… ③张… Ⅲ. ①数值计算-计算方法 Ⅳ. ①O241

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 186006 号

数值计算方法

主编:巩军胜　郭胜红　张来彩
责任编辑:刘奕
封面设计:可可工作室
出版发行:延边大学出版社
社址:吉林省延吉市公园路 977 号　　**邮编**:133002
网址:http://www.ydcbs.com
E-mail:ydcbs@ydcbs.com
电话:0433-2732435　　**传真**:0433-2732434
发行部电话:0433-2732442　　**传真**:0433-2733266
印刷:三河市德辉印务有限公司
开本:787×1092 毫米　1/16
印张:13　　**字数**:316 千字
版次:2016 年 7 月第 1 版
印次:2017 年 1 月第 1 次
ISBN ISBN 978-7-5688-0685-5

定价:29.00 元

前言

随着电子计算机的迅速发展，理工科院校开设数值分析课程越来越普遍，正在不断地渗透到各个专业领域，成为人们研究和学习的重要工具。为了适应这种需要，有必要编写一本难易适中、面向本科生或研究人员的教材，根据多年的教学经验，以及目前教材改革的要求，我们编写了《数值计算方法》这本教材。

学习本书必需的数学基础是微积分、线性代数和常微分方程，这是一般理工科大学生都具备的.全书设计讲授时数为70学时左右。如学时少于70学时，可根据自己学校的实际情况对教材内容酌情增减。本书编写时已注意到各章节的独立性，各章后均附有习题，教师可配合布置习题，安排上机实习的教学环节。

本书共分九章：第一章绪论，第二章插值法，第三章函数逼近，第四章数值积分和数值微分，第五章线性方程组的直接方法，第六章线性代数方程组的迭代法，第七章非线性方程求根，第八章矩阵特征值问题计算，第九章常微分方程数值解法。其中第一章至第三章由（甘肃建筑职业技术学院）巩军胜同志编写；第四章由（甘肃建筑职业技术学院）白莉红同志编写；第五章和复习试题由（甘肃建筑职业技术学院）韩灵娟同志编写；第六章、第七章由（甘肃建筑职业技术学院）张来彩同志编写；第八章、第九章由（甘肃建筑职业技术学院）郭胜红同志编写，全书由巩军胜同志统稿。本书的编写工作得到了本人所在单位教务处和院长的大力支持，他们对本书提供了许多宝贵的建议和意见，这里一并表示感谢。

由于计算数学发展迅速，以及作者水平有限，本书的编写又比较仓促，缺点和错误在所难免，恳请读者提出意见和建议，以期修订时改进完善。

编者

2016年6月

目 录

第 1 章　绪论

内容提要：

§1.1　数值分析研究对象与特点

§1.2　数值计算的误差

§1.3　误差定性分析与避免误差危害

§1.1　数值分析研究对象与特点

一、数值分析研究对象

计算机解决科学计算问题时经历的过程：

实际问题

⇩

模型设计

⇩

算法设计

⇩

程序设计

⇩

上机计算

⇩

问题的解

实例：

求$\sqrt{2}$⇨ 方程求根 ⇨ 牛顿法 $x_{k+1}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{2}{x_k})$⇨ 程序设计上机计算 ⇨ 解 $x_0=1$，$x_1=1.5$，$x_3=1.417$，….

数值分析的内容包括函数的数值逼近、数值微分与数值积分、非线性方程数值解、数值线性代数、常微和偏微数值解等. 数值分析研究对象以及解决问题方法的广泛适用性，著名流行软件如 Maple、Matlab、Mathematica 等已将其绝大多数内容设计成函数，简单调用之后便可以得到运行结果.

但由于实际问题的具体特征、复杂性，以及算法自身的适用范围决定了应用中必须选择、设计适合于自己特定问题的算法，因而掌握数值方法的思想和内容是至关重要的.

本课程内容包括了微积分、代数、常微分方程的数值方法，必须掌握这几门课程的基础内容才能学好这门课程.

二、数值分析的特点

1. 面向计算机，要根据计算机的特点提供切实可行的有效算法.

