

计算流体力学 在桥梁风工程中的 应用研究

黄 林 / 著

策划编辑 王小龙

责任编辑 杨 勇

封面设计  H.C. CULTURE

计算流体力学 在桥梁风工程中的

应用研究

JS

Jisuan Liuti Lixue
Zai Qiaoliang Feng Gongcheng zhong de
Yingyong Yanjiu



交大e出版
微信购书|数字资源



官方天猫店
上天猫 买正版

ISBN 978-7-5643-5241-



9 787564 352417 >

定价: 54.00元

计算流体力学 在桥梁风工程中的 应用研究

黄 林 / 著

图书在版编目 (C I P) 数据

计算流体力学在桥梁风工程中的应用研究 / 黄林著.
—成都: 西南交通大学出版社, 2017.5
ISBN 978-7-5643-5241-7

I. ①计… II. ①黄… III. ①计算流体力学—应用—
桥梁工程—防风—研究 IV. ①U442.5②O35

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 007409 号

计算流体力学在桥梁风工程中的应用研究

黄 林 著

责任编辑	杨 勇
封面设计	墨创文化
	西南交通大学出版社
出版发行	(四川省成都市二环路北一段 111 号 西南交通大学创新大厦 21 楼)
发行部电话	028-87600564 028-87600533
邮 政 编 码	610031
网 址	http://www.xnjdcbs.com
印 刷	四川森林印务有限责任公司
成品尺寸	185 mm × 260 mm
印 张	13.5
字 数	257 千
版 次	2017 年 5 月第 1 版
印 次	2017 年 5 月第 1 次
书 号	ISBN 978-7-5643-5241-7
定 价	54.00 元

图书如有印装质量问题 本社负责退换

版权所有 盗版必究 举报电话: 028-87600562

前言

这是一本为初学者编写的计算流体力学(Computational Fluid Dynamics, CFD)在桥梁风工程应用研究方面的书籍。如果你准备应用 CFD 进行桥梁风工程应用研究,但对 CFD 仅有一些初步了解,那么这本书就是为你所写。本书假设你在阅读此书前对桥梁风工程有一定了解。

本书是作者根据近年来将 CFD 应用到桥梁风工程的研究经历,为初学者撰写的一本易于理解 CFD 基本原理且又实用的专用书籍,以帮助初学者尽快在桥梁风工程领域开展研究。目前,CFD 已被应用到桥梁风工程领域,但对大多数研究者来说还是一门比较深奥的学科。要将 CFD 成功应用到桥梁风工程领域,需要很好地解决 CFD 与桥梁风工程的学科交叉问题。本书将让你在全面了解 CFD 的基本原理和思路的基础上开启研究之路。为便于读者的学习,作者根据多年的研究实践,对 CFD 的内容进行了艰难的挑选和组织,避免了复杂方法的介绍。本书给出了对 CFD 整体的介绍,希望读者通过自己的研读和实践能逐步变成一个了解 CFD 的专业人士,而不是对 CFD 敬而远之。本书的桥梁风工程应用研究案例内容来源于作者多年来的研究实践。

本书共包含 6 章。第 1 章为绪论,简要介绍了 CFD 诞生的基本历程、CFD 在桥梁风工程中的基本应用和本书的主要研究内容。第 2 章介绍 CFD 的基本理论。详细讨论了流体力学的基本方程,并对边界条件进行了适当介绍。对于 CFD 应用研究者,对这些基本物理方程的充分理解和接受是十分重要的。它们是 CFD 应用研究的基础。作者对充分理解和重视这些方程的重要性颇有感触。不同学习背景的读者,对流体控制方程的理解程度差别较大。对于土木工程专业出身的工科学子,通过本书的学习将很高兴地有机会充分掌握这些方程,而对于已经有充分了解的读者,也将愿意对这些方程有一个综合而清晰的回顾,揭示出各种不同形式控制方程的奥妙。一个出色的计算流体力学研究者首先必须是一个优秀的流体力学研究者。第 3 章介绍流动现象。本章主要通过对相关偏微分方程的分析,从宏观上建立流动现象与偏微分方程间的内在联系。读者通过本章的阅读,将能从宏观上对主要的流动现象有所掌握,对自己将要研究的内容做出比较明确的判断。第 4 章介绍流体力学的基本数值方法,包括有限差分法和有限体积法。有限差分

