必刷题

高远 / 主编

考研数学真题录

（数学一、数学二）

■ 在这里读懂真题 ■ 刷题就得刷真题

⊙ 从不变中总结规律

⊙ 在变化中把握趋势

⊙ 从真题中梳理重点

⊙ 在精练中突破难点

清华大学出版社

高　远／主编
金今姬　宋东哲　毛书欣／　编

考研数学真题录

（数学一、数学二）

清华大学出版社
北　京

内容简介

《考研数学真题录(数学一、数学二)》由深谙命题原则和规律,每年参加阅卷的教师编写,全书内容分为两部分,第一部分对历年真题按章分类进行归纳总结;第二部分是对真题的详细解答,客观题解答主要采用简单易行的方法,解答题主要采用的是阅卷评分时的评分标准答案.

本书题量恰当,解答简洁规范,能够帮助考生复习数学大纲所要求的所有考点,并能够明确重点,突破难点,掌握解题的主要方法,提高解题能力.

本书是在编者原有资料基础上修订而成,在辅导实践中连续使用多年,曾帮助很多考生获得了较好的成绩,考生复习基础知识点后即可使用.

图书在版编目(CIP)数据

考研数学真题录.数学一、数学二/高远主编.—北京:清华大学出版社,2017(2017.11 重印)
ISBN 978-7-302-47348-0

Ⅰ.①考… Ⅱ.①高… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—习题集 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 101919 号

责任编辑:佟丽霞
封面设计:傅瑞学
责任校对:刘玉霞
责任印制:宋　林

出版发行:清华大学出版社
网　　址:http://www.tup.com.cn, http://www.wqbook.com
地　　址:北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**:100084
社 总 机:010-62770175　　**邮　　购**:010-62786544
投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者:清华大学印刷厂
经　　销:全国新华书店
开　　本:185mm×260mm　　**印　　张**:28.5　　**字　　数**:692 千字
版　　次:2017 年 6 月第 1 版　　**印　　次**:2017 年 11 月第 2 次印刷
印　　数:2001～2800
定　　价:72.00 元

产品编号:072209-01

前　言

《考研数学真题录(数学一、数学二)》是为准备参加全国硕士研究生招生考试的同学量身定做的学习资料,与《全国硕士研究生招生考试辅导教材——数学》(清华大学出版社)《考研数学基础解析 120 讲》《考研数学考试大纲解析》《考研数学考试大纲配套 600 题》构成了完整的教材辅导体系. 为什么真题是必刷题,就是因为它能覆盖全部考点,又最能体现命题的角度,所以将 1987 年至今的考题按照大纲分章进行归类解析. 有两本书,分别供理工类和经济管理类同学使用.

这本真题录与众不同,主要体现在以下几个方面:

1. 内容规范,形式统一

由于多方面的原因,不同年份的真题在叙述上、数学符号和字母的使用上存在差别,所以本书除了将历年真题分章归类外,按照目前命题的特点和习惯对数学符号和字母进行了统一,方便读者使用.

2. 考点覆盖全面,题量适中

在复习的过程中,要想掌握数学方法,就需要演练一定量的习题,刷什么题合适? 刷多少题合适? 三十多年的真题完整地体现了考试大纲所规定的考试内容,诠释了考试的基本要求,所以能覆盖所有的考点并能够体现考试要求的必备资料,非真题莫属. 与此同时,删减了反复考查的过多雷同的题型,尽量减少考生的负担.

3. 命题特点突出

模拟题是对真题的模仿,无法做到在难度、命题特点上与真题最贴切,所以练习真题会具有绝对的优势.

4. 解答简洁明晰,实践检验效果好

书中真题多数解答过程采用的是阅卷评分时的标准解答过程,从而使读者在练习过程中养成规范解答的习惯,善于抓住采分点. 同时通过对近几年经我们辅导的考生的情况来看,完成这本习题的同学多数都取得了较好的成绩.

