

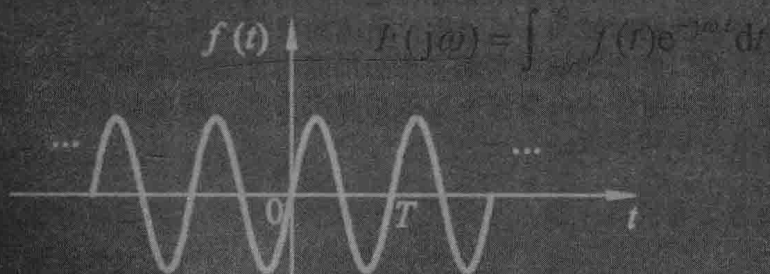
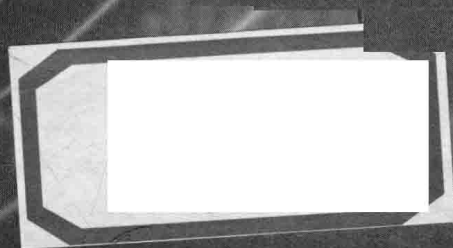


信号与系统

第二版

XINHAO YU XITONG

主编 ● 王颖民 郭爱



信号与系统

第二版

XINHAO YU XITONG

主编 ○ 王颖民 郭爱

电子科技大学出版社

成都工业学院

西南交通大学出版社

四川省成都市二环路北一段111号西南交通大学犀浦校区21楼

邮政编码: 610031 发行部电话: 028-87600264

<http://www.xjtu.edu.cn>

成都理工大学出版社

印张: 15.75 尺寸: 185 mm × 260 mm

印刷:

西南交通大学出版社 成都

成都工业学院 成都 电话: 028-87600264

内 容 简 介

本书系统地论述了信号与线性系统分析的基本理论和方法。全书共分7章，主要内容包括：信号与系统的基本概念，连续时间信号与系统的时域、频域和复频域分析，离散时间信号与系统的时域和 z 域分析，系统的状态空间分析。

第二版在继承原书编写思想的基础上，对全书内容进行了全面修订和完善。

本书可作为高等院校电气信息类专业“信号与系统”课程的教材，也可供相关工程技术人员自学和参考。

图书在版编目(CIP)数据

信号与系统/王颖民, 郭爱主编. —2版. —成都:
西南交通大学出版社, 2017.2
高等教育精品课程教材
ISBN 978-7-5643-5259-2

I. 信… II. ①王… ②郭… III. ①信号系统—高
等学校—教材 IV. TN911.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第022314号

高等教育精品课程教材
信号与系统

(第二版)

王颖民 郭爱 编

*

责任编辑 张华敏

特邀编辑 蒋雨彬 陈正余 杨开春

封面设计 何东琳设计工作室

西南交通大学出版社出版发行

四川省成都市二环路北一段111号西南交通大学创新大厦21楼

邮政编码: 610031 发行部电话: 028-87600564

<http://www.xnjdcbs.com>

成都勤德印务有限公司

*

成品尺寸: 185 mm × 260 mm 印张: 12.75

字数: 320千字

2017年2月第2版. 2017年2月第2次印刷

ISBN 978-7-5643-5259-2

定价: 26.00元

图书如有印装质量问题 本社负责退换

版权所有 盗版必究 举报电话: 028-87600562

第二版前言

《信号与系统》一书自2009年出版以来已经使用了7年。依据高等学校最新的“信号与系统课程教学基本要求”，结合学校各专业对本课程的要求和编者多年来的教学实践经验，同时也依据读者的反馈意见，我们对原书进行了全面修订。

第二版基本保持了第一版原有的框架结构，并根据读者的反馈意见，进一步完善了教材内容，调整和修改了部分例题和习题，并给出了各章习题的参考答案。

本书第1、2、3、4章由王颖民编写，第5、6、7章由郭爱编写。全书由王颖民统稿。

本书中每章的最后一节内容及“本章小结”“本章习题及参考答案”作为数字资源放在西南交通大学出版社的“交大e出版”数字平台上，读者可通过微信扫描二维码的方式获得。

本书的数字资源部分由王颖民、郭爱编写，共计14万字。

在本书的编写修订过程中，编者得到了西南交通大学教材建设研究项目的大力支持，也得到了西南交通大学电气工程学院的关心和支持，在此表示衷心的感谢，同时也特别感谢提出宝贵意见并关心和支持本书的老师和同学们。