法是理解有限体积法的基础,只有深入理解有限差分法后才能真正明白有限体积法的内涵。有限体积法是目前 CFD 商业软件普遍采用的计算方法。通过本章的学习,读者将能掌握常见的计算方法,有助于独立开展 CFD 应用研究。第 5 章介绍湍流模拟。本章主要介绍不可压缩流条件下的湍流的数值模拟方法,包括常用 RNG $k-\varepsilon$ 和 SST $k-\omega$ 湍流模型等,壁面处理等方面的内容。读者通过本章的学习将能建立起基本的湍流模拟概念,便于准确模拟实际桥梁风工程中的湍流问题。第 6 章介绍 CFD 在桥梁风工程领域中的应用研究。本章以桥梁颤振导数理论为基础,介绍了作者提出的计算桥梁颤振导数的流场分区方法,并以此为基础介绍了基于 CFD 方法的桥梁颤振导数识别计算及大振幅条件下平板气动自激力的非线性研究等相关问题。CFD 数值模拟计算结果与理论值及风洞试验结果有很好的一致性。书中相关的计算实例均为作者近年研究所采用的实例。这部分内容将有助于读者开启 CFD 应用研究的大门。

作者特别感谢西南交通大学土木工程学院的廖海黎教授。廖海黎教授十余年来的教诲、鼓励与帮助,使得作者能够顺利完成博士学位并在后续的研究中持续不断地开展 CFD 在桥梁风工程领域的应用研究。本书是对作者多年来的研究成果的总结。作者也要感谢香港理工大学的徐幼麟教授。感谢徐幼麟教授对作者在 2011 年作为访问学者到香港理工大学工作提供的帮助,及对作者完成平板大振幅条件下的气动自激力非线性研究方面提供的指导与帮助。感谢西南交通大学土木工程学院国家杰出青年基金获得者李永乐教授在研究过程中的支持与帮助。

作者也要感谢 CFD 领域的所有同事,感谢他们与我进行的印象深刻的讨论。感谢我的家人多年来给予的支持与理解。

我衷心希望读者能够快乐地学习本书并成功应用本书的知识解决你们遇到的桥梁工程实际抗风难题,为你们扫除前进道路上的障碍。

由于作者水平有限和时间仓促,书中不可避免地存在一些失误和不足之处,恳请有识之士不吝批评指正。

黄 林

西华大学土木建筑与环境学院

2016 年 10 月

目 录

第 1 章 绪 论	001
1.1 计算流体力学简介	001
1.2 计算流体力学在桥梁风工程中的应用介绍	003
1.3 主要研究内容	005
第 2 章 计算流体力学的基本原理	006
2.1 流动模型	006
2.2 物质导数	007
2.3 速度散度	010
2.4 连续方程	012
2.5 动量方程	018
2.6 能量方程	024
2.7 边界条件	029
第 3 章 流动现象	032
3.1 简化偏微分方程	033
3.2 信息依赖域	034
3.3 偏微分方程的类型	035
3.4 不同偏微分方程的一般性质	044
第 4 章 计算流体力学的基本数值方法	052
4.1 有限差分法	052
4.2 有限体积法	062
第 5 章 湍流模拟	110
5.1 不可压缩 N-S 方程	110
5.2 湍流模拟	112

5.3	基于湍流黏性假设的湍流模型	118
5.4	近壁面处理	128
5.5	出入口边界条件	137
第 6 章	计算流体力学在桥梁风工程中的应用	139
6.1	桥梁颤振导数理论	139
6.2	桥梁颤振导数数值模拟方法	144
6.3	平板颤振导数计算	159
6.4	大跨度桥梁主梁颤振导数数值模拟	163
6.5	大振幅条件下桥梁主梁气动自激力非线性数值模拟	172
6.6	结 语	197
参考文献		199