2. 有可靠的理论分析，能任意逼近并达到精度要求，对近似算法要保证收敛性和数值稳定性，还要对误差进行分析. 这些都是建立在数学理论的基础上，因此不应片面的将数值分析理解为各种数值方法的简单罗列和堆积.

3. 要有好的计算复杂性，时间复杂性好是指节省时间，空间复杂性好是指节省存储量，这也是建立算法要研究的问题，它关系到算法能否在计算机上实现.

4. 要有数值实验，即任何一个算法除了从理论上要满足上述三点外，还要通过数值实验证明是行之有效的.

三、数值分析的学习方法

初学可能仍会觉得公式多，理论分析复杂. 给出如下的几点学习方法.

1. 认识建立算法和对每个算法进行理论分析是基本任务，主动适应公式多和讲究理论分析的特点.

2. 注重各章节所研究算法的提出，掌握方法的基本原理和思想，要注意方法处理的技巧及其与计算机的结合.

3. 理解每个算法建立的数学背景、数学原理和基本线索，而且对一些最基本的算法要非常熟悉.

4. 要通过例子，学习使用各种数值方法解决实际计算问题.

5. 为掌握本课的内容，还应做一些理论分析和计算练习.

§1.2 数值计算的误差

一、误差的来源

在运用数学方法解决实际问题的过程中，每一步都可能带来误差.

1. **模型误差** 在建立数学模型时，往往要忽视很多次要因素，把模型“简单化”，“理想化”，这时模型就与真实背景有了差距，即带入了误差.

2. **测量误差** 数学模型中的已知参数，多数是通过测量得到. 而测量过程受工具、方法、观察者的主观因素、不可预料的随机干扰等影响必然带入误差.

3. **截断误差** 数学模型常难于直接求解，往往要近似替代，简化为易于求解的问题，这种简化带入误差称为方法误差或截断误差.

例如：函数 $f(x)$ 用泰勒(Taylor) 多项式

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

近似代替，则数值方法的截断误差是泰勒余项.

4. **舍入误差** 计算机只能处理有限数位的小数运算，初始参数或中间结果都必须进行四舍五入运算，这必然产生舍入误差.

例如：用 3.14159 近似代替 π，产生的误差 $R = \pi - 3.14159 = 0.0000026$.

误差分析是一门比较艰深的专门学科. 在数值分析中主要讨论截断误差及舍入误差. 但一个训练有素的计算工作者，当发现计算结果与实际不符时，应当能诊断出误差的来源，并采取相应的措施加以改进，直至建议对模型进行修改.

二、绝对误差、相对误差与有效数字

1. 绝对误差与绝对误差限

定义 1 设 x 为准确值，x^* 为 x 的一个近似值，称 $e^* = x^* - x$ 为近似值 x^* 的

绝对误差,记为 e^*.

误差是有量纲的量,量纲同 x,它可正可负. 误差一般无法准确计算,只能根据测量或计算情况估计出它的绝对值的一个上界,这个上界称为近似值 x^* 的误差限,记为 ε^*.

对于一般情形 $|x^*-x|\leqslant\varepsilon^*$,即

$$x^*-\varepsilon^*\leqslant x\leqslant x^*+\varepsilon^*.$$

在工程中常表示为

$$x=x^*\pm\varepsilon^*.$$

例如:有两个量 $x=10\pm1, y=1000\pm1$, 则

$$x^*=10,\varepsilon_x^*=1,y^*=1000,\varepsilon_y^*=1.$$

2. 相对误差与相对误差限

定义 2 近似值的误差 e^* 与准确值 x 的比值

$$\frac{e^*}{x}=\frac{x^*-x}{x}$$

称为近似值 x^* 的相对误差,记作 e_r^*.

在计算中,由于真值 x 总是不知道的,通常取 $e_r^*=\dfrac{e^*}{x^*}=\dfrac{x^*-x}{x^*}$.

相对误差限 相对误差绝对值的上界,记作 ε_r^*,即

$$\varepsilon_r^*=\frac{\varepsilon^*}{|x^*|}\geqslant\frac{|x^*-x|}{|x^*|}=|e_r^*|.$$

上例中 $\dfrac{\varepsilon_x^*}{|x^*|}=10\%$ 与 $\dfrac{\varepsilon_y^*}{|y^*|}=0.1\%$ 分别为 x 与 y 的相对误差限,可见 y^* 近似 y 的程度比 x^* 的程度好.