由于编者水平所限，书中难免有不妥或错误之处，欢迎读者批评指正。

编者

2016年10月

第一版前言

“信号与系统”是电气工程学科的一门重要的专业基础课程，作为该课程核心的基本概念和方法，几乎应用于所有的电气工程领域，并且也应用于信息及相关领域的全球多个学科、非电类的多个工程技术学科。所以说，“信号与系统”知识的应用非常广泛。“信号与系统”课程以“高等数学”、“线性代数”、“电路分析”等课程为基础，同时又是“自动控制原理”、“数字信号处理”、“通信原理”等专业课程的基础，在教学环节上起着承上启下的重要作用。

本书根据高等学校最新的“信号与系统课程教学基本要求”编写，书中主要论述了信号与系统的概念、理论和分析方法。本书的总体结构是：先连续，后离散；先信号，后系统；先时域，后变换域；先输入输出法，后状态变量法。

全书共分七章，第1章是信号与系统概论，介绍了信号与系统的基本概念以及常用的基本连续时间信号和离散时间信号，重点讨论线性系统和时不变系统的特性；第2章讨论了连续时间系统的时域分析，其中将线性系统的全响应分解为零输入响应和零状态响应，详细分析了冲激响应的计算和卷积积分的求解；第3章介绍了连续时间系统的傅里叶变换，其中详细介绍了常用的基本连续时间信号的傅里叶变换，讨论了傅里叶变换的特性以及傅里叶变换的应用；第4章主要介绍了线性时不变系统的基本分析工具——拉普拉斯变换的定义、性质和应用；第5章和第6章主要介绍了离散时间信号与系统的时域分析和 z 域分析；第7章介绍了状态变量的概念和系统分析的状态变量法。

本书采用清晰、易懂而又严谨的方式进行编写，其中采用了大量的例子来说明基本概念和相应的理论，并提供了一定数量的习题供读者实践练习。由于该课程是一门理论性与应用性并重的课程，因此，在本书中尤其注重计算机仿真软件的使用。本书采用国际公认的优秀科技应用软件之一——MATLAB语言——对信号与系统进行分析 and 实现（MATLAB是一种函数丰富、功能强大的集数值计算、图形绘制为一体的系统仿真软件），书中每章的最后一节专门介绍了MATLAB的相关应用，让学生将理论课程中的重点、难点及部分练习用MATLAB语言进行形象、直观的可视化计算机仿真实现，从而加深对信号与系统的基本原理、方法及应用的理 解，培养学生主动获取知识和独立解决问题的能力。

本书第1~4章由王颖民编写，第5~7章由郭爱编写。全书由王颖民统稿。

在本书编写过程中，得到了西南交通大学教材建设研究项目的大力支持，也得到了西南交通大学电气工程学院的大力支持，在此对他们表示衷心的感谢。另外，在本书编写过程中，编者参考了众多国内外的优秀教材和相关资料，在此向这些资料文献的作者深表谢意。

由于编者水平所限，加之时间仓促，书中难免有不妥或错误之处，恳请读者指正。

编者

2008年12月

| | |
|--------------------------------|----|
| 第 1 章 信号与系统概述 | 1 |
| 1.1 信号与系统的概念 | 1 |
| 1.2 信号的描述与分类 | 1 |
| 1.3 基本信号 | 4 |
| 1.4 信号的基本运算 | 11 |
| 1.5 系统的描述与分类 | 14 |
| 1.6 信号的 MATLAB 实现 | 19 |
| 本章小结 | 19 |
| 习题 2 | 19 |
| 第 2 章 连续时间系统的时域分析 | 20 |
| 2.1 连续系统数学模型的建立 | 20 |
| 2.2 线性系统的时域分析 | 24 |
| 2.3 卷积积分 | 35 |
| 2.4 系统对指数信号的响应 | 40 |
| 2.5 用 MATLAB 进行连续时间系统的时域分析 | 42 |
| 本章小结 | 42 |
| 习题 2 | 42 |
| 第 3 章 连续时间信号与系统的频域分析 | 43 |
| 3.1 周期信号的傅里叶级数 | 43 |
| 3.2 周期信号的傅里叶频谱 | 48 |
| 3.3 非周期信号的连续时间傅里叶变换 | 53 |
| 3.4 典型信号的傅里叶变换 | 55 |
| 3.5 傅里叶变换的性质 | 61 |
| 3.6 系统响应的频域分析法 | 68 |
| 3.7 无失真传输 | 72 |
| 3.8 理想低通滤波器 | 73 |
| 3.9 抽样定理 | 74 |
| 3.10 用 MATLAB 进行连续时间信号和系统的频域分析 | 78 |
| 本章小结 | 78 |
| 习题 3 | 78 |
| 第 4 章 连续时间信号与系统的复频域分析 | 79 |
| 4.1 拉普拉斯变换概述 | 79 |
| 4.2 拉普拉斯变换的基本性质 | 83 |
| 4.3 拉普拉斯逆变换 | 87 |

