工业和信息化“十二五”规划教材

同濟大學 数学系列教材

LINEAR ALGEBRA

线性代数

同济大学数学系 © 编

传承经典，演绎数学之美
配录微课，共享精品资源
紧扣大纲，符合考研需求

中国工信出版集团 人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

工业和信息化“十二五”规划教材

数学系列教材

线性代数

同济大学数学系◎编

人民邮电出版社

北京

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 同济大学数学系编. -- 北京 : 人民邮电出版社, 2017.1
同济大学数学系列教材
ISBN 978-7-115-42275-0

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①同… Ⅲ. ①线性代数－高等学校－教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第198307号

内 容 提 要

本书根据工科类本科“线性代数”课程教学基本要求，参考同济大学“线性代数”课程及教材建设的经验和成果，按照硕士研究生考研大纲的要求编写而成．编者在内容编排、概念叙述、定理证明等诸多方面都做了精心安排，以使全书结构流畅，主次分明，通俗易懂．

本书共分五章，包括线性方程组与矩阵、方阵的行列式、向量空间与线性方程组解的结构、相似矩阵及二次型、线性空间与线性变换．每小节配有习题，每章末配有拓展阅读和测试题，拓展阅读用于讲解线性代数发展的相关知识；测试题难度高于习题难度，用于学生加强练习，部分习题和测试题答案放于本书最后章节．另外，为了更加清楚地讲解每章的重点、难点以及典型例题，本书还配有微课视频．

本书可作为高等院校非数学类专业“线性代数”课程的教材，也可作为自学者的参考书．

◆ 编　　　　同济大学数学系
　责任编辑　税梦玲
　责任印制　沈　蓉　彭志环

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市丰台区成寿寺路 11 号
　邮编 100164　　电子邮件 315@ptpress.com.cn
　网址 http://www.ptpress.com.cn
　北京昌平百善印刷厂印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
　印张：11.5　　　　2017 年 1 月第 1 版
　字数：274 千字　　2017 年 1 月北京第 1 次印刷

定价：24.00 元

读者服务热线：(010)81055256　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315
广告经营许可证：京东工商广字第 8052 号

前　言

本书是同济大学数学系多年教学经验的总结，编者参考了近年来国内外出版的多本同类教材，吸取它们在内容安排、例题配置、定理证明等方面的优点，并结合工科院校的实际需求编写而成，本书主要特点如下.

一、优化编排，重点突出

本书第一章到第三章的内容以解线性方程组为主线，以矩阵为主要工具，内容由易到难、由浅入深、重点突出、层次分明.

第一章突出了初等变换在矩阵运算和求解线性方程组中的作用，首先通过线性方程组与矩阵的关系引入矩阵的定义，然后给出矩阵的各种运算和分块法，最后通过高斯消元法解线性方程组引入矩阵初等变换的概念，并利用矩阵的初等变换解线性方程组、求可逆阵的逆矩阵以及解矩阵方程，在求解线性方程组的同时给出了线性方程组的解的讨论.

第二章结合行列式和矩阵的初等变换，给出矩阵可逆的充分必要条件、求逆公式，以及克莱默法则.

第三章讨论向量组的线性相关性，引进向量组的秩和矩阵的秩的概念，给出两者之间的联系和求秩的方法，并利用矩阵的秩的概念完善对线性方程组的解的讨论.

二、难度降低，帮助理解

在第三章中，本书重点关注向量组的线性相关性、向量组的秩以及矩阵的秩的有关概念，通过概念和线性方程组的解来讨论有关问题，降低了关于矩阵的秩的应用难度.

因为向量的内积与正交性、特征值与特征向量、矩阵的相似对角化等内容不仅可以看成独立的内容体系，也可作为二次型的预备知识，所以本书将它们单独作为第四章，有助于学生学习.

