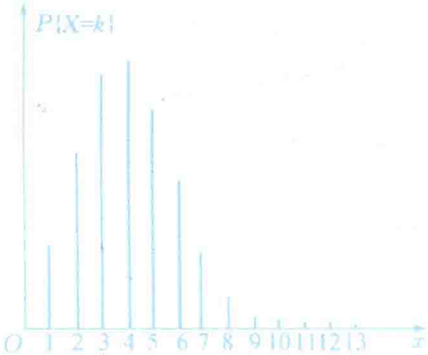
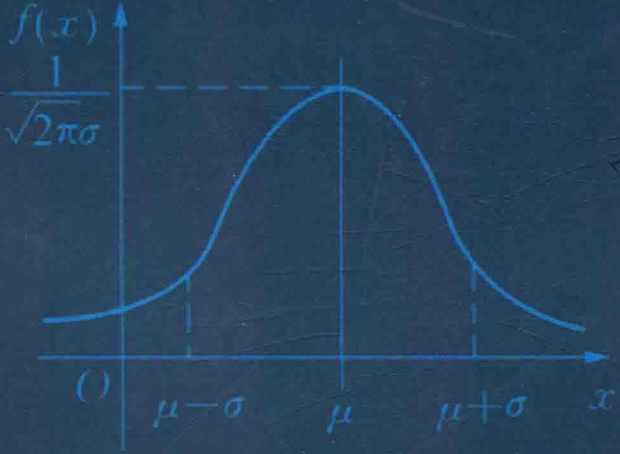
全国高等农林院校“十三五”规划教材

概率论

第二版



吴清太　方桂英　主编



中国农业出版社

全国高等农林院
中华农业科教基 J201502030

概　率　论

第 二 版

吴清太　方桂英　主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

概率论 / 吴清太，方桂英主编．—2 版．—北京：中国农业出版社，2016.12（2017.7 重印）
全国高等农林院校“十三五”规划教材
ISBN 978－7－109－22377－6

Ⅰ.①概…　Ⅱ.①吴…　②方…　Ⅲ.①概率论－高等学校－教材　Ⅳ.①O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 278080 号

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区麦子店街 18 号楼）
（邮政编码 100125）
策划编辑　魏明龙
文字编辑　魏明龙

北京万友印刷有限公司印刷　　新华书店北京发行所发行
2011 年 7 月第 1 版　　2016 年 12 月第 2 版
2017 年 7 月第 2 版北京第 2 次印刷

开本：720mm×960mm　1/16　　印张：11
字数：190 千字
定价：22.00 元

内容简介

本教材为高等农林院校概率论课程教材．全书共有5章：随机事件及其概率、一维随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理．附录中还有常用的MATLAB概率统计软件的简介．

本教材是编者经多年教学实践及研究，在不断总结经验的基础上编写而成的．注重随机数学的基本方法及基本思想的渗透，而淡化随机数学理论上的证明与技巧．加强应用随机数学的手段与方法对实际问题的处理能力的培养，达到提高学生对随机问题的认识及解决能力．

本教材可作为高等农林院校概率论课程教学用书，以及相关科技人员的参考书．

编　写　人　员

主　编　吴清太（南京农业大学）

方桂英（江西农业大学）

副主编　陈朝霞（南京农业大学）

胡建根（江西农业大学）

参　编　温阳俊（南京农业大学）

朱烈浪（江西农业大学）

张　梅（南京农业大学）

第二版前言

本教材第一版发行以来各方面反映尚好，同行提出了一些有益的意见和建议，我们在教学中也发现了一些可改进的地方．本次修订的重点放在概念的引入、结论的叙述和解释上，因此在第一版的基础上，修改或补充了书中概念引入和结论解释及其应用的一些例题；同时根据教学的需要补充了求连续型随机变量的函数的方法：微元法；补充了两个相互独立的随机变量的函数的分布，其中一个为连续型，另一个为离散型；增加了三套模拟试题及其答案．