第1章 绪论

1.1 计算流体力学简介

计算流体力学 (Computational Fluid Dynamics, CFD) 通过对流体流动和热传导等相关物理现象进行计算机数值模拟分析, 再采用图像显示技术展示分析计算结果。CFD 的发展与计算机技术和数值计算方法的发展密切相关, 是一门利用数值计算技术发现各种流动现象规律的学科。在工程设计中, 首先建立数学模型, 然后从数值模拟计算中获取数据。CFD 综合了流体力学、计算数学、计算机科学、科学可视化等多种学科。广义的 CFD 包含计算水动力学、计算空气动力学、计算燃烧学、计算传热学、计算化学反应流动及数值天气预报等。本书仅涉及计算空气动力学。

CFD 的发展历史可以追溯到 20 世纪 50 年代。Kopal 可能是最早开展 CFD 研究的人员之一。他在 1947 年利用数值方法在早期的计算机上求解了 Taylor-Maccoll 方程^[1]。然而, 真正的 CFD 的诞生应在 20 世纪 50 年代。20 世纪 50 年代到 60 年代早期, 由于航空领域遭遇高温、高速再入大气层物体的研究难题, 试验方法无法对该问题进行模拟, 理论上又找不到解析解, 与此同时高速计算机出现了。因此, 采用高速计算机获取控制方程的数值解就变得十分迫切而又可能。这一时期, Fay 和 Riddell^[2]、Blottner^[3,4]对边界层进行了深入研究, Hall 等^[5]对无黏流进行了深入研究。他们可谓 CFD 数值计算的先驱者。随着 CFD 数值计算法的逐步完善, 及计算机技术的快速发展, CFD 逐渐在流体-动力问题方面崭露头角。典型的案例如确定超声速或高超声速运动的钝头体周围的流场问题, 如图 1-1 所示。这种钝头体相比于尖头体的优势在于可以明显降低气动加热, 比如我国神舟十号飞船的返回舱的头部采用的就是钝头体。现在采用 CFD 数值模拟可以得到图 1-1 所示的绕流流场。可以看到, 在钝头体的前面有一个弯曲的弓形强激波, 激波和头部的距离₆称为激波脱离体距离。在这个问题中, 混合有亚声速流动、超声速流动、黏性流动。由于存在分离、回流, 黏性流动不能用边界层近似。在 20 世纪 50 年代和 60 年代, 科学家们花费了几百万美元都没能解决的难题, 甚至一些顶尖的空气动力学家在这个问题上都束手无策, 然而, 采用 CFD 方法解决这个问题却变得非常简单, 图 1-1 就是采用 CFD 方法计算得到的示意图。

为何这个问题对于空气动力学家而言如此困难？这需要从超声速钝体的稳态绕流进行分析。从图 1-1 的流场示意图可以看到，在钝头体的头部附近、激波后面存在亚声速流动区域，即弓形激波、声速线和钝头体头部包围的区域。如果假设流动是无黏的，即忽略黏性和热传导的耗散运输过程，则流动控制方程就是欧拉方程组。该控制方程组显示出椭圆型微分方程的性质。然而，在声速线的下游区域，则存在稳态超声速区域。其控制方程组又表现出双曲型偏微分方程的性质。这样，控制方程的数学性质从亚声速的椭圆型变成了超声速的双曲型，使得同时对两个不同性质的区域进行相同的数学分析是不可能的。也就是说，在亚声速区域有效的数值方法不适于超声速区域，同样，超声速区域的数值方法用于亚声速区域也失效了。于是，研究者对亚声速区域和超声速区域分别发展了相应的计算方法。但是，要将这些方法组合起来去解决声速线两侧的跨声速区域的问题，却是难于登天。正是这个原因，使得在 20 世纪 60 年代中期之前，空气动力学家们对钝头体的绕流问题都束手无策。