书中将一些理论性较强的定理的证明用 * 号标出，以示区别，便于选读. 如第二章中关于排列、对换的定理的证明以及关于行列式按行(列)展开的定理的证明.

三、习题丰富，题型多样

每小节和每章结束时均设置练习题，每小节后的习题与该小节内容匹配，用以帮助理解和巩固基本知识；每章的测试题在题型上更为多样，且难度高于每小节的习题，用于帮助学生提高.

本书将部分考研真题编入测试题中，可供学有余力的学生选做.

四、归纳总结，提升素养

设置章总结，并通过微课视频的形式呈现，总结的内容包括本章的基本要求、重点和难点、基本题型和综合例题等，帮助学生系统性地归纳该章所学重点. 设置拓展阅读栏目，在增强趣味性的同时让学生能够了解学科背景.

本书第一章到第三章由同济大学濮燕敏编写，第四章、第五章由同济大学殷俊峰编写，并由濮燕敏统稿. 中央民族大学李成岳和南京理工大学侯传志对书稿进行了审查，提出了很多可行的修改意见，在此表示感谢.

编　者

2016 年 4 月

目 录

第一章　线性方程组与矩阵

第一节　矩阵的概念及运算

[课前导读]

线性方程组的求解是线性代数要研究的重要问题之一，而矩阵是求解线性方程组的核心工具. 另一方面，矩阵理论在自然科学、工程技术、经济管理等领域中有着广泛的应用，是一些实际问题得以解决的基本工具. 这一节我们通过线性方程组和矩阵的关系引出矩阵的定义，并给出矩阵的运算及运算性质. 在正式学习矩阵之前，需要读者了解线性方程组的相关知识.

一、矩阵的定义

由 m 个方程 n 个未知量 x_1，x_2，…，x_n 构成的线性(即：一次)方程组可以表示为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \tag{1-1}$$

在线性方程组中，未知量用什么字母表示无关紧要，重要的是方程组中未知量的个数以及未知量的系数和常数项. 也就是说，线性方程组(1-1)由常数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 和 $b_i(i=1,2,\cdots,m)$ 完全确定，所以可以用一个 $m\times(n+1)$ 个数排成的 m 行 $n+1$ 列的数表

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

来表示线性方程组(1-1). 这个数表的第 $j(j=1,2,\cdots,n)$ 列表示未知量 $x_j(j=1,2,\cdots,n)$ 前的系数，第 $i(i=1,2,\cdots,m)$ 行表示线性方程组(1-1)中的第 $i(i=1,2,\cdots,m)$ 个方程，这个数表 $\widetilde{A}$ 反映了线性方程组(1-1)的全部信息. 反之，任意给定一个 m 行 $n+1$ 列的数表，可以通过这个数表写出一个线性方程组. 因此，线性方程组与这样的数表之间有了一个对应关系.

定义 1　$m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个 $m\times n$ 矩阵，简记为(a_{ij})，有时为了强调矩阵的行数和列数，也记为$(a_{ij})_{m\times n}$. 数 a_{ij}位于矩阵(a_{ij})的第 i 行第 j 列，称为矩阵的(i, j)元素，其中 i 称为元素 a_{ij}的行标，j 称为元素 a_{ij}的列标.

一般地，常用英文大写字母 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，…或字母 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$，…表示矩阵，如 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$，$\boldsymbol{A}_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}_{m\times n}$等.

元素是实数的矩阵称为实矩阵，元素是复数的矩阵称为复矩阵. 本书中的矩阵除特别指明外，都是指实矩阵.

1×1 的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a)$就记为 $\boldsymbol{A}=a$.

$1\times n$ 的矩阵

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

称为行矩阵，也称为 n 维行向量.

$n\times 1$ 的矩阵

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

称为列矩阵，也称为 n 维列向量.

所有元素都是零的 $m\times n$ 矩阵称为零矩阵，记为 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$，或简记为 $\boldsymbol{O}$.