| | | |
|--------------|--------------------------------------|------------|
| 4.4 | 系统的复频域分析 | 91 |
| 4.5 | 系统框图 | 99 |
| 4.6 | 信号流程图 | 102 |
| 4.7 | 系统模拟 | 106 |
| 4.8 | 线性系统的稳定性 | 111 |
| 4.9 | 用 MATLAB 实现连续时间信号与系统的复频域分析 | 117 |
| | 本章小结 | 117 |
| | 习题 4 | 117 |
| 第 5 章 | 离散时间信号与系统的时域分析 | 118 |
| 5.1 | 基本离散时间信号 | 118 |
| 5.2 | 离散时间系统的描述 | 121 |
| 5.3 | 离散时间系统的传输算子和系统的模拟 | 127 |
| 5.4 | 离散系统的零输入响应 | 130 |
| 5.5 | 离散系统的单位响应 | 135 |
| 5.6 | 离散信号的卷积和 | 139 |
| 5.7 | 离散系统的零状态响应 | 141 |
| 5.8 | 用 MATLAB 对离散信号与系统进行时域分析 | 146 |
| | 本章小结 | 146 |
| | 习题 5 | 146 |
| 第 6 章 | 离散时间信号与系统的 z 域分析 | 147 |
| 6.1 | 离散信号的 z 变换 | 147 |
| 6.2 | z 变换的基本性质 | 152 |
| 6.3 | z 反变换 | 160 |
| 6.4 | 离散系统的差分方程的 z 域求解 | 162 |
| 6.5 | 离散系统的 z 域分析 | 165 |
| 6.6 | 系统传递函数的零、极点及系统的稳定性判定 | 170 |
| 6.7 | 离散系统的频域响应 | 173 |
| 6.8 | 离散系统 z 域分析的 MATLAB 实现 | 175 |
| | 本章小结 | 175 |
| | 习题 6 | 175 |
| 第 7 章 | 系统的状态空间分析 | 176 |
| 7.1 | 状态空间描述 | 176 |
| 7.2 | 连续系统状态方程的建立 | 178 |
| 7.3 | 连续系统状态方程的 s 域解法 | 185 |
| 7.4 | 离散系统的状态变量分析法 | 190 |
| 7.5 | 系统状态空间分析法的 MATLAB 实现 | 197 |
| | 本章小结 | 197 |
| | 习题 7 | 197 |
| | 参考文献 | 198 |

第1章 信号与系统概述

1.1 信号与系统的概念

信号与系统理论的应用非常广泛，几乎涉及了所有的科学与技术领域，例如自动控制、通信、语言处理、图像处理、生物工程及航空航天等。同时，信号与系统的概念在人类社会与经济发发展的其他领域中也很重要。本章主要介绍信号与系统的基本概念和基本特性，是信号与系统理论的基础。

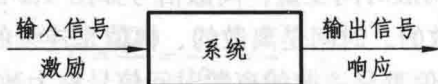
什么是信号？

信号一般表现为随时间变化的某种物理量。信号是多种多样的，例如，一个电话、广播、电视、红绿灯交通信号，或者股票市场每周的道·琼斯指数，等等。通常将以直接形式表达的内容称为消息，如语言、文字、图像等。消息中有意义的内容称为信息。信号是消息的表现形式与传送载体，而消息则是信号的具体内容。

在各种信号中，电信号是应用最广的物理量。电易于产生和控制，另外，许多非电信号也容易转换成电信号，因此，研究电信号具有重要意义。本课程主要讨论电信号，它通常表现为随时间变化的电压或电流。