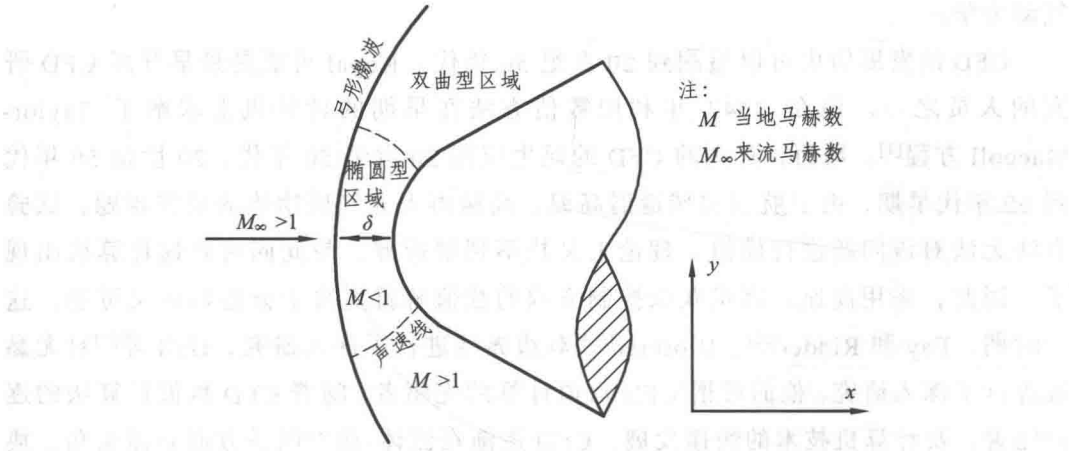


图 1-1 超声速钝头体绕流流场示意图

然而，在 1966 年，Moretti 和 Abbett^[6]采用当时已经发展起来的 CFD，使用定常流的时间相关算法的概念，获得了超声速钝头体绕流问题的有限差分数值解。这是该问题的第一个实用的、直接的工程解法。从那以后，钝头体绕流问题就不再是问题了。这一难题的解决给现代流体力学带来了革命性的变化，可谓 CFD 在流场计算应用方面的里程碑。因此，CFD 是以解决理论流体力学和实验流体力学无法解决的问题为使命而诞生的。

计算机的高速发展，尤其是计算机的内存容量和运算速度的提高，为 CFD 计算费用的降低创造了良好的条件。据 Chapman^[7]的调查研究，从 1953 年到 1985 年间，CFD 的计算费用约每 8 年降低一个数量级。这使得 CFD 相对于风洞试验在

费用方面逐步具有较大优势。一个典型的例子是 20 世纪 70 年代 NASA 设计了一种称为 HiMAT (高机动性飞行器技术) 的实验飞行器, 用于验证下一代战斗机中高机动性的概念。初步的风洞试验表明, 飞行器在速度接近声速时将产生令人无法接受的空气阻力。若进一步通过风洞试验重新设计 HiMAT, 将耗费 150 000 美元左右, 但采用 CFD 进行重新设计则仅花费 6 000 美元^[8]。现代计算机的水平已远超 20 世纪 70 年代的水平, CFD 的计算效率也得到了飞跃。现在, 采用一台普通计算机就可以进行复杂的工业设计。CFD 对于工业产品的初步设计是非常有效的, 已得到广泛认识。但是对于产品的最终定型还有待风洞试验的验证。这种局面短期内不可能改变。近年来出现的向量处理器和并行处理器将为 CFD 的发展提供又一大上升平台。