$n\times n$ 矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为 n 阶方阵. 元素 $a_{ii}(i=1, 2, \cdots, n)$所在的位置称为 n 阶方阵的主对角线.

一个 n 阶方阵主对角线上方的元素全为零，即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

称该 n 阶方阵为下三角矩阵. 下三角矩阵的元素特点是：当 $i<j$ 时，$a_{ij}=0$.

类似地，有上三角矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

上三角矩阵的元素特点是：当 $i>j$ 时，$a_{ij}=0$.

n 阶方阵

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

称为 n 阶对角矩阵，简称对角阵，记为 $\boldsymbol{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

如果 n 阶对角矩阵 $\boldsymbol{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 对角线上的元素全相等，即 $a_1=a_2=\cdots=a_n$，则称其为数量矩阵. 当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=1$ 时，这个数量矩阵就称为 n 阶单位矩阵，简称为单位阵，记为 $\boldsymbol{E}_n$ 或 $\boldsymbol{E}$，即

$$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

定义 2　两个矩阵的行数相等、列数也相等，则称这两个矩阵为同型矩阵. 如果两个同型矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 中所有对应位置的元素都相等，即 $a_{ij}=b_{ij}$，其中 $i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots, n$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相等，记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

二、矩阵的线性运算

1. 矩阵的加法

定义 3　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 是两个同型矩阵，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，规定

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

同型矩阵的加法就是两个矩阵对应位置上元素的加法，由此易知矩阵的加法满足如下的运算规律：设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 是任意三个 $m\times n$ 矩阵，则

（1）交换律：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

（2）结合律：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；

（3）$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}_{m\times n}=\boldsymbol{O}_{m\times n}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$.

对于矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，称矩阵 $(-a_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵，记为 $-\boldsymbol{A}$. 显然，$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}_{m\times n}$. 由此可以定义矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 的减法为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}.$$

2. 矩阵的数乘

定义 4　用一个数 k 乘矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的所有元素得到的矩阵 $(ka_{ij})_{m\times n}$ 称为矩阵的数乘，记为 $k\boldsymbol{A}$ 或者 $\boldsymbol{A}k$，即 $k\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}k=(ka_{ij})_{m\times n}$.

如果 k，l 是任意两个数，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是任意两个 $m\times n$ 矩阵，则矩阵的数乘运算满足：

(1) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$；

(2) $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$；

(3) $(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})=l(k\boldsymbol{A})$；

(4) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$；

(5) $(-1)\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}$；

(6) $0\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}_{m\times n}$.

矩阵的加法和矩阵的数乘统称为矩阵的线性运算.

例 1 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&2\\1&3&4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&2&3\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 和 $2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$.

解 $$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&0&2\\1&3&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-1&0+2&2+1\\1+0&3+2&4+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&5&7\end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned}2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}&=2\begin{pmatrix}3&0&2\\1&3&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times2&0\times2&2\times2\\1\times2&3\times2&4\times2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&2&3\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}6+1&0-2&4-1\\2-0&6-2&8-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-2&3\\2&4&5\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

三、矩阵的乘法

定义 5 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是一个 $m\times p$ 矩阵，矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是一个 $p\times n$ 矩阵，定义矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$，其中矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$ 的第 i 行第 j 列元素 c_{ij} 是由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行元素 a_{i1}，a_{i2}，…，a_{ip} 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列相应元素 b_{1j}，b_{2j}，…，b_{pj} 乘积之和，即

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}. \tag{1-2}$$

必须注意：只有当第一个矩阵（左边的矩阵）的列数与第二个矩阵（右边的矩阵）的行数相等时，两个矩阵才能相乘.

例 2 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-1&1\\2&2&0\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&1&1\\2&1&-1\end{pmatrix}$ 的乘积 $\boldsymbol{AB}$.