3. 有效数字

定义 3 如果近似值 x^* 的误差限是它某一数位的半个单位,我们就说 x^* 准确到该位,从这一位起直到前面第一个非零数字为止的所有数字称 x 的有效数字.

例如:下列数按四舍五入原则得到的 5 位有效数字的近似数分别是?

	187.9325	0.03785551	8.0000033	2.7182818
解	187.93	0.037856	8.0000	2.7183

下列各数都是经过四舍五入原则得到的近似数,指出他们有几个有效数字?

$$x_1^*=1.1021,x_2^*=56.430,\quad x_3^*=0.031.$$

解 x_1^* 五位， x_2^* 五位， x_3^* 两位.

4.绝对误差

相对误差与有效数字的关系

绝对误差与相对误差：由两者定义可知.

$$e_r^* = \frac{e^*}{x^*}, \varepsilon_r^* = \frac{\varepsilon^*}{|x^*|}.$$

绝对误差不超过末位有效数字的半个单位.

近似数 x^* 表示为 $x^* = \pm 10^m \times (a_1 + a_2 \times 10^{-1} + \cdots + a_n \times 10^{-(n-1)})$，具有 n 位有效数字，则 $|x - x^*| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{m-n+1}$.

定理 1 设近似数 x^* 表示为

$$x^* = \pm 10^m \times (a_1 + a_2 \times 10^{-1} + \cdots + a_l \times 10^{-(n-1)}),$$

其中 $a_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 是 0 到 9 中的一个数字，$a_1 \neq 0$，m 为整数. 若 x^* 具有 n 位有效数字，则其相对误差限为

$$\varepsilon_r^* \leqslant \frac{1}{2a_1} \times 10^{-(n-1)}.$$

反之，若 x^* 的相对误差限 $\varepsilon_r^* \leqslant \frac{1}{2(a_1+1)} \times 10^{-(n-1)}$，则 x^* 至少具有 n 位有效数字.

定理说明有效数位越多，相对误差限越小. 定理也给出了相对误差限的求法.

注 近似数 x^* 表示为 $x^* = \pm 10^m \times (a_1 + a_2 \times 10^{-1} + \cdots + a_l \times 10^{-(n-1)})$.

证明 由(1)可得

$$a_1 \times 10^m \leqslant |x^*| < (a_1 + 1) \times 10^m.$$

当 x^* 有 n 位有效数字时

$$\varepsilon_r^* = \frac{|x - x^*|}{x^*} \leqslant \frac{0.5 \times 10^{m-n+1}}{a_1 \times 10^m} = \frac{1}{2a_1} \times 10^{-n+1}.$$

反之，由

$$|x - x^*| = |x^*| \varepsilon_r^* < (a_1 + 1) \times 10^m \times \frac{1}{2(a_1+1)} \times 10^{-n+1}$$

$$= \frac{1}{2} \times 10^{m-n+1}.$$

故 x^* 至少具有 n 位有效数字.

例 1 要使 $\sqrt{20}$ 的近似值的相对误差限小于 0.1%，至少要取几位有效数字？

解　设取 n 位有效数字，由定理 1，$\varepsilon_r^* \leqslant \frac{1}{2a_1} \times 10^{-n+1}$.

由于 $\sqrt{20} = 4.4\cdots$，知 $a_1 = 4$，故只要取 $n = 4$，就有

$$\varepsilon_r^* \leqslant 0.125 \times 10^{-3} < 10^{-3} = 0.1\%.$$

即只要对 $\sqrt{20}$ 的近似值取 4 位有效数字，其相对误差限就小于 0.1%.