1.2 计算流体力学在桥梁风工程中的应用介绍

20 世纪 90 年代初, 计算流体力学 (CFD) 技术被引入桥梁风工程领域。1993 年丹麦桥梁风工程专家 Larsen 的学生 Walther^[9,10]首次利用计算流体力学中的离散涡方法 (DVM) 计算出了平板的颤振导数, 并进而计算出了二维颤振临界风速, 迈出了“桥梁数值风洞”的第一步。随后, Larsen 和 Walther^[11,12]以丹麦大海带桥的建设为工程背景, 对流线型箱梁桥的颤振进行了数值模拟。其后, 世界各国纷纷效仿, 并努力在计算方法上进行改进。日本的 Kuroda^[13]较早采用有限差分法研究扁平箱梁的绕流流场和气动力。美国的 Selvam 等^[14]基于有限元和大涡模拟 (LES) 研究箱梁的气动力。意大利的 Vairo^[15]基于有限体积法和 RNG $k-\varepsilon$ 湍流模型计算箱梁桥的颤振导数。国内较早开展 CFD 在桥梁风工程领域中的应用研究的有同济大学的曹丰产博士^[16,17]和周志勇博士^[18]、湖南大学的祝志文博士^[19-21]等先后采用有限差分法、有限元法、离散涡方法、有限体积法等对理想平板、箱型梁桥的颤振导数及颤振临界风速进行了研究。其中, 祝志文博士采用计算网格与计算模型作同步简谐强迫振动的方式进行流场计算, 再采用 Projection-2 方法进行解耦。黄林等^[22-24]依据 Batina 的动网格理论, 提出流场分区方法, 对计算模型施加单频、多频简谐强迫振动, 基于有限体积法和 RNG $k-\varepsilon$ 湍流模型, 对理想平板和流线型箱型梁桥的颤振导数进行了识别研究, 获得了与理论值、风洞试验结果比较一致的结果。近年来, CFD 也已应用于桥梁抖振研究。丹麦的 Rasmussen 等^[25]和 Hejlesen 等^[26]采用随机合成的湍流流场结合无网格涡方法研究了来流湍流对桥梁断面的作用。德国的 Chawdhury 和 Guido^[27]采用涡粒子方法 (Vortex Particle Methods) 模拟研究了尾流抖振。西南交通大学的唐煜等^[28]基于有限体积法和 SST $k-\omega$ 湍流模型, 通过给定单一频率的竖向谐波速度分量, 对理想平板和箱型桥梁断面的气动

导纳进行了识别研究。在驰振研究方面,基本上基于 Den Hartog 的驰振准则,通过数值模拟计算 H 吊杆的阻力系数和升力系数进行研究或利用 Parkinson 的驰振理论进行研究,如 Keerthana 和 Harikrishna^[29]、朱超和廖海黎^[30]等。在涡激振动方面,主要采用 CFD 计算 Strouhal 数、涡激振动的最大振幅和锁定风速区间等,如詹昊等^[31]的研究。

CFD 在桥梁风工程相关的复杂系统的气动力特性方面也已开展了大量研究,如车-桥系统的气动力特性研究^[22,32,33]、改善桥梁抗风性能的防风措施的研究^[34,35]等。黄林等^[22,32]基于有限体积法、多重参考系法和 RNG $k-\varepsilon$ 湍流模型,获得了列车风与横向风共同作用下列车、桥梁系统的稳态气动力特性。汪斌等^[33]采用有限体积法、动网格理论和 SST $k-\omega$ 湍流模型对汽车通过斜拉桥桥塔时汽车的气动力特性进行了研究。列车、汽车在有横向风的情况下通过桥梁时,由于涉及车辆与桥梁的相对运动,存在相互间的气动干扰问题,尤其是车辆底部(包含底部的附属构件)与桥面间的间隙会改变整个车辆的绕流状况,使得这一问题的数值模拟比较困难。Taylor 和 Vezza^[34]利用离散涡方法(DVM)研究了桥面倾斜平板组成的栅栏对人行桥桥面风场的改善效果。Alonso-Estébaneza 等^[35]基于有限体积法和 SST $k-\omega$ 湍流模型,为改善汽车-桥梁系统的气动力,对护栏的优化设计进行了研究。通过在桥梁的适当部位设置合适的绕流装置,从而改变桥梁的气动特性,这在桥梁风洞试验中早已实现;但在 CFD 数值模拟上要对这些细部构件的气动影响进行精确的模拟还需要做更多的研究,尤其在优化布置方面并没有理论支持。