解 因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 2×3 矩阵，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是 3×3 矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可以相乘，乘积 $\boldsymbol{AB}$ 是一个 2×3 矩阵. 按公式(1-2)有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB}&=\begin{pmatrix}3&-1&1\\2&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&1&1\\2&1&-1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}3\times1+(-1)\times1+1\times2&3\times(-1)+(-1)\times1+1\times1&3\times0+(-1)\times1+1\times(-1)\\2\times1+2\times1+0\times2&2\times(-1)+2\times1+0\times1&2\times0+2\times1+0\times(-1)\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}4&-3&-2\\4&0&2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

例 3 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -6 & -3\end{pmatrix}$ 的乘积 $\boldsymbol{AB}$ 及 $\boldsymbol{BA}$.

解 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -6 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & -4\\ 16 & 8\end{pmatrix}$；$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -6 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

在例 2 中，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 2×3 矩阵，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是 3×3 矩阵，所以乘积 $\boldsymbol{AB}$ 有意义，而矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 却不能相乘. 在例 3 中，虽然乘积 $\boldsymbol{AB}$ 与乘积 $\boldsymbol{BA}$ 都有意义，但是 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$. 在例 3 中还看到，尽管 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，仍旧有 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{O}$. 所以在做矩阵乘法时，我们要注意：

(1) 矩阵乘法不满足交换律，即在一般情况下，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$；

(2) 尽管矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，但是得不出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 的结论.

但是，矩阵乘法仍满足下列运算规律(假设运算都是可行的)：

(1) 结合律：$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$；

(2) 矩阵乘法对矩阵加法的分配律：$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$；

(3) $(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})=k(\boldsymbol{AB})$；

(4) $\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{A}_{m\times n}$；

(5) $\boldsymbol{O}_{m\times s}\boldsymbol{A}_{s\times n}=\boldsymbol{O}_{m\times n}$；$\boldsymbol{A}_{m\times s}\boldsymbol{O}_{s\times n}=\boldsymbol{O}_{m\times n}$.

证明 这几个运算律的证明都是验证式的证明，在此我们只写出结合律的证明，而将其余证明留给读者.

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是一个 $m\times s$ 矩阵，矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是一个 $s\times p$ 矩阵，矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$ 是一个 $p\times n$ 矩阵. 由矩阵乘法的定义知，矩阵 $(\boldsymbol{A}_{m\times s}\boldsymbol{B}_{s\times p})\boldsymbol{C}_{p\times n}$ 与 $\boldsymbol{A}_{m\times s}(\boldsymbol{B}_{s\times p}\boldsymbol{C}_{p\times n})$ 都有意义，且都是 $m\times n$ 矩阵. 由矩阵相等的定义，我们只需验证这两个矩阵在相应位置的元素相等即可.

矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times s}\boldsymbol{B}_{s\times p}$ 中第 i 行元素为 $\sum\limits_{k=1}^{s}a_{ik}b_{k1}$，$\sum\limits_{k=1}^{s}a_{ik}b_{k2}$，$\cdots$，$\sum\limits_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kp}$，于是矩阵 $(\boldsymbol{A}_{m\times s}\boldsymbol{B}_{s\times p})\boldsymbol{C}_{p\times n}$ 中 (i,j) 元素为矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times s}\boldsymbol{B}_{s\times p}$ 中第 i 行元素与矩阵 $\boldsymbol{C}_{p\times n}$ 中第 j 列对应元素 c_{1j}，c_{2j}，$\cdots$，c_{pj} 乘积之和，即

$$\Big(\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{k1}\Big)c_{1j}+\Big(\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{k2}\Big)c_{2j}+\cdots+\Big(\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kp}\Big)c_{pj}=\sum_{t=1}^{p}\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kt}c_{tj}.$$

同理可以验证矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times s}(\boldsymbol{B}_{s\times p}\boldsymbol{C}_{p\times n})$ 中 (i,j) 元素也是 $\sum\limits_{t=1}^{p}\sum\limits_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kt}c_{tj}$，所以矩阵乘法的结合律成立.