三、数值运算的误差估计

1. 四则运算

两个近似数 x_1^* 与 x_2^*，其误差限分别为 $\varepsilon^*(x_1^*)$ 及 $\varepsilon^*(x_2^*)$，它们进行加、减、乘、除运算得到的误差分别为

$$\varepsilon^*(x_1^* \pm x_2^*) = \varepsilon^*(x_1^*) + \varepsilon^*(x_2^*);$$

$$\varepsilon^*(x_1^* x_2^*) \approx |x_1^*| \varepsilon^*(x_2^*) + |x_2^*| \varepsilon^*(x_1^*);$$

$$\varepsilon^*\left(\frac{x_1^*}{x_2^*}\right) \approx \frac{|x_1^*| \varepsilon^*(x_2^*) + |x_2^*| \varepsilon^*(x_1^*)}{|x_2^*|^2}.$$

例 2　若电压 $V = 220 \pm 5V$，电阻 $R = 300 \pm 10\Omega$，求电流 I 并计算其误差限及相对误差限.

解　$I^* = \frac{V^*}{R^*} = \frac{220}{300} = 0.7333(A)$，

$$\varepsilon^*(I^*) \approx \frac{|V^*| \varepsilon^*(R^*) + |R^*| \varepsilon^*(V^*)}{R^{*2}}$$

$$= \frac{220 \times 10 + 300 \times 5}{90000} = 0.0411(A),$$

所以

$$I = 0.7333 \pm 0.0411(A),$$

$$\varepsilon_r^*(I^*) = \frac{0.0411}{0.7333} = 6\%.$$

例 3　已测得某场地长 l 的值为 $l^* = 110\ \text{m}$，宽 $d^* = 80\text{m}$，已知 $|l - l^*| \leqslant 0.2\ \text{m}$，$|d - d^*| \leqslant 0.1\ \text{m}$. 试求面积 $s = ld$ 的绝对误差限与相对误差限.

解　由误差限乘法公式

$$\varepsilon^*(s^*) \approx |l^*| \varepsilon^*(d^*) + |d^*| \varepsilon^*(l^*)$$

$$= 110 \times 0.1 + 80 \times 0.2 = 27(m^2),$$

故

$$\varepsilon_r^*(s^*) = \frac{\varepsilon^*(s^*)}{|s^*|} = \frac{\varepsilon^*(s^*)}{|l^* d^*|} \approx \frac{27}{8800} = 0.31\%.$$

2. 函数误差

当自变量有误差时计算函数值也产生误差，可以利用函数的泰勒展开式进行估计.

设 $f(x)$ 是一元函数，x 的近似值为 x^*，以 $f(x^*)$ 来近似 $f(x)$，其误差界记作 $\varepsilon(f(x^*))$，可用泰勒展开并取绝对值得

$$|f(x)-f(x^*)|\leqslant|f'(x^*)|\varepsilon(x^*)+\frac{|f''(\xi)|}{2}\varepsilon^2(x^*).$$

假定 $f'(x^*)$ 与 $f''(x^*)$ 的比值不太大，可忽略 $\varepsilon(x^*)$ 的高阶项，于是可得计算函数的误差限

$$\varepsilon(f(x^*))\approx|f'(x^*)|\varepsilon(x^*).$$

例 4 设 $x>0$，x 的相对误差限为 δ，求 $\ln x$ 的误差限.

解 因为 $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$，即

$$\varepsilon(\ln(x^*))\approx\left|\frac{1}{x^*}\right|\varepsilon(x^*)=\varepsilon_r(x^*)=\delta.$$

当 $f(x_1x_2,\cdots,x_n)$ 是多元函数，$x_1x_2,\cdots,x_n$ 的近似值为 $x_1^*x_2^*,\cdots,x_n^*$，则误差限为

$$\varepsilon(f(x_1^*x_2^*,\cdots,x_n^*))\approx\sum_{k=1}^{n}\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^*\right|\varepsilon(x_k^*).$$

相对误差限

$$\varepsilon_r^*=\varepsilon_r(f(x_1^*x_2^*,\cdots,x_n^*))=\frac{\varepsilon(f(x_1^*x_2^*,\cdots,x_n^*))}{|f(x_1^*x_2^*,\cdots,x_n^*)|}$$

$$\approx\sum_{k=1}^{n}\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^*\right|\frac{\varepsilon(x_k^*)}{|f(x_1^*x_2^*,\cdots,x_n^*)|}.$$

例 5 已测得某场地长 l 的值为 $l^*=110$ m，宽 $d^*=80$ m，已知 $|l-l^*|\leqslant 0.2$m，$|d-d^*|\leqslant 0.1$m. 试求面积 $s=ld$ 的绝对误差限与相对误差限.

