普通高等学校"十三五"规划教材

线性代数

XIANXING DAISHU

王树泉　主编

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

普通高等学校“十三五”规划教材

线性代数

主　编　王树泉
副主编　雷玉霞　王　琳

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

内 容 简 介

全书共分六章，内容包括：行列式、矩阵、向量组与线性方程组、向量空间与线性变换、特征值与特征向量、二次型；每章均配有习题，书末附有习题答案。

本书精选内容、突出重点；注重理论知识的严谨，注重概念的引入，重视问题的导向作用；组织内容讲求思路清晰，充分展示数学思维过程；讲究运用通俗易懂的语言、形象直观的图形讲解较抽象的知识，有效化解初学者学习线性代数课程的难度。

本书可供普通高校理工类、经济类、管理类和其他非数学类本科专业的学生使用，也可供相关人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/王树泉主编. —北京：中国铁道出版社，2016.12

普通高等学校“十三五”规划教材

ISBN 978-7-113-22644-2

Ⅰ.①线… Ⅱ.①王… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第311148号

书　　名：**线性代数**
作　　者：王树泉　主编

策　　划：李志国　　　　读者热线：(010)63550836
责任编辑：张文静　鲍　闻
封面设计：付　巍
封面制作：白　雪
责任校对：张玉华
责任印制：郭向伟

出版发行：中国铁道出版社(100054，北京市西城区右安门西街8号)
网　　址：http://www.51eds.com
印　　刷：虎彩印艺股份有限公司
版　　次：2016年12月第1版　　2016年12月第1次印刷
开　　本：710 mm×1 000 mm　1/16　印张：11.25　字数：190千
书　　号：ISBN 978-7-113-22644-2
定　　价：28.00元

前　言

本书根据教育部非数学专业数学基础课程教学指导分委员会制定的“线性代数”课程教学基本要求，参照全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲的内容和要求，综合考虑各专业的应用需求，并结合编者多年的教学实践经验编写而成。本书适合作为普通高校理工类、经济类、管理类和其它非数学类本科专业的教材或参考书。

线性代数是一门基础数学课程，它的理论和方法广泛应用于自然科学、工程技术和经济管理等众多领域，而且该课程对学生理性思维品质和思维能力的培养，以及创造力的开发都有着非同寻常的作用。

线性代数的研究对象是线性空间与线性变换。本书讲述的内容包括行列式、矩阵、向量组与线性方程组、向量空间与线性变换、特征值与特征向量、二次型。

关于本书内容的编写与安排作如下说明：

1. 充分考虑知识的逻辑要求与学生的认知规律，力求知识内容便于教与学。

例如，将线性变换作为一节讲述，基于这一内容直接关系着学生对对角矩阵、相似矩阵、正交矩阵等一系列矩阵概念的理解，也直接关系着学生对矩阵的乘积、矩阵的逆等一系列矩阵运算的理解。考虑到一般线性空间的线性变换较抽象，故本书只介绍向量空间的线性变换，而且仅介绍向量空间的线性变换的概念、线性变换的矩阵表示、线性变换的运算及其矩阵表示。

2. 注重理论知识的严谨。

概念的定义与使用保证清晰、准确。例如，为了保证 n 阶行列式的定义既严谨又易于理解，在定义前运用线性方程组的行列式解法充分展示行列式的递归定义方法。又如，为了准确使用向量空间的概念，把具有内积的向量空间定义为欧氏空间；为了严格区分 n 维向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中的内积，把具有标准内积的 n 维向量空间 $\mathbb{R}^n$ 定义为 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$。

书中几乎所有命题都给出了证明，除个别较简单的命题留给读者自行证明。例如，行列式的性质，实对称矩阵的相似对角化定理，正定矩阵的判定定理等都给出了严格证明，这里不再一一列举。

3. 注重概念的引入。

在讲概念之前，首先回顾已学知识，例如在给出矩阵的初等行变换的概念

之前,先回顾用高斯消元法解三元线性方程组的具体做法;在给出二次型概念之前,先回顾二次曲线的分类及二元函数的驻点是否为极值点的判定这两个知识点。或者在讲概念之前,先列举直观的几何事实,例如先给出向量形式的平面坐标系与空间坐标系,以此引入线性表示、线性相关、线性无关、向量组的秩等概念;先利用几何图形解释二维向量的正交分解,然后自然给出施密特正交化方法。