什么是系统？

信号的产生、传输及处理都需要一定的物理装置，这种装置通常就称为系统。系统是一个非常广泛的概念，从一般意义上讲，系统是由若干相互作用和相互依赖的事物组合而成的具有特定功能的整体，如通信系统、控制系统、经济系统、生态系统等。因此，系统是某个实体，它能将一组信号处理为另一组信号。当一个或多个激励信号作用到系统的输入端时，就会在系统的输出端产生一个或多个响应信号。图 1.1-1 所示就是一个单输入单输出系统的框图。



本课程主要讨论物理系统，特别是电系统，电系统在科学技术领域中具有重要的地位。

1.2 信号的描述与分类

信号通常表现为随时间变化的某种物理量。在数学上，可以描述为以时间为自变量的函数。因此，信号与函数两个名词常通用。除了以时间为自变量外，有些信号是非时间的函数。例如，图像信号可以表示为平面内某点 (x, y) 的函数，是空间点的函数；在频域分析时，信号是 ω 的函数。注意：本章讨论的信号都是时间的函数，不过这个讨论的方法和结论完全适用于其他自变量。

综上所述，信号可以用数学表达式表示为一个或多个变量的函数，还可以用波形图描述。对于各种信号，可以从不同的角度进行以下分类。

1.2.1 确定性信号和随机信号

确定性信号是指信号可以表示为一个确定的时间函数，对于指定的某一时刻 t ，信号有确定的值 $f(t)$ 。确定性信号无论用数学形式还是用图形形式描述，其描述的物理量是完全能够确定的。例如电路中研究的正弦信号、指数信号及各种周期信号等，如图 1.2-1 (a)、(b) 所示。

随机信号不是一个确定的时间函数，通常只知道它取某一值的概率，具有无法预知的不确定性，如图 1.2-1 (c) 所示。

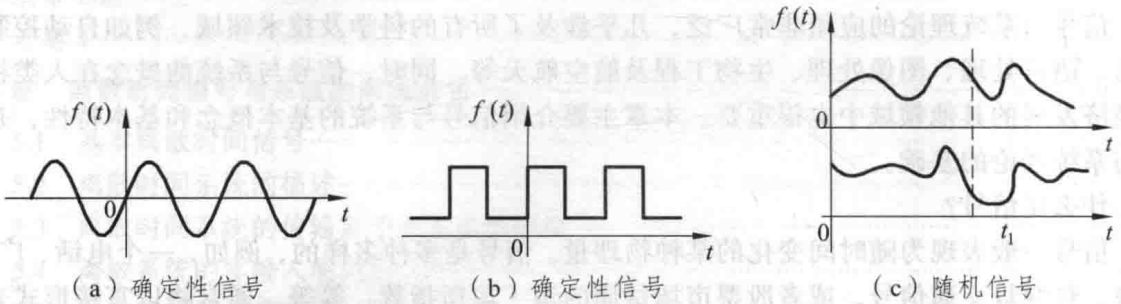


图 1.2-1 确定性信号与随机信号的示例

1.2.2 连续信号和离散信号

根据信号自变量取值的连续与否，可将信号分为连续信号和离散信号。

连续时间信号是指，在信号讨论的时间范围内，任意时刻都可以给出确定的函数值，可以有有限个间断点。例如，用 t 表示连续时间变量，连续信号如图 1.2-1 (a)、(b) 和 1.2-2 (a) 所示。连续时间信号的时间自变量是连续的；但幅值可以是连续的，也可以是不连续的，即跳变的、离散的。例如，图 1.2-1 (a) 和 1.2-2 (a) 所示信号的幅值是连续的，图 1.2-1 (b) 所示信号的幅值是不连续的，是跳变的。对于时间和幅值都连续的信号，称为模拟信号，如图 1.2-1 (a) 和 1.2-2 (a) 所示。

离散时间信号是指其时间自变量是离散的，只在某些不连续的规定时刻给出函数值，其他时刻没有定义。例如，用 k 表示离散时间变量，离散信号如图 1.2-2 (b)、(c) 所示。离散时间信号的幅值也可以是连续的或离散的。时间是离散的、幅值是连续的离散时间信号称为抽样信号，如图 1.2-2 (b) 所示；时间和幅值都是离散的离散时间信号称为数字信号，如图 1.2-2 (c) 所示。