近年来,CFD 在桥梁风工程领域的应用研究已取得了很大的进步,在常规的桥梁抗风的各个方面都可以找到比较成功的应用案例。CFD 数值模拟的精度取决于计算分析模型对实际桥梁抗风问题的近似程度,在越接近实际桥梁抗风问题的模型参数下,计算得到的结果越能反映实际情况。CFD 数值模拟的完善有待钝体空气动力学在数学建模理论上的进一步发展完善。目前,CFD 在桥梁风工程的应用研究仍停留在初步设计选型方面,辅助桥梁的防风设计。虽然自旧 Tacoma 海峡大桥风毁后桥梁的风振理论已有了很大的发展,能够确保新建大跨度桥梁的防风安全,但正如 1990 年 Wyatt 和 Walshe 在纪念旧 Tacoma 海峡大桥风毁 50 周年发表的文章中指出的那样,“流体和结构的相互作用机理仍然不是完全清楚的”。虽然日本的 Matsumoto、丹麦的 Walther 和 Larsen 分别采用风洞试验和离散涡方法观察到了 H 型断面的旋涡脱落过程,从一定程度上揭示了旧 Tacoma 大桥的颤振机理,但没有从根本上揭示为何旧 Tacoma 大桥的风振会从驰振变成颤振。桥梁在大振幅条件下的气动力特性也许有助于这一问题的解决。对此,黄林等^[36,37]基于有限体积法、RNG $k-\varepsilon$ 湍流模型及连续小波变换,利用流场分区方法对大振幅条件下平板的气动自激力非线性问题进行了探讨,获得了一些较好的结果。可以预计:

计算流体力学 (CFD) 将在桥梁的风致振动机理研究方面发挥越来越重要的作用。

1.3 主要研究内容

计算流体力学涉及的理论较多, 但为了更好地应用这些知识解决桥梁风工程面临的各种问题, 有必要对其进行深入的系统学习。作者从工科学习背景的角度, 分别在第 2 到 5 章对计算流体力学的基本理论、流动现象、基本数值方法和湍流模拟等方面进行较详细的介绍, 并以一些简单的数值算例讲解其中涉及的基本概念。在此基础上介绍计算流体力学在桥梁风工程中的具体应用。

计算流体力学可以应用于桥梁风工程各个方面的研究。桥梁主梁的气动自激力研究一直受到风工程研究者的高度关注。第 6 章详细研究了桥梁主梁颤振导数及大振幅条件下平板的气动自激力非线性模拟研究。采用标准壁面函数推导出了通常高雷诺数绕流条件下的贴体网格高度控制公式, 应用该公式可以在绕流计算前就能合理有效地布置绕流计算区域的网格。在此基础上, 将颤振导数计算时的整个计算区域划分为 3 个不同的计算区域, 结合动网格理论, 提出了流场分区方法^[22,23]。该方法较好地解决了既有计算方法可能出现的网格畸变及流场外边界条件难以确定等理论问题。该方法与 RNG $k-\varepsilon$ 湍流模型相结合获得了较好的气动自激力, 实现了桥梁主梁的颤振导数识别。桥梁颤振导数识别采用的是小振幅简谐振动。当桥梁出现大振幅运动时, 比如旧 Tacoma 桥风毁时, 其气动自激力可能出现比较大的变化。因此, 研究大振幅条件下桥梁主梁的自激气动力非线性特征是一项具有重要理论价值的工作。作者在前述流场分区法的基础上, 采用振幅渐近变化的方式, 观察到了大振幅条件下平板的气动自激力的变化规律。再进一步引入连续小波变换, 提取出了平板气动自激力各主要频率成分, 通过分析得到了大振幅条件下气动自激力各频率成分与强迫振动振幅间的非线性关系、高次谐波现象等重要特征^[36,37]。