编写本书的几位老师均具有多年的阅卷经验,熟悉采分点和考生易犯的错误,在成书过程中交叉互审稿件,反复讨论,方成此书,全书最后由高远教授审阅定稿. 需要特别指出,在本书的成书过程中参考和引用了很多同类资料,向作者们借鉴成熟的经验,向专家们汲取宝贵的智慧,在此不一一列出,谨向他们表示诚挚的谢意.

感谢清华大学出版社的大力支持,感谢读者朋友的信任,选择了我们编写的这套资料,希望读者尽快进入书中真题的演练过程.

限于水平,书中的疏漏和不妥,恳请读者不吝赐教.

编　者

目　录

科目一　高等数学

科目二　线性代数

科目三　概率论与数理统计

参考答案

科目一　高等数学

第一章　函数、极限与连续

一、选择题

1.（1987 年）　$f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}(-\infty<x<+\infty)$是（　　）.

（A）有界函数　（B）单调函数　（C）周期函数　（D）偶函数

2.（1987 年）　函数 $f(x)=x\sin x$（　　）.

（A）当 $x\to\infty$ 时为无穷大　（B）在$(-\infty,+\infty)$内有界

（C）在$(-\infty,+\infty)$内无界　（D）当 $x\to\infty$ 时有有限极限

3.（1990 年）　设 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0,\\ f(0), & x=0,\end{cases}$其中 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$f'(0)\neq 0$，$f(0)=0$，则 $x=0$ 是 $F(x)$的（　　）.

（A）连续点　（B）第一类间断点

（C）第二类间断点　（D）连续点或间断点不能由此确定

4.（1990 年）　已知$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$，其中 a,b 是常数，则（　　）.

（A）$a=1,b=1$　（B）$a=-1,b=1$　（C）$a=1,b=-1$　（D）$a=-1,b=-1$

5.（1990 年）　设 $x\to 0$ 时，$e^{\tan x}-e^{x}$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 n 为（　　）.

（A）1　（B）2　（C）3　（D）4

6.（1992 年）　当 $x\to 1$ 时，函数$\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$的极限（　　）.

（A）等于 2　（B）等于 0　（C）为∞　（D）不存在，但不为∞

7.（1992 年）　设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2+x, & x>0,\end{cases}$则（　　）.

（A）$f(-x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0,\\ -(x^2+x), & x>0\end{cases}$　（B）$f(-x)=\begin{cases}-(x^2+x), & x<0,\\ -x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

（C）$f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2-x, & x>0\end{cases}$　（D）$f(-x)=\begin{cases}x^2-x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

8.（1993 年）　当 $x\to 0$ 时，变量$\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$是（　　）.

（A）无穷小　（B）无穷大

（C）有界的，但不是无穷小量　（D）无界的，但不是无穷大

9.（1994 年）　设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=2$，其中 $a^2+c^2\neq 0$，则必有（　　）.

(A) $b=4d$ (B) $b=-4d$

(C) $a=4c$ (D) $a=-4c$

10. (1994 年) 设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$,则(　　).

(A) $a=1,b=-\dfrac{5}{2}$ (B) $a=0,b=-2$

(C) $a=0,b=-\dfrac{5}{2}$ (D) $a=1,b=-2$

11. (1995 年) 设 $f(x)$和 $\varphi(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义,$f(x)$为连续函数,且 $f(x)\neq 0$,$\varphi(x)$有间断点,则(　　).

(A) $\varphi[f(x)]$必有间断点 (B) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点

(C) $f[\varphi(x)]$必有间断点 (D) $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$必有间断点

12. (1996 年) 设当 $x\to 0$ 时,$e^x-(ax^2+bx+1)$是比 x^2 高阶的无穷小,则(　　).

(A) $a=\dfrac{1}{2},b=1$ (B) $a=1,b=1$

(C) $a=-\dfrac{1}{2},b=1$ (D) $a=-1,b=1$

13. (1997 年) 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $g[f(x)]=$(　　).