4. 讲求思路清晰,充分展示数学思维过程。

通常采用如下思路组织章节内容:由背景知识引出概念,提出问题,经分析、求解形成定理,再证明定理,最后通过例题说明解决问题的方法与步骤。为了突出知识重点及探讨问题的思路,把问题的结论或解决问题的方法作为定理,其它命题作为例题或留做习题。

5. 结合数学教育理论,有意识的培养学生的思维品质与思维能力,引导学生领会线性代数的思想方法。

借助线性代数具有较强的逻辑性与抽象性的特点,整个内容体系广泛运用抽象、概括、归纳、演绎、类比等思维方法,具体内容的安排充分展示数学思维过程,问题的探讨讲究运用清晰的思路。在具体问题的求解上着重体现矩阵方法。

6. 精选例题、习题。例题具有代表性,能说明解题思路和方法。习题题型多样,难度依次递增,既有练习基本概念、基本运算的题目,也有与考研试题难度相当的题目,以便于学生检查对所学知识的掌握程度。书末附有习题答案,方便学生参考使用。

7. 本书力求知识体系完整与抽象层次适当,以满足各专业的应用需要。对于教学大纲基本要求外的内容或某些理论性较强的章节,不同专业可以根据具体的教学要求和学时进行取舍。

本书在编写过程中得到了曲阜师范大学管理学院院长张玉忠教授的大力支持和帮助,郑恒武教授和王宜举教授等对全书进行了细心的审阅,并提出了许多好的建议,在此向他们表示衷心的感谢。

由于时间仓促和编者水平有限,书中难免有错误和不当之处,敬请读者批评指正。

编　者

2016 年 9 月

目　　录

第一章 行 列 式

行列式是重要的数学工具,它来源于解线性方程组,是建立线性代数理论的基础.本章首先从求二元及三元线性方程组的解引入二阶及三阶行列式的概念,然后利用归纳法给出 n 阶行列式的概念;接着讨论行列式的性质及其计算方法;最后介绍用 n 阶行列式求解 n 元线性方程的克拉默(Cramer)法则.

第一节 行列式的概念

对 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases} \tag{1}$$

它的解与方程组的系数及等号右端的常数有关,那么,如何用这些系数与常数来表示它的解呢?为此,我们先考察二元和三元线性方程组的解.

一、二元线性方程组与二阶行列式

用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2. \end{cases} \tag{2}$$

为消去未知数 x_2,用 a_{22} 乘以第一个方程,a_{12} 乘以第二个方程,然后将两式相减,得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2.$$

类似地,消去 x_1,得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组(2)有唯一解：

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{3}$$

(3)式中两个分式的分母都是 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，其值由方程组(2)的四个系数确定，把这些未知数的系数按照在方程组(2)中的位置排成两行两列的数表：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}, \end{matrix}$$

表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为该数表所确定的**二阶行列式**，记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

其中 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式的元素，元素 a_{ij} 的第一个下标 i 表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 表明该元素位于第 j 列.

图 1.1 中的实线称为**主对角线**，虚线称为**副对角线**，

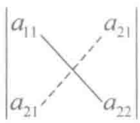

图 1.1

于是，二阶行列式就是主对角线上两元素的乘积减去副对角线上两元素的乘积所得的差. 按照二阶行列式的定义，(3)式中分子分别是

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

令

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

则当 $D\neq 0$ 时，方程组(2)的解可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \qquad x_2=\frac{D_2}{D}. \tag{4}$$

二、三元线性方程组与三阶行列式

解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{5}$$

我们用二元线性方程组的行列式解法求解方程组(5). 求解过程如下：把方程组(5)中的第二、第三个方程变形得

$$\begin{cases} a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2-a_{23}x_3, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2=b_3-a_{33}x_3, \end{cases}$$