本教材是全国高等农林院校“十三五”规划教材，同时被列入中华农业科教基金教材建设研究项目，在此向关心和支持本教材出版工作的广大教师表示衷心的感谢．

本次修订由吴清太定稿．

由于作者水平有限，书中难免存在不妥之处，恳请读者和使用本教材的教师及专家批评指正．

主　编

2016年6月于南京

第一版前言

概率是描述随机事件发生的可能性的度量．概率论通过对简单事件的研究，逐步进入复杂随机现象规律的研究，是研究复杂随机现象规律的有效方法和工具．掌握处理随机问题的基本思想与方法是当代大学生必须具备的一种基本能力．

本教材是在教育部高等农业院校理科基础课程教学指导委员会领导下，针对农林院校人才培养目标而为农林院校开设概率论课程编写的．考虑到农林院校学生的特点及培养要求，在编写过程中，遵循教学指导委员会下发的关于本课程的基本要求，同时根据教学改革的趋势，在内容上突出随机数学的基本思想和方法，淡化各种繁琐的技巧，适当降低了难度．考虑到数学建模与数学实验的需要，在附录中增加了目前在工程技术和科学研究中广泛使用的MATLAB软件的介绍．书中列举了大量较为典型、易于接受的例题和实际应用问题，配备了相当数量的习题：习题A和习题B，习题A为基本要求题，即一般学生必须掌握的习题，而习题B为较高要求题，即立志于要考研究生的学生需要掌握的习题．

本教材由吴清太、方桂英担任主编，陈朝霞、胡建根担任副主编，全书由吴清太统一制定编写教学大纲并统一定稿．参加编写的人员还有温阳俊、朱烈浪、张梅．第1章附录、附表1、附表2由吴清太编写，第2章 和第3章部分图形由吴清太绘制；第2章、第3章由方桂英、胡建根、朱烈浪编写；第4章由陈朝霞编写；第5章由温阳俊编写；张梅对第1章、第4章、第5章进行校对．另外，翁利亚、周春俊对全书进行了校对．

本教材是编者在多年从事随机数学的教学，总结经验的基础上编写而成的．由于作者水平有限，书中难免存在不妥之处，请读者不吝指教．

编 者

2011 年 3 月

目　录

第 1 章　随机事件及其概率

概率论是研究随机现象及其规律的一门学科，是近代数学的重要组成部分．本章将介绍概率论的基本概念，并进一步讨论事件之间的关系及其运算、概率的定义、概率的确定方法、概率的性质及计算方法等，这些都是我们学习概率论的基础．

1.1　随机事件及其运算

1.1.1　随机现象

人们在生产活动、社会实践和科学试验中，所遇到的自然现象和社会现象，大体分为两类：一类是可以预言其结果，即在保持条件不变的情况下，重复进行试验，其结果总是确定的．例如，在标准大气压下水加热到 100℃必然沸腾；纯种紫花豌豆的后代一定开紫花；水稻从播种到收割总是经过发芽、育种、长叶、吐穗、扬花、结实几个阶段等，我们称之为**确定性现象**；另一类现象是无法事先断言其结果的，即使在保持条件不变的情况下重复进行试验，其结果也未必相同．例如，观察某一商店每天来的顾客数与销售商品的数额都不是确定的；观察种子发芽的情况，某粒种子可能发芽，也可能不发芽；某个射手向一目标射击，结果是可能命中，也可能不中；正在放射 α 粒子的放射性物质，每天在同一规定的时间内放射的粒子数，事先无法确定．我们称这类现象为**随机现象**．

随机现象是广泛存在的．我国宋代大文学家苏轼有著名的诗句："人有悲欢离合，月有阴晴圆缺，此事古难全．"这说明人类早就对随机现象的存在有着切身的体验，也记录了人们面对随机现象曾经表现出来的无能为力．

1.1.2　样本空间和随机事件

1. 随机试验

尽管随机现象中出现什么结果不能完全预言，但全部可能结果是已知的．例如，抛一枚硬币只会有"正面"和"背面"两个可能结果，某一商店每天来的顾客数必定是一个非负整数．为了叙述方便，我们把对一定条件下的自然现

象和社会现象所进行的观察或实验统称为试验．

若试验具有下列共同特征：

(1) 在相同的条件下可以重复进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，但是在试验之前可以确定一切可能出现的结果；

(3) 每次试验中有且只有其中的一个结果发生，但试验之前不能准确地预知哪一种结果会出现，

我们称这样的试验为**随机试验**，也简称为**试验**，常用 E 来表示．

为了研究的方便，我们有时也会把具有固定结果的试验，看成是随机试验的极端情形．有时，又需要把几次试验作为一个整体合起来看成一次随机试验，例如，可以把连续掷三次骰子看成是一次随机试验．