(A) $\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$ (B) $\begin{cases}2-x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$

(C) $\begin{cases}2-x^2, & x<0,\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$ (D) $\begin{cases}2+x^2, & x<0,\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$

14. (1998 年) 设数列 x_n 与 y_n 满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,则下列断言正确的是(　　).

(A) 若 x_n 发散,则 y_n 必发散 (B) 若 x_n 无界,则 y_n 必有界

(C) 若 x_n 有界,则 y_n 必为无穷小 (D) 若$\dfrac{1}{x_n}$为无穷小,则 y_n 必为无穷小

15. (1999 年) “对任意给定的 $\varepsilon\in(0,1)$,总存在正整数 N,当 $n\geqslant N$ 时,恒有$|x_n-a|\leqslant 2\varepsilon$”是数列$\{x_n\}$收敛于 a 的(　　).

(A) 充分条件但非必要条件 (B) 必要条件但非充分条件

(C) 充分必要条件 (D) 既非充分条件又非必要条件

16. (2000 年) 若$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}\right)=0$,则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$为(　　).

(A) 0 (B) 6 (C) 36 (D) ∞

17. (2000 年) 设函数 $f(x)=\dfrac{x}{a+e^{bx}}$在$(-\infty,+\infty)$内连续,且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$,则常数 a,b 满足(　　).

(A) $a<0,b<0$ (B) $a>0,b>0$ (C) $a\leqslant 0,b>0$ (D) $a\geqslant 0,b<0$

18. (2001 年) 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f\{f[f(x)]\}$等于(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) $\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1\end{cases}$　　(D) $\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1,\\ 1, & |x|>1\end{cases}$

19. (2001 年)　设当 $x\to 0$ 时,$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小,而 $x\sin x^n$ 是比$(e^{x^2}-1)$高阶的无穷小,则正整数 n 等于(　　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

20. (2003 年)　设$\{a_n\}$,$\{b_n\}$,$\{c_n\}$均为非负数列,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$,$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有(　　).

(A) $a_n<b_n$ 对任意 n 成立　　(B) $b_n<c_n$ 对任意 n 成立

(C) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在　　(D) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在

21. (2005 年)　设函数 $f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$,则(　　).

(A) $x=0$,$x=1$ 都是 $f(x)$的第一类间断点

(B) $x=0$,$x=1$ 都是 $f(x)$的第二类间断点

(C) $x=0$ 是 $f(x)$的第一类间断点;$x=1$ 是 $f(x)$的第二类间断点

(D) $x=0$ 是 $f(x)$的第二类间断点;$x=1$ 是 $f(x)$的第一类间断点

22. (2007 年)　当 $x\to 0^+$ 时,与$\sqrt{x}$等价的无穷小量是(　　).

(A) $1-e^{\sqrt{x}}$　　(B) $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$　　(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　(D) $1-\cos\sqrt{x}$

23. (2007 年)　函数 $f(x)=\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}$在$[-\pi,\pi]$上的第一类间断点是 $x=$(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) $-\dfrac{\pi}{2}$　　(D) $\dfrac{\pi}{2}$

24. (2008 年)　设函数 $f(x)=\dfrac{\ln|x|}{|x-1|}\sin x$,则 $f(x)$有(　　).

(A) 1 个可去间断点,1 个跳跃间断点　　(B) 1 个可去间断点,1 个无穷间断点

(C) 2 个跳跃间断点　　(D) 2 个无穷间断点

25. (2008 年)　设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调有界,$\{x_n\}$为数列,下列命题正确的是(　　).

(A) 若$\{x_n\}$收敛,则$\{f(x_n)\}$收敛　　(B) 若$\{x_n\}$单调,则$\{f(x_n)\}$收敛

(C) 若$\{f(x_n)\}$收敛,则$\{x_n\}$收敛　　(D) 若$\{f(x_n)\}$单调,则$\{x_n\}$收敛

26. (2009 年)　当 $x\to 0$ 时,$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$是等价无穷小,则(　　).