解 因为 $s=ld$，$\dfrac{\partial s}{\partial l}=d$，$\dfrac{\partial s}{\partial d}=l$，由误差限函数公式

$$\begin{aligned}\varepsilon^*(s^*)&\approx|l^*|\varepsilon^*(d^*)+|d^*|\varepsilon^*(l^*)\\&=110\times0.1+80\times0.2=27(m^2),\end{aligned}$$

故 $\varepsilon_r(s^*)=\dfrac{\varepsilon(s^*)}{|s^*|}=\dfrac{\varepsilon(s^*)}{l^*d^*}\approx\dfrac{27}{8800}=0.31\%$.

例 6 设 $s=\frac{1}{2}gt^2$，假定 g 是准确的，而对 t 的测量有 $\pm 0.1s$ 的误差，证明当 t 增加时，s 的绝对误差增加，而相对误差却减少.

解 由题意可知 $\varepsilon(t^*)=0.1, s^*=\frac{1}{2}g(t^*)^2$，

绝对误差限

$$\varepsilon(s^*)\approx|gt^*|\varepsilon(t^*)=0.1gt^*,$$

相对误差限

$$\varepsilon_r(s^*)=\frac{\varepsilon(s^*)}{s^*}\approx\frac{0.1gt^*}{\frac{1}{2}g(t^*)^2}=\frac{0.2}{t^*}.$$

由于 t 增加时，其近似值 t^* 也增加，因此 s 的绝对误差增加，而相对误差却减少.

§1.3 误差定性分析与避免误差危害

一、病态问题与条件数

1. 病态问题：对一个数值问题本身如果输入数据有微小扰动(即误差)，引起输出数据(即问题解)相对误差很大，就是病态问题.

2. 条件数：计算函数值 $f(x)$ 时，若 x 有扰动 $\Delta x=x-x^*$ 其相对误差为 $\frac{\Delta x}{x}$，函数值 $f(x^*)$ 的相对误差为 $\frac{f(x)-f(x^*)}{f(x)}$，相对误差比值

$$\left|\frac{f(x)-f(x^*)}{f(x)}\right|/\left|\frac{\Delta x}{x}\right|\approx\left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right|=C_p,$$

C_p 称为计算函数值问题的条件数.

条件数很大情况的问题就是病态问题.

例如：若 $f(x)=x^n$，则有 $C_p=\left|\frac{x\cdot nx^{n-1}}{x^n}\right|=n$. 它表示相对误差可能放大 n 倍. 如 $n=10$，有 $f(1)=1, f(1.02)\approx 1.24$，若取 $x=1, x^*=1.02$ 自变量相对误差为 2%，函数相对误差为 24%，这时问题可以认为是病态的.

一般情况条件数 $C_p\geq 10$ 就认为是病态，C_p 越大病态越严重.

二、算法的稳定性

用一个算法进行计算，由于初始数据误差在计算中传播使计算结果误差增长很快就是数值不稳定的，先看下例.

例 7 计算 $I=e^{-1}\int_0^1 x^n e^x dx$，$(n=0,1,\cdots)$ 并估计误差.

解 由分部积分公式

$$I_n=1-nI_{n-1}\qquad (n=1,2,\cdots)$$

$$I_0=e^{-1}\int_0^1 e^x dx=1-e^{-1}.$$

当初值取为 $I_0\approx 0.6321=\overline{I}_0$ 时

方法一：$\begin{cases}\overline{I}_0=0.6321,\\ \overline{I}_n=1-n\overline{I}_{n-1}\quad (n=1,2,).\end{cases}$

分析：计算结果表明，各步计算的误差 $E_n=I_n-\overline{I}_n$ 满足关系

$$E_n=-nE_{n-1}\qquad (n=1,2,\cdots),$$

易得

$$E_n=(-1)^n n!E_0.$$

这说明$\overline{I}_0$ 有误差 E_0，$\overline{I}_n$ 就是 E_0 的 $n!$倍. 它表明计算公式 A 是数值不稳定的.

当初值取为 $I_9\approx\frac{1}{2}(\frac{1}{10}+\frac{e^{-1}}{10})=0.0684=\overline{I}_9$ 时.