在一次试验中，某个结果是否出现具有一定的偶然性．但在多次重复试验中，这些无法准确预知的现象，并不是杂乱无章的，其结果就会出现某种固有规律性．例如，在投掷一枚质地均匀的硬币时，只投掷一次时，投掷的结果是正面还是反面是无法确定的，但当大量重复投掷硬币时，就可以看到出现正面的次数约占总试验次数的一半．又如，某人打靶射击，若射击次数不多，靶上的弹着点似乎是随意分布的，但倘若进行大量的重复射击时，弹着点的分布就逐渐呈现规律性：它们大体上关于靶中心对称，靠近靶心的弹着点密，偏离靶心越远弹着点越稀少，且弹着点落在靶任意指定区域内的次数与射击次数 n 之比(频率)大体上保持稳定，且 n 越大，其频率稳定性就愈加明显，这种在大量重复试验中随机现象所表现出的固有规律，我们通常称之为统计规律．概率论就是揭示和研究随机现象统计规律的一门数学学科．概率论的理论和方法在物理学、医学、生物学等学科以及农业、工业、国防和国民经济等方面都具有极广泛的应用．

2. 样本空间

随机试验的每一个可能发生的结果，称为**样本点**，有时也称为**基本事件**，常用 ω 表示．而所有样本点(或基本事件)组成的集合称为**样本空间**，通常用 Ω 表示．显然 $\omega\in\Omega$.

例 1　观察一粒种子的发芽情况，一次观察就是一次试验，试验的结果为 $\omega_1=$ “发芽”，$\omega_2=$ “不发芽”，则 $\Omega_1=\{\omega_1, \omega_2\}$.

例 2　服务台在 8:00～9:00 之间到来的顾客数，则 $\Omega_2=\{n\mid n=0, 1, 2, \cdots\}$，可见 Ω_2 包含可列无穷多个样本点．

例 3　在有噪声干扰下，测量某终端电压，则 $\Omega_3=\{x\mid x\in\mathbf{R}\}$，其样本点有不可数无穷多个．

注：在同样的试验条件下，由于试验的考察目的不同，可能选择不同的样本空间，这是初学者必须注意的．

例 4　一枚硬币投掷两次观察出现正面的次数(注意此时投掷两次硬币才算完成一次试验)，$\Omega_4=\{0, 1, 2\}$，其中 0，1，2 分别表示出现正面的次数，共有 3 个样本点．

例 5　一枚硬币投掷两次观察出现正、反面的次序，则 $\Omega_5=\{\mathrm{HH}, \mathrm{HT}, \mathrm{TH}, \mathrm{TT}\}$(其中，H 代表出现正面，T 代表出现反面)，包含 4 个样本点．

需要注意的是：

(1) 样本空间中的元素可以是数也可以不是数．

(2) 从样本空间所含样本点的个数来看，样本空间可以分为有限与无限两类．例如，以上样本空间中 Ω_1，Ω_4，Ω_5 含有有限个样本点，故为有限样本空间，而 Ω_2，Ω_3 中样本点的个数为无限个，为无限样本空间．

3. 随机事件

对于某个随机试验来说，在一次试验中可能出现也可能不出现的结果，这种由部分样本点组成的试验结果称为**随机事件**．而从集合论的观点来说，随机试验 E 的样本空间 Ω 的任一子集就是**随机事件**，简称**事件**，常用大写字母 A，B，C，…表示．在试验中，如果出现某一个样本点 ω，且 $\omega\in A$，则称本次试验事件 A 发生了，反之，若 $\omega\notin A$，则称本次试验事件 A 没有发生．

因为样本空间 Ω 是由所有样本点所组成的，因而在任一次试验中，必然要出现 Ω 中的某一样本点 ω. 也就是在试验中，Ω 必然会发生，所以今后用 Ω 来表示一个**必然事件**．又因为空集 $\varnothing$ 也可以看作是 Ω 的子集，且它不包含任何基本事件，故每次试验中 $\varnothing$ 必定不会发生，故我们称 $\varnothing$ 为**不可能事件**或**空事件**.