(A) $a=1,b=-\dfrac{1}{6}$　　(B) $a=1,b=\dfrac{1}{6}$

(C) $a=-1,b=-\dfrac{1}{6}$　　(D) $a=-1,b=\dfrac{1}{6}$

27. (2009 年)　函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin\pi x}$的可去间断点的个数为(　　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 无穷多个

28. （2010 年）　极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=$(　　).

(A) 1　　(B) e　　(C) e^{a-b}　　(C) e^{b-a}

29. （2010 年）　函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-1}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}$的无穷间断点的个数为(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

30. （2011 年）　已知当 $x\to 0$ 时，$f(x)=3\sin x-\sin 3x$ 与 cx^k 是等价无穷小，则(　　).

(A) $k=1,c=4$　　(B) $k=1,c=-4$

(C) $k=3,c=4$　　(D) $k=3,c=-4$

31. （2012 年）　曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$渐近线的条数为(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

32. （2013 年）　已知极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$，其中 c,k 为常数，则(　　).

(A) $k=2,c=-\dfrac{1}{2}$　　(B) $k=2,c=\dfrac{1}{2}$　　(C) $k=3,c=-\dfrac{1}{3}$　　(D) $k=3,c=\dfrac{1}{3}$

33. （2013 年）　设 $\cos x-1=x\sin\alpha(x)$，其中$|\alpha(x)|<\dfrac{\pi}{2}$，则当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$是(　　).

(A) 比 x 高阶的无穷小　　(B) 比 x 低阶的无穷小

(C) 与 x 同阶但不等价的无穷小　　(D) 与 x 等价的无穷小

34. （2014 年）　当 $x\to 0^+$ 时，若 $\ln^\alpha(1+2x)$，$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小，则 α 的取值范围(　　).

(A) $(2,+\infty)$　　(B) $(1,2)$　　(C) $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$　　(D) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$

35. （2015 年）　函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}\left(1+\dfrac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}$在$(-\infty,+\infty)$内(　　).

(A) 连续　　(B) 有可去间断点

(C) 有跳跃间断点　　(D) 有无穷间断点

36. （2016 年）　设 $\alpha_1=x(\cos\sqrt{x}-1)$，$\alpha_2=\sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x})$，$\alpha_3=\sqrt[3]{x+1}-1$. 当 $x\to 0^+$ 时，以上 3 个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是(　　).

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　(B) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1$　　(C) $\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3$　　(D) $\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1$

37. （2017 年）　若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0,\\ b, & x\leqslant 0\end{cases}$在 $x=0$ 处连续，则(　　).

(A) $ab=\dfrac{1}{2}$　　(B) $ab=-\dfrac{1}{2}$　　(C) $ab=0$　　(D) $ab=2$

38. （2017 年）　设数列$\{x_n\}$收敛，则(　　).

(A) 当$\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$　　(B) 当$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sqrt{|x_n|})=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

(C) 当$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+x_n^2)=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$　　(D) 当$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sin x_n)=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

二、填空题

39. (1987 年) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{n+1}\right)^n=$________.

40. (1988 年) $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}=$________.

41. (1989 年) 设 $f(x)=\begin{cases}a+bx^2, & x\leqslant0,\\ \dfrac{\sin bx}{x}, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则常数 a 与 b 应满足的关系是________.

42. (1989 年) $\lim\limits_{x\to0}x\cot2x=$________.

43. (1991 年) 已知当 $x\to0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，则常数 $a=$________.

44. (1992 年) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{\mathrm{e}^x-\cos x}=$________.

45. (1993 年) $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=$________.

46. (1993 年) $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=$________.

47. (1994 年) $\lim\limits_{x\to0}\cot x\cdot\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=$________.

48. (1994 年) 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin2x+\mathrm{e}^{2ax}-1}{x}, & x\neq0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，则 $a=$________.