方法二：$\begin{cases}I_9^*=0.0684\\ I_{n-1}^*=\frac{1}{n}(1-I_n^*)\end{cases}\qquad (n=9,8,\cdots 1)$

分析：计算结果表明，各步计算的误差 $E_n^*=I_n-I_n^*$ 满足关系.

易得

$$|E_0^*|=\frac{1}{n!}|E_n^*|,$$

这说明 E_0^* 比 E_n^* 缩小了 $n!$倍.

计算结果：

n	法一	法二
0	0.6321	0.6321
1	0.3679	0.3679
2	0.2642	0.2643
3	0.2074	0.2073
4	0.1704	0.1708
5	0.1480	0.1455
6	0.1120	0.1268
7	0.2160	0.1121
8	−0.7280	0.1035
9	7.552	0.0684

三、避免误差危害的若干原则

1. 要避免除数绝对值远远小于被除数绝对值的除法.

用绝对值小的数作除数舍入误差会增大，如计算 $\frac{x}{y}$，若 $0<|y|\ll|x|$，则可能对计算结果带来严重影响，应尽量避免.

2. 要避免两相近数相减

在数值中两相近数相减有效数字会严重损失. 例如，$x=532.65$，$y=532.52$ 都具有五位有效数字，但 $x-y=0.13$ 只有两位有效数字. 通过改变算法可以避免两相近数相减.

例如：$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\,(x\gg 1)$ 可改为 $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$，

$1-\cos x\,(|x|\ll 1)$ 可改为 $2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

例 8 将下列函数改写

(1) $\ln(x-\sqrt{x^2-1})$ （x 很大）　　(2) $\dfrac{\sin x}{x-\sqrt{x^2-1}}$（$x$ 很大）

(3) $\lg x_1-\lg x_2$ （x_1 与 x_2 接近）　　(4) $\arctan(x+1)-\arctan x$（x 很大）

等等，都可以得到比直接计算好的结果.

解 (1) $\ln\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$；　　(2) $(x+\sqrt{x^2-1})\sin x$；

(3) $\lg \frac{x_1}{x_2}$;　　　　(4) $\arctan\left(\frac{1}{1+(x+1)x}\right)$.

3. 要防止"大数"吃掉小数

数值运算中参加运算的数有时数量级相差很大,而计算机位数有限,如不注意运算次序就可能出现大数"吃掉"小数的现象,影响计算结果的可靠性.

如用六位浮点数计算某市的工业总产值,原始数据是各企业的工业产值,当加法进行到一定程度,部分和超过100亿元(0.1×1011),再加产值不足10万元的小企业产值,将再也加不进去. 而这部分企业可能为数不少,合计产值相当大. 这种情况应将小数先分别加成大数,然后相加,结果才比较正确. 这个例子告诉我们,在计算机数系中,加法的交换律和结合律可能不成立,这是在大规模数据处理时应注意的问题.

4. 注意简化计算步骤,减少运算次数

减少算术运算的次数不但可减少计算机的计算时间,还能减少误差的积累效应. 使参加运算的数字精度应尽量保持一致,否则那些较高精度的量的精度没有太大意义.

例如:计算多项式值

$$P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots a_1x+a_0.$$

解　方法一:直接计算 a_kx^k 再逐项相加,一共需要做 $n+(n-1)+\cdots+2+1=\frac{n(n+1)}{2}$ 次乘法和 n 次加法.

方法二:采用秦九韶算法

$$\begin{cases}S_n=a_n\\S_k=xS_{k+1}+a_k(k=n-1,\cdots,2,1,0)\\P_n(x)=S_0\end{cases}$$

即 $$P_n(x)=((a_nx+a_{n-1})x+a_{n-2})x\cdots+a_1)x+a_0.$$

只要计算 n 次乘法和 n 次加法就可以算出 $P_n(x)$ 的值.

习　题

1. 设 $x>0$,x 的相对误差为 δ,求 $\ln x$ 的误差.

2. 设 x 的相对误差为 2%,求 x^n 的相对误差.

3. 下列各数都是经过四舍五入得到的近似数,即误差限不超过最后一位的半个