例 6　同时抛三枚硬币，顺次记录出现正反面的情况，得样本空间为

$\Omega=\{\mathrm{HHH}, \mathrm{HHT}, \mathrm{HTH}, \mathrm{THH}, \mathrm{HTT}, \mathrm{THT}, \mathrm{TTH}, \mathrm{TTT}\}$.

$A=$ “反面恰好出现两次” $=\{\mathrm{TTH}, \mathrm{THT}, \mathrm{HTT}\}$，

$B=$ “反面至少出现两次” $=\{\mathrm{TTT}, \mathrm{TTH}, \mathrm{THT}, \mathrm{HTT}\}$，

$C=$ “正反面出现的次数不相同” $=\Omega$，

$D=$ “反面出现的次数多于 3 次” $=\varnothing$.

例 7　投掷一颗骰子，观察其出现的点数，若以“i”表示“掷出 i 点”($i=1, 2, 3, 4, 5, 6$)，则样本空间为 $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$A=$ “掷出的点数为偶数点” $=\{2, 4, 6\}$，

$B=$ “掷出的点数大于 3” $=\{4, 5, 6\}$，

$C=$ “掷出点数为 7 点” $=\varnothing$，$D=$ “掷出的点数不超过 6 点” $=\Omega$.

1.1.3 事件之间的关系和运算

一个样本空间Ω中，可以有很多的随机事件，由于它们共处于同一个试验中，因而彼此之间是有联系的．我们有必要弄清它们之间的关系，并引进事件间的运算，以便化复杂事件为简单事件，更好地解决相应的概率问题．

1. 事件的包含

设A，B是任意两个随机事件，如果事件A发生，则必然导致事件B发生，也即事件A中的任一样本点都属于事件B，则称事件A包含于事件B(或称事件B包含事件A)，记作$A\subseteq B$或$B\supseteq A$，它的几何表示如图1-1所示．如前面我们提到的例6中，有$A\subseteq B$. 因为不可能事件$\varnothing$不包含任何样本点ω，故对任一事件A，我们约定$\varnothing\subseteq A$.

2. 事件的相等

设A，B是两事件，若$A\subseteq B$且$B\subseteq A$，则称A与B相等，记作$A=B$.

3. 事件的并(或事件的和)

事件A和B中至少有一个发生的事件，称为事件A与B的和事件，记作$A\cup B$(或$A+B$). 从集合的观点来看，事件A与B的和是由事件A与事件B中所有样本点组成的，它的几何表示如图1-2所示．

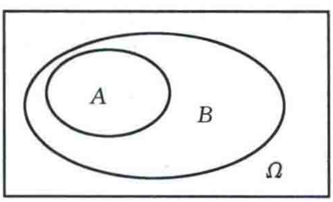


图1-1

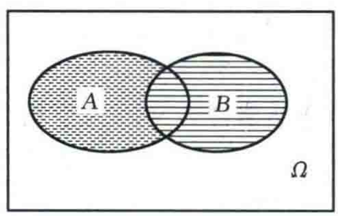


图1-2

如在掷骰子的试验中，记事件$A=$“出现奇数点”$=\{1, 3, 5\}$，事件$B=$“出现的点数不超过3”$=\{1, 2, 3\}$，则A与B的和为$A\cup B=\{1, 2, 3, 5\}$.

事件的和可以推广到更多个事件上去，n个事件A_1，A_2，…，A_n中至少有一个发生的事件，称为事件A_1，A_2，…，A_n的和事件，记作$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$(或$A_1+A_2+\cdots+A_n=\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$).

事件的和还可以推广到无穷多个事件上去，设A_1，A_2，…，A_n，…为可列个事件，我们把A_1，A_2，…，A_n，…中至少有一个发生的事件，称为事件

列 A_1，A_2，…，A_n，…的和事件，记作 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$（或 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots = \sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i$）.

4. 事件的交（积）

事件 A 与 B 同时发生的事件，称为事件 A 和事件 B 的交或积事件，记作 $A \cap B$（或 AB）. 从集合的观点来看，事件 A 和 B 的积是由既属于 A 又属于 B 的样本点组成的集合，它的几何表示如图 1－3 所示 .