49. (1995 年) $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$________.

50. (1995 年) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=$________.

51. (1996 年) 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，则 $a=$________.

52. (1996 年) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]=$________.

53. (1997 年) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$________.

54. (1997 年) 已知 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}, & x\neq0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$________.

55. (1998 年) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$________.

56. (1999 年) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)=$________.

57.（2000 年） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}=$______.

58.（2001 年） $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}=$______.

59.（2002 年） 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0,\\ ae^{2x}, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$______.

60.（2003 年） $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=$______.

61.（2003 年） 若 $x\to 0$ 时，$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小，则 $a=$______.

62.（2004 年） 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$，则 $f(x)$ 的间断点为 $x=$______.

63.（2006 年） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$______.

64.（2007 年） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-\sin x}{x^3}=$______.

65.（2008 年） 已知函数 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos[xf(x)]}{(e^{x^2}-1)f(x)}=1$，则 $f(0)=$______.

66.（2011 年） $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+2^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=$______.

67.（2012 年） $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{1+n^2}+\dfrac{1}{2^2+n^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n^2}\right)=$______.

68.（2013 年） $\lim\limits_{x\to 0}\left(2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=$______.

69.（2015 年） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=$______.

70.（2016 年） 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n}\right)=$______.

三、解答题

71.（1987 年） 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

72.（1988 年） 已知 $f(x)=e^{x^2}$，$f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

73.（1989 年） 求 $\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

74.（1990 年） 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=9$，求常数 a.

75.（1991 年） 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2(e^x-1)}$.

76.（1991 年） 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$.

77.（1992 年） 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}$.

78.（1992 年）　求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$.

79.（1993 年）　求$\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)$.

80.（1993 年）　求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}$.

81.（1994 年）　计算$\lim\limits_{n\to\infty}\tan^{n}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n}\right)$.

82.（1995 年）　求$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

83.（1996 年）　设$x_1=10,x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}(n=1,2,\cdots)$，试证数列$\{x_n\}$极限存在，并求此极限.

84.（1997 年）　求极限$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

85.（1998 年）　求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right]$.

86.（1998 年）　求函数$f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}$在区间$(0,2\pi)$内的间断点，并判断其类型.

87.（1999 年）　求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$.

88.（2000 年）　求$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

89.（2001 年）　求极限$\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，记此极限为$f(x)$，求函数$f(x)$的间断点并指出其类型.

90.（2002 年）　设函数$f(x)$在$x=0$的某邻域内具有一阶连续导数，且$f(0)\neq0$，$f'(0)\neq0$，若$af(h)+bf(2h)-f(0)$在$h\to0$时是比h高阶的无穷小，试确定a,b的值.

91.（2002 年）　设函数$f(x)$在$x=0$的某邻域内具有二阶连续导数，且$f(0)\neq0$，$f'(0)\neq0,f''(0)\neq0$. 证明：存在唯一的一组实数$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，使得当$h\to0$时，$\lambda_1f(h)+\lambda_2f(2h)+\lambda_3f(3h)-f(0)$是比$h^2$高阶的无穷小.

92.（2002 年）　设$0<x_1<3,x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}(n=1,2,\cdots)$，证明数列$\{x_n\}$的极限存在，并求此极限.

93.（2003 年）　设函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}, & x<0,\\ 6, & x=0,\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\frac{x}{4}}, & x>0,\end{cases}$

问a为何值时，$f(x)$在$x=0$处连续；a为何值时，$x=0$是$f(x)$的可去间断点？

94.（2004 年）　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

95.（2006 年）　设数列$\{x_n\}$满足$0<x_1<\pi, x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$.

（1）证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求该极限；

（2）计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

96.（2008 年）　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

97.（2009 年）　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\tan x)]}{\sin^4 x}$.

98.（2011 年）　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}$.