例 4 设有线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m.\end{cases}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$ 称为该线性方程组的系数矩阵. 令 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$，按公式(1-2)有

$$Ax=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

再根据矩阵相等的定义，该线性方程组可以用矩阵形式来表示：$Ax=\beta$.

由于矩阵乘法满足结合律，我们可以定义方阵的方幂如下：

$$A^k=\underbrace{AA\cdots A}_{k个}（这里 k 为正整数）.$$

并且规定：对非零方阵 A，有 $A^0=E$.

方阵的方幂满足以下运算规律（这里 k，l 均为非负整数）：

$$A^kA^l=A^{k+l}；\ (A^k)^l=A^{kl}.$$

由于矩阵乘法不满足交换律，一般来讲 $(AB)^k\neq A^kB^k$，$(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2$. 只有当 A 与 B 可交换（即 $AB=BA$）时，公式

$$(AB)^k=A^kB^k,\ (A+B)^2=A^2+2AB+B^2,\ (A+B)(A-B)=A^2-B^2$$

等才成立.

例 5　设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，求 A^2 和 A^3.

解　$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

四、矩阵的转置

定义 6　设 $m\times n$ 矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，把矩阵 A 的行换成同序数的列，得到的 $n\times m$ 矩阵称为矩阵 A 的转置矩阵，记为 A^{T}，即

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

矩阵的转置满足下面的运算规律（这里 k 为常数，A 与 B 为同型矩阵）：

(1) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$；

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

(3) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;

(4) $(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

证明　这些性质的证明仍属验证式的证明，可仿照矩阵乘法性质的证明，留给读者自己验证.

例 6　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$，求$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}$.

解法一

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix},$$

所以$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

解法二

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

定义 7　n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 如果满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵，如果满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵.

由定义可知，如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是对称矩阵，则 $a_{ij}=a_{ji}(i\neq j;\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$. 如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是反对称矩阵，则 $a_{ij}=-a_{ji}(i\neq j;\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，且 $a_{ii}=0(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$.

例 7　设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，证明：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 都是对称矩阵.

证明　因为

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A},\ (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},$$

所以 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 都是对称矩阵.

习题 1-1

1. 设 $\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3 & -1 & 3\\ 1 & -1 & 1 & 4 & 5\end{pmatrix}$，写出 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 为增广矩阵的线性方程组.

2. 设等式$\begin{pmatrix}1 & 2\\ a & b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x & y\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 7 & 1\end{pmatrix}$成立，求 a，b，x，y.

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 5 & 1\\ -2 & -1 & 0\end{pmatrix}$，计算

(1) $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$，$3\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$;　　　(2) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$.

4. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}$，求$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})$.

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 5\\ 0 & 5 & 2\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}$.

6. 计算下列各题：

（1）$\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}(3,\ -2,\ 1)$；　（2）$(2,\ 3,\ 1)\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$；

（3）$(x,\ y,\ z)\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$；　（4）$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^n$.

7. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，求所有与 $\boldsymbol{A}$ 可交换的矩阵.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，证明 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{A}$ 是反对称矩阵.

9. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

第二节　分块矩阵

[课前导读]

当矩阵的行数和列数较高时，为了证明或计算的方便，常把矩阵分成若干小块，把每个小块当作“数”来处理，这便是矩阵的分块. 这一节我们将讨论矩阵的分块方式和分块矩阵的计算. 在学习这一节之前，需要读者熟练掌握矩阵的线性运算、矩阵乘法和矩阵的转置运算.