第 2 章 计算流体力学的基本原理

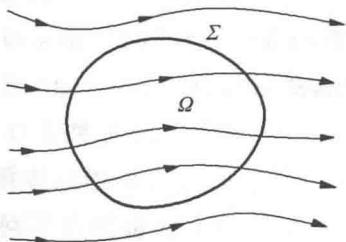
法国和英国的科学家在 17 世纪为实验流体力学奠定了良好的基础。理论流体力学在 18 和 19 世纪的欧洲得到了逐步的发展。在 20 世纪的大部分时间里,流体力学的研究和实践都采用实验流体力学和理论流体力学这两种方法。随着计算机和数值算法的快速发展,计算流体力学(CFD)方法在 20 世纪后期得到了快速发展,成为流体力学研究的第三种方法。该方法是对理论和实验流体方法的有效补充。流体力学未来的发展将是建立在这三种方法之间合理的平衡之上。计算流体力学将有助于解释和说明理论和试验的结果,反之亦然。

计算流体力学是什么?任何流体的流动都是由以下三个基本定律控制的:① 质量守恒定律;② 牛顿第二定律;③ 能量守恒定律。这些基本物理定律可以采用一些基本的积分或微分方程进行描述。计算流体力学就是用离散的代数形式代替这些方程中的积分或导数并求解,从而得到流场参数在(时间和空间)离散点处的数值。

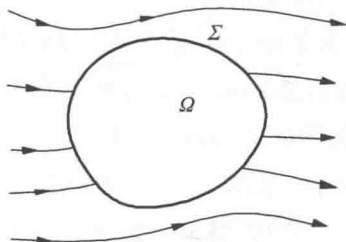
2.1 流动模型

对于连续流体,可以构建有限控制体和无穷小流体微团进行模型化处理^[8],如图 2-1 所示。

第一大类模型称为有限控制体模型,如图 2-1(a)所示。在该模型中,假设在流动区域中划出一个有限的封闭的控制体,定义为 Ω ,相应的封闭曲面定义为 Σ 。在第一大类模型中,又分为两类小模型,即控制体的位置固定和随流体运动两类。

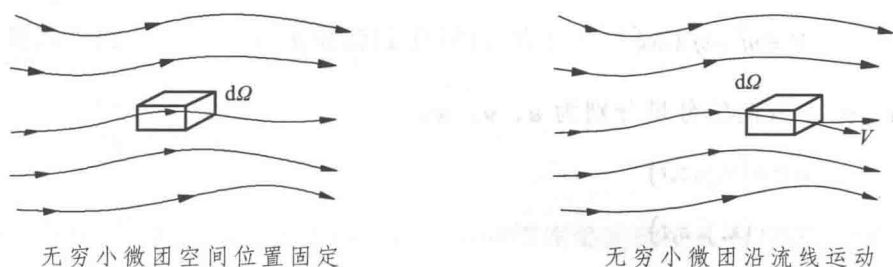


有限控制体空间位置固定



有限控制体随流体运动

(a) 有限控制体模型



(b) 无穷小流体微团模型

图 2-1 流动模型

当控制体固定时, 控制体仅是一个封闭空间, 流体可以流入和流出控制体。当控制体随流体运动时, 控制体内的流体质点不变, 看作整体运动。流体力学的研究就是将物理学的基本原理运用到控制体内的流体上。控制体是有限体积内流体质点的集合, 积分的概念容易应用。因此, 将物理学基本原理运用到有限控制体得到的是积分形式的方程。对于空间位置固定的有限控制体, 得到的积分或偏微分方程称为守恒型控制方程。对于随流体运动的有限控制体, 得到的积分或微分方程称为非守恒型控制方程。

第二大类模型称为无穷小流体微团模型, 如图 2-1 (b) 所示。在该模型中, 假设微团的体积为 $d\Omega$ 。其实, 无穷小流体微团的含义与微积分中的无穷小的含义相同, 但它必须包含大量的流体分子, 可以看作连续介质。在第二大类模型中, 又分为两类小模型, 即流体微团位置固定和沿流线运动两类。流体微团沿流线运动时, 其速度 $\vec{v}$ 等于流线上每一点的当地速度。同样, 流体力学的研究也是将物理学的基本原理运用到流体微团上。当流体微团的空间位置固定时, 得到的积分或偏微分方程称为守恒型方程。对于运动的流体微团, 得到的积分或偏微分方程称为非守恒型方程。