99.（2012 年）　已知函数$f(x)=\frac{1+x}{\sin x}-\frac{1}{x}$，记$a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

（1）求a的值；

（2）若当$x\to 0$时，$f(x)-a$与x^k是同阶无穷小，求常数k的值.

100.（2013 年）　当$x\to 0$时，$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$与$ax^n$为等价无穷小，求$n$与$a$的值.

101.（2015 年）　设函数$f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x, g(x)=kx^3$. 若$f(x)$与$g(x)$在$x\to 0$时是等价无穷小，求$a,b,k$的值.

102.（2016 年）　求极限$\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

第二章　导数与微分中值定理

一、选择题

1.（1987 年）　设 $f(x)$在点 $x=a$ 处可导，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+x)-f(a-x)}{x}$等于(　　).

(A) $f'(a)$　　(B) $2f'(a)$　　(C) 0　　(D) $f'(2a)$

2.（1988 年）　若函数 $y=f(x)$有 $f'(x_0)=\dfrac{1}{2}$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，该函数在 $x=x_0$ 处的微分 dy 是(　　).

(A) 与 Δx 等价的无穷小　　(B) 与 Δx 同阶的无穷小

(C) 比 Δx 低阶的无穷小　　(D) 比 Δx 高阶的无穷小

3.（1989 年）　设 $f(x)$在 $x=a$ 的某个邻域内有定义，则 $f(x)$在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是(　　).

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty} h\left[f\left(a+\dfrac{1}{h}\right)-f(a)\right]$存在　　(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$存在

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$存在　　(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$存在

4.（1990 年）　已知函数 $f(x)$具有任意阶导数，且 $f'(x)=[f(x)]^2$. 则当 n 为大于 2 的正整数时，$f(x)$的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$是(　　).

(A) $n!\,[f(x)]^{n+1}$　　(B) $n[f(x)]^{n+1}$

(C) $[f(x)]^{2n}$　　(D) $n!\,[f(x)]^{2n}$

5.（1992 年）　设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$，则使 $f^{(n)}(0)$存在的最高阶数 n 为(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

6.（1993 年）　设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x^2-1|}{x-1}, & x\neq 1,\\ 2, & x=1,\end{cases}$则在点 $x=1$ 处 $f(x)$(　　).

(A) 不连续　　(B) 连续但不可导

(C) 可导且导数不连续　　(D) 可导且导数连续

7.（1993 年）　若 $f(x)=-f(-x)$，在$(0,+\infty)$内 $f'(x)>0$，$f''(x)>0$，则 $f(x)$在$(-\infty,0)$内(　　).

(A) $f'(x)<0$，$f''(x)<0$　　(B) $f'(x)<0$，$f''(x)>0$

(C) $f'(x)>0$，$f''(x)<0$　　(D) $f'(x)>0$，$f''(x)>0$

8.（1994 年）　设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}x^3, & x\leqslant 1,\\ x^2, & x>1,\end{cases}$则 $f(x)$在 $x=1$ 处的(　　).

(A) 左、右导数都存在　　(B) 左导数存在，但右导数不存在

(C) 左导数不存在，但右导数存在　　(D) 左、右导数都不存在

9.（1995 年）　设 $f(x)$可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$在 $x=0$ 处可导的(　　).

(A) 充分必要条件　　(B) 充分条件但非必要条件

(C) 必要条件但非充分条件　　(D) 既非充分条件又非必要条件

10. (1996 年) 设 $f(x)$ 处处可导,则(　　).

(A) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$,必有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$

(B) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$,必有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

(C) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$

(D) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

11. (1996 年) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\delta,\delta)$ 内有定义,若当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时,恒有 $|f(x)|\leqslant x^2$,则 $x=0$ 必是 $f(x)$ 的(　　).

(A) 间断点　　(B) 连续而不可导点

(C) 可导点,且 $f'(0)=0$　　(D) 可导点,且 $f'(0)\neq 0$

12. (1998 年) 函数 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$ 不可导点的个数是(　　).