如在掷骰子的试验中，记事件 $A=$“出现奇数点”$=\{1, 3, 5\}$，记事件 $B=$“出现的点数不超过 3”$=\{1, 2, 3\}$，则 A 与 B 的交为 $A \cap B=\{1, 3\}$.

积事件可以推广到更多个事件上去，n 个事件 A_1，A_2，…，A_n 同时发生的事件称为事件 A_1，A_2，…，A_n 的积事件，记作 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$.

事件的积也可以推广到无穷多个事件上去，设 A_1，A_2，…，A_n，…为可列个事件，我们把 A_1，A_2，…，A_n，…同时发生的事件，称为事件列 A_1，A_2，…，A_n，…的积事件，记作 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

5. 互不相容事件（或互斥事件）

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B **互不相容**（或称**互斥**）. 它的几何表示如图 1－4 所示 .

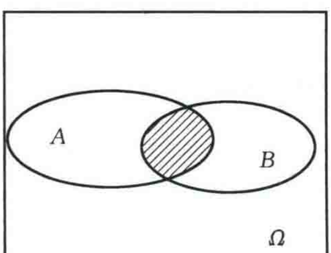


图 1－3

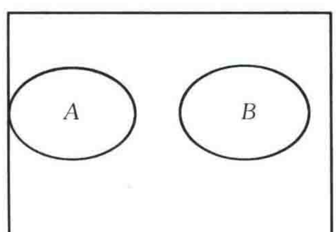


图 1－4

6. 对立事件（或互逆事件）

A 不发生的事件，称为事件 A 的对立事件，亦称为 A 的逆事件，记作 $\overline{A}$. 从集合论的观点来看，A 的对立事件就是由 Ω 中不属于 A 的样本点所组成的集合，即 $\overline{A}=\Omega \setminus A$. 它的几何表示如图 1－5 所示 . 显然：$A\overline{A}=\varnothing$，$A \cup \overline{A}=\Omega$，$\overline{\overline{A}}=A$.

因为 $A\overline{A}=\varnothing$，所以互逆事件一定是互不相容事件，但反之不成立 .

7. 事件的差

事件 A 发生而事件 B 不发生的事件，称为事件 A 与事件 B 的差，记作 $A\setminus B$. 从集合的观点来看，$A\setminus B$ 是由属于 A 但不属于 B 的所有样本点组成的集合．它的几何表示如图 1－6 所示．

例如，在掷骰子的试验中，记事件 $A=$ “出现奇数点” $=\{1, 3, 5\}$，记事件 $B=$ “出现的点数不超过 3” $=\{1, 2, 3\}$，则 A 与 B 的差为 $A\setminus B=\{5\}$.

由以上的定义可知，我们可以把对事件的分析转化为对集合的分析，利用集合间的运算关系来分析事件之间的关系．但是我们要注意学会用概率的语言来描述各种事件，并会用这些运算关系来表示一些事件．

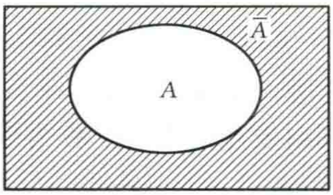


图 1－5

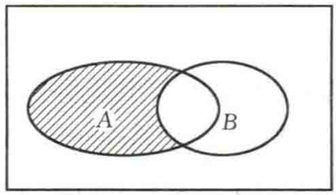


图 1－6

8. 事件的运算性质

(1) **交换律**：

$$A\cup B=B\cup A,\ A\cap B=B\cap A. \tag{1.1.1}$$

(2) **结合律**：

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,\ A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C. \tag{1.1.2}$$

(3) **分配律**：

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C), \tag{1.1.3}$$

$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C). \tag{1.1.4}$$

(4) **对偶律(德·摩根公式)**：

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\ \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}. \tag{1.1.5}$$

德·摩根公式可以推广到多个事件的场合：

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i,\ \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A}_i. \tag{1.1.6}$$

此外，事件的运算还满足以下一些常用的规律性：

$A\cap A=A$，$A\cup A=A$，$A\cap\Omega=A$，$A\cup\varnothing=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cup\Omega=\Omega$，$A\setminus A=\varnothing$，$A\setminus B=A\setminus AB=A\overline{B}$，$A\cap B\subseteq A$，$A\subseteq A\cup B$.