一、分块矩阵的概念

对于行数和列数较高的矩阵 $\boldsymbol{A}$，运算时常用一些横线和竖线将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分划成若干个小矩阵，每一个小矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的子块，以子块为元素的形式上的矩阵称为分块矩阵. 一个矩阵的分块方式会有很多种，例如，将 4×5 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45}\end{pmatrix}$$

划分成如下三种形式:

$$(1)\ \boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{array}\right);\ (2)\ \boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc|cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{array}\right);$$

$$(3)\ \boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{array}\right).$$

按(1)的分块，我们可以记为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{A}_{11}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_{12}=\begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_{21}=\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_{22}=\begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix}.$$

按(2)的分块，我们可以记为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{13} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \boldsymbol{A}_{23} \\ \boldsymbol{A}_{31} & \boldsymbol{A}_{32} & \boldsymbol{A}_{33} \end{pmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{A}_{11}=(a_{11},\ a_{12}),\ \boldsymbol{A}_{12}=(a_{13},\ a_{14}),\ \boldsymbol{A}_{13}=a_{15},$$

$$\boldsymbol{A}_{21}=\begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_{22}=\begin{pmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{33} & a_{34} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_{23}=\begin{pmatrix} a_{25} \\ a_{35} \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_{31}=(a_{41},\ a_{42}),\ \boldsymbol{A}_{32}=(a_{43},\ a_{44}),\ \boldsymbol{A}_{33}=a_{45}.$$

按(3)的分块，我们可以记为

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{11},\ \boldsymbol{A}_{12},\ \boldsymbol{A}_{13},\ \boldsymbol{A}_{14},\ \boldsymbol{A}_{15}),$$

其中

$$\boldsymbol{A}_{11}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_{12}=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_{13}=\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ a_{43} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_{14}=\begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \\ a_{44} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_{15}=\begin{pmatrix} a_{15} \\ a_{25} \\ a_{35} \\ a_{45} \end{pmatrix}.$$

第三种分块方式称为矩阵的按列分块. 类似地，也有矩阵的按行分块，分块矩阵请读者写出.

对于线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m,\end{cases}$$

其系数矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

按列分块可写成

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n),$$

其中，$\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{pmatrix}$表示 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列. 记$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$，则该线性方程组的增广矩阵

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&b_2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}&b_m\end{pmatrix}$$

按分块矩阵的记法，可记为

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{\beta}),\ \text{或}\ \widetilde{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{\beta})=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n,\ \boldsymbol{\beta}).$$

二、分块矩阵的运算

分块矩阵的运算规则与普通矩阵的运算规则相类似，不同的计算方式，分块的原则不同，下面分情况讨论.

(1) 分块矩阵加(减)运算：设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，对两个矩阵的行和列采用相同的分块方式，不妨设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}&\cdots&\boldsymbol{A}_{1t}\\\boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}&\cdots&\boldsymbol{A}_{2t}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\boldsymbol{A}_{s1}&\boldsymbol{A}_{s2}&\cdots&\boldsymbol{A}_{st}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11}&\boldsymbol{B}_{12}&\cdots&\boldsymbol{B}_{1t}\\\boldsymbol{B}_{21}&\boldsymbol{B}_{22}&\cdots&\boldsymbol{B}_{2t}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\boldsymbol{B}_{s1}&\boldsymbol{B}_{s2}&\cdots&\boldsymbol{B}_{st}\end{pmatrix},$$

其中 A_{ij}和 B_{ij}的行数相同、列数相同，则有

$$\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}\pm\boldsymbol{B}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}\pm\boldsymbol{B}_{12}&\cdots&\boldsymbol{A}_{1t}\pm\boldsymbol{B}_{1t}\\\boldsymbol{A}_{21}\pm\boldsymbol{B}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}\pm\boldsymbol{B}_{22}&\cdots&\boldsymbol{A}_{2t}\pm\boldsymbol{B}_{2t}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\boldsymbol{A}_{s1}\pm\boldsymbol{B}_{s1}&\boldsymbol{A}_{s2}\pm\boldsymbol{B}_{s2}&\cdots&\boldsymbol{A}_{st}\pm\boldsymbol{B}_{st}\end{pmatrix}.$$