通常采用流体微团空间位置固定的研究方法称为欧拉方法, 而采用跟踪运动的流体微团的研究方法称为拉格朗日方法^[38]。

2.2 物质导数

物质导数 (substantial derivative) ^[1,8,39-41] 定义为运动流体微团的时间变化率。有文献将物质导数称为质点导数^[38]。本书采用物质导数这一术语。假设流体微团在笛卡儿坐标系中运动, 空间位置用 x 、 y 、 z 坐标轴定义, 相应的单位向量分别用 $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 、 $\vec{k}$ 表示, 时间用 t 表示, 则速度向量场 $\vec{v}$ 可表示为

$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \quad (2-1)$$

其中, x 、 y 、 z 方向的分量分别为 u 、 v 、 w 。

$$u = u(x, y, z, t) \quad (2-2)$$

$$v = v(x, y, z, t) \quad (2-3)$$

$$w = w(x, y, z, t) \quad (2-4)$$

同样, 密度场也表示为

$$\rho = \rho(x, y, z, t) \quad (2-5)$$

假设 t_1 时刻流体微团在 1 点 (x_1, y_1, z_1) , 则流体微团的密度为

$$\rho_1 = \rho(x_1, y_1, z_1, t_1) \quad (2-6)$$

流体微团继续沿流线运动, t_2 时刻流体微团运动到 2 点 (x_2, y_2, z_2) , 流体微团的密度变为

$$\rho_2 = \rho(x_2, y_2, z_2, t_2) \quad (2-7)$$

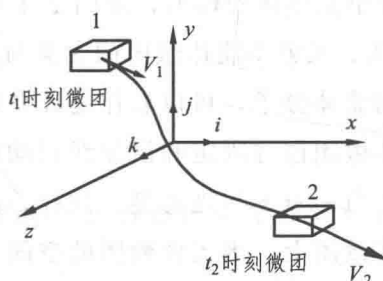


图 2-2 物质导数示意图

现在, 对流体微团的密度 ρ_2 采用泰勒级数 (Taylor) 在 1 点处展开

$$\begin{aligned} \rho_2 = \rho_1 &+ \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_1 (t_2 - t_1) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_1 (x_2 - x_1) + \\ &\left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_1 (y_2 - y_1) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right)_1 (z_2 - z_1) + (\text{高阶项}) \end{aligned} \quad (2-8)$$

将 (2-8) 式除以 $(t_2 - t_1)$, 并忽略高阶项, 得到

$$\frac{\rho_2 - \rho_1}{t_2 - t_1} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_1 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_1 \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_1 \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right)_1 \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} \quad (2-9)$$

应用微分的概念, 当 t_2 无限趋近于 t_1 时, 得到密度的物质导数

$$\frac{D\rho}{Dt} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\rho_2 - \rho_1}{t_2 - t_1} \quad (2-10)$$

物质导数 $\frac{D\rho}{Dt}$ 表示流体微团在空间运动时密度的时间变化率。物质导数不同于偏导数 $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ 。偏导数 $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_1$ 表示流体微团在固定点 1 时密度的时间变化率。

同样, 应用微分的概念, 得到

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \equiv u \quad (2-11)$$

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} \equiv v \quad (2-12)$$

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} \equiv w \quad (2-13)$$

这样, 得到笛卡儿坐标系下物质导数的表达式

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (2-14)$$

定义笛卡儿坐标系下向量算子 $\vec{\nabla}$

$$\vec{\nabla} \equiv \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (2-15)$$

则物质导数 $\frac{D}{Dt}$ 可改写为

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \quad (2-16)$$

其中, 第 1 项 $\frac{\partial}{\partial t}$ 称为当地导数, 表示固定点处的时间变化率; 第 2 项 $(\vec{V} \cdot \vec{\nabla})$ 称为迁移导数, 表示流体微团从流场的一个点运动到另一个点时, 由于流场的空间不均匀性引起的的时间变化率。物质导数可以应用于流场中的任何变量, 如, $\frac{Du}{Dt}$ 、 $\frac{DT}{Dt}$ 、

$\frac{Dp}{Dt}$ 等, p 和 T 分别表示静压和温度。例如