解上述二元线性方程组，得

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_2-a_{23}x_3 & a_{22} \\ b_3-a_{33}x_3 & a_{32} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} b_2 & a_{22} \\ b_3 & a_{32} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}x_3}{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}},$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{21} & b_2-a_{23}x_3 \\ a_{31} & b_3-a_{33}x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} a_{21} & b_2 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}x_3}{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}},$$

把上式代入方程组(5)中第一个方程，即有

$$\frac{a_{11}\begin{vmatrix} b_2 & a_{22} \\ b_3 & a_{32} \end{vmatrix}+a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}x_3}{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}+\frac{a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & b_2 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}x_3}{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}+a_{13}x_3=b_1,$$

解得

$$x_3=\frac{a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & b_2 \\ a_{32} & b_3 \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & b_2 \\ a_{31} & b_3 \end{vmatrix}+b_1\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}{a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}.$$

利用相同方法解得

$$x_1=\frac{b_1\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}b_2&a_{23}\\b_3&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}b_2&a_{22}\\b_3&a_{32}\end{vmatrix}}{a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}},$$

$$x_2=\frac{-b_1\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{11}\begin{vmatrix}b_2&a_{23}\\b_3&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&b_2\\a_{31}&b_3\end{vmatrix}}{a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}}.$$

上述三个分式的分母都是

$$a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix},$$

它由方程组(5)的九个系数确定.把这些未知数系数按照在方程组(5)中的位置排成三行三列的数表:

$$\begin{matrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}.\end{matrix}$$

表达式 $a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$ 称为该数表所确定的**三阶行列式**,记作

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}.$$

由于

$$\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32},\quad \begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31},$$

$$\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}=a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31},$$

故三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

图 1.2 中的三条实线看作是平行于主对角线的连线，三条虚线看作是平行于副对角线的连线.

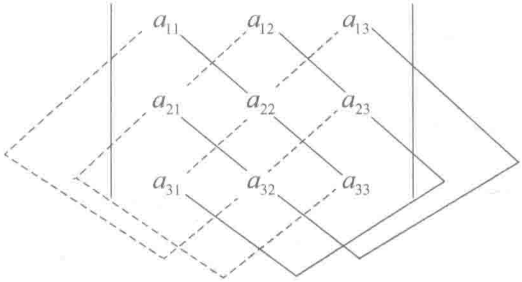

图 1.2

三阶行列式就是每条实线上三个元素的乘积之和减去每条虚线上三个元素的乘积所得的差.

例如，三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=1\times2\times2+2\times1\times5+3\times1\times2-5\times2\times3-1\times1\times1-2\times2\times2=-19.$$

为了简化表达，令

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},\quad M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

显然，M_{1j} 是三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$（记为 D）中划去元素 a_{1j} 所在的第 1 行和第 j 列后余下的 4 个元素按照在 D 中原来的位置构成的二阶行列式，其中 $j=1,2,3$. 则三阶行列式 D 可写成

$$D=a_{11}M_{11}-a_{12}M_{12}+a_{13}M_{13}.$$

为了统一符号，令

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11},\quad A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12},\quad A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13},$$

则

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}.$$

由三阶行列式的定义，上述 x_1,x_2,x_3 的分子可分别写成

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

容易看出，D_i 是 D 的第 i 列换成 b_1,b_2,b_3，而其余两列不变所得到的行列式，$i=1,2,3$.

当 $D\neq 0$ 时，方程组(5)的解可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

三、n 阶行列式

运用二阶和三阶行列式的定义方法，可归纳定义 n 阶行列式.

定义　设有 n^2 个数，排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}, \tag{6}$$

该数表确定的 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是一个数. 当 $n=1$ 时，定义 $|a_{11}|=a_{11}$；当 $n\geqslant 2$ 时，定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n},$$

其中 $A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$，而 M_{1j} 是数表(6)中划去元素 a_{1j} 所在的第 1 行和第 j 列后余下的 $(n-1)^2$ 个元素按照原来的位置确定的 $n-1$ 阶行列式，$j=1,2,\cdots n$，并称 M_{1j} 为元素 a_{1j} 的**余子式**，A_{1j} 为元素 a_{1j} 的**代数余子式**. n 阶行列式简记作 $\det(a_{ij})$，其中 a_{ij} 为行列式中位于第 i 行第 j 列的元素.