(A) 3　　(B) 2　　(C) 1　　(D) 0

13. (1999 年) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0,\\ x^2 g(x), & x\leqslant 0,\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 是有界函数,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　).

(A) 极限不存在　　(B) 极限存在,但不连续

(C) 连续,但不可导　　(D) 可导

14. (2001 年) 设 $f(0)=0$,则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充分条件为(　　).

(A) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cos h)$ 存在　　(B) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在

(C) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h^2}f(h-\sin h)$ 存在　　(D) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在

15. (2002 年) 设函数 $f(u)$ 可导,$y=f(x^2)$ 当自变量 x 在 $x=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.1$ 时,相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.1,则 $f'(1)=$(　　).

(A) -1　　(B) 0.1　　(C) 1　　(D) 0.5

16. (2002 年) 设函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界且可导,则(　　).

(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$

(B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$

(C) 当 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=0$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)=0$

(D) 当 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)$ 存在时,必有 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)=0$

17. (2005 年) 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$,则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内(　　).

(A) 处处可导　　(B) 恰有一个不可导点

(C) 恰有两个不可导点　　(D) 至少有三个不可导点

18. (2006 年) 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数,且 $f'(x)>0$,$f''(x)>0$,Δx 为自变量 x 在点 x_0 处的增量,Δy 与 $\mathrm{d}y$ 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分,若 $\Delta x>0$,则(　　).

(A) $0<\mathrm{d}y<\Delta y$ (B) $0<\Delta y<\mathrm{d}y$

(C) $\Delta y<\mathrm{d}y<0$ (D) $\mathrm{d}y<\Delta y<0$

19. (2007 年) 设函数 $f(x)$在 $x=0$ 处连续,下列命题错误的是( ).

(A) 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$存在,则 $f(0)=0$

(B) 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$存在,则 $f(0)=0$

(C) 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$存在,则 $f'(0)$存在

(D) 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$存在,则 $f'(0)$存在

20. (2008 年) 设函数 $f(x)=x^2(x-1)(x-2)$,则 $f'(x)$的零点个数为( ).

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

21. (2011 年) 已知 $f(x)$在 $x=0$ 处可导,且 $f(0)=0$,则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$( ).

(A) $-2f'(0)$ (B) $-f'(0)$ (C) $f'(0)$ (D) 0

22. (2012 年) 设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$,其中 n 为正整数,则 $f'(0)=$( ).

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$ (B) $(-1)^n(n-1)!$

(C) $(-1)^{n-1}n!$ (D) $(-1)^n n!$

23. (2013 年) 设函数 $y=f(x)$由方程 $\cos(xy)+\ln y-x=1$ 确定,则$\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(\dfrac{2}{n}\right)-1\right]=$( ).

(A) 2 (B) 1 (C) -1 (D) -2

24. (2014 年) 设函数 $f(x)=\arctan x$,若 $f(x)=xf'(\xi)$,则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\xi^2}{x^2}=$( ).

(A) 1 (B) $\dfrac{2}{3}$ (C) $\dfrac{1}{2}$ (D) $\dfrac{1}{3}$

25. (2016 年) 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{n}, & \dfrac{1}{n+1}<x\leqslant\dfrac{1}{n}, n=1,2,\cdots,\end{cases}$ 则( ).

(A) $x=0$ 是 $f(x)$的第一类间断点 (B) $x=0$ 是 $f(x)$的第二类间断点

(C) $f(x)$在 $x=0$ 处连续但不可导 (D) $f(x)$在 $x=0$ 处可导

二、填空题

26. (1987 年) 设 $y=\ln(1+ax)$,其中 a 为非零常数,则 $y'=$________,$y''=$________.

27. (1988 年) 若 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2tx}$,则 $f'(t)=$________.

28. (1989 年) 设 $\tan y=x+y$,则 $\mathrm{d}y=$________.

29. (1989 年) 已知 $f'(3)=2$,则$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}=$________.