运用三元线性方程组(5)的求解方法以及 n 阶行列式的定义，可求得 n 元线性方程组(1)的解.

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad j=1,2,\cdots,n.$$

则当 $D\neq 0$ 时，n 元线性方程组(1)的解可表示为

$$x_j=\frac{D_j}{D}, \quad j=1,2,\cdots,n.$$

例 1　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}.$$

解　$D=2A_{11}+1A_{12}+4A_{13}+1A_{14}$

$$=2\times(-1)^{1+1}M_{11}+(-1)^{1+2}M_{12}+4\times(-1)^{1+3}M_{13}+(-1)^{1+4}M_{14}$$

$$=2\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 2 \end{vmatrix}+4\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix}$$

$$=2\times 10+11+4\times(-6)-7=0.$$

主对角线以下(上)的元素都为 0 的行列式叫做**上(下)三角形行列式**. 主

对角线以外的元素全为 0 的 n 阶行列式称为 n **阶对角行列式**.

例 2 证明下三角形行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证 对行列式阶数 n 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时,结论成立.

假设对 $n-1$ 阶下三角形行列式结论成立. 由 n 阶行列式定义得

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & & & 0 \\ a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

右端行列式是 $n-1$ 阶下三角行列式,根据归纳假设得

$$D_n=a_{11}(a_{22}a_{33}\cdots a_{nn})=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

故结论成立.

同理可证,n 阶对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

行列式中未写出的元素都是 0.

例 3 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & & & a_n \\ & & a_{n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_1 & & & * \end{vmatrix},$$

其中,副对角线以上元素全为 0,副对角线以下元素为任意数.

解 根据行列式定义,

$$D_n=(-1)^{1+n}a_n\begin{vmatrix} 0 & & & a_{n-1} \\ & & a_{n-2} & \\ & \iddots & & \\ a_1 & & & * \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}a_nD_{n-1}$$

$$=(-1)^{n-1}a_n(-1)^{n-2}a_{n-1}D_{n-2}=\cdots$$

$$=(-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1}a_na_{n-1}\cdots a_2a_1$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_na_{n-1}\cdots a_2a_1.$$

同理可得，n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

行列式中未写出的元素都是 0.

第二节　行列式的性质

用行列式的定义计算行列式，一般是比较繁琐的. 为了行列式的简便计算，本节我们要介绍行列式的一些性质.

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的**转置行列式**.

性质 1　行列式与它的转置行列式相等.

证　对行列式的阶数 n 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时，$D=D^{\mathrm{T}}$ 显然成立. 假设对小于 n 阶的行列式结论成立，下证对 n 阶行列式结论也成立.

由行列式定义，

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n},$$

$$D^{\mathrm{T}}=a_{11}A_{11}{}^{\mathrm{T}}+a_{21}A_{21}{}^{\mathrm{T}}+\cdots+a_{n1}A_{n1}{}^{\mathrm{T}}.$$

根据归纳假设,$M_{i1}{}^{\mathrm{T}}=M_{i1}$,从而 $A_{i1}{}^{\mathrm{T}}=A_{i1}$, $i=1,2,\cdots,n$. 于是

$$D^{\mathrm{T}}=a_{11}A_{11}+(-1)^{1+2}a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{42} & a_{43} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+(-1)^{1+n}a_{n1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}.$$

将上面的 $n-1$ 个 $n-1$ 阶行列式按第一行展开后合并含 a_{12} 的项,得

$$(-1)^{1+2}a_{21}a_{12}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{31}a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{43} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots+ \tag{7}$$

$$(-1)^{1+n}a_{n1}a_{12}\begin{vmatrix} a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}.$$

由假设,对下述 $n-1$ 阶行列式按第 1 列展开,

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}a_{21}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+(-1)^{2+1}a_{31}\begin{vmatrix} a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{43} & \cdots & a_{4n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+(-1)^{(n-1)+1}a_{n1}\begin{vmatrix} a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}.$$

注意到

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=M_{12},$$