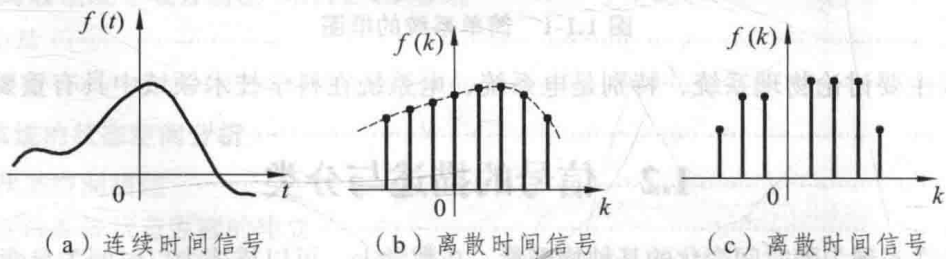


图 1.2-2 连续信号和离散信号示例

1.2.3 周期信号和非周期信号

按信号的周期性划分，信号又可分为周期信号和非周期信号。

周期信号是指间隔一定时间 T 、周而复始且无始无终的信号（在较长时间内重复变化）。例如，一个信号 $f(t)$ 对于某个正常数 T_0 ，有

$$f(t) = f(t+T_0) \quad (-\infty < t < \infty) \quad (1.2-1)$$

则这个信号是周期的,如图 1.2-3 所示。满足式 (1.2-1) 的周期性条件的最小 T_0 值,就是 $f(t)$ 的基波周期。

非周期信号不满足式 (1.2-1) 的周期性条件,不具有周期,或认为具有无限大的周期。

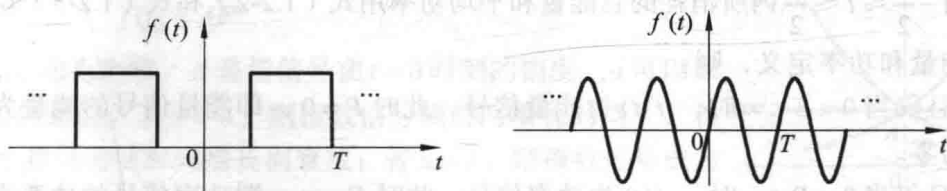


图 1.2-3 周期信号

将始于 $t = -\infty$ 并继续到永远的这类信号 ($-\infty < t < \infty$),称为无始无终信号,或无时限信号。设 t_1 、 t_2 为实常数,若在有限时间区间 $t_1 < t < t_2$ 内,信号 $f(t)$ 存在,而在此时间以外,信号 $f(t) = 0$,则此信号即为有时限信号,简称时限信号。显然,周期信号属于无时限信号。

若 $t < t_1$ 时, $f(t) = 0$; $t > t_2$ 时, $f(t) \neq 0$,则 $f(t)$ 为有始信号,其起始时刻为 t_1 。若 $t > t_2$ 时, $f(t) = 0$; $t < t_2$ 时, $f(t) \neq 0$,则 $f(t)$ 为有终信号。

若 $t < 0$ 时, $f(t) = 0$; $t > 0$ 时, $f(t) \neq 0$,则 $f(t)$ 为因果信号。因果信号为有始信号的特例。若 $t > 0$ 时 $f(t) = 0$, $t < 0$ 时 $f(t) \neq 0$,则 $f(t)$ 为反因果信号。反因果信号为有终信号的特例。

例 1.2-1 判断下列信号是否为周期信号,若是周期信号则确定周期。

① $f_1(t) = \cos^2(2\pi t)$; ② $f_2(t) = 5\cos(12\pi t) + 6\cos(18\pi t)$; ③ $f_3(t) = e^{-2t} \cos(2\pi t)$ 。

解

① $f_1(t) = \cos^2(2\pi t) = \frac{1 + \cos(4\pi t)}{2}$ 是周期信号,则周期

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2} \text{ (s)}$$

② 如果两个周期信号的周期具有公倍数,则它们的和信号仍然是一个周期信号,其周期是两个周期的最小公倍数。

信号 $5\cos(12\pi t)$ 的周期为 $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{12\pi} = \frac{1}{6} \text{ (s)}$

信号 $6\cos(18\pi t)$ 的周期为 $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{18\pi} = \frac{1}{9} \text{ (s)}$

T_1 和 T_2 的最小公倍数是 $\frac{1}{3} \text{ s}$, 所以 $f_2(t)$ 是周期信号,周期为 $\frac{1}{3} \text{ s}$ 。

③ $f_3(t) = e^{-2t} \cos(2\pi t)$ 是非周期信号。

1.2.4 能量信号和功率信号

如何度量一个信号的大小或强度?一般来说,信号的幅度是随时间改变的。若要考虑信号的幅度又要考虑信号的持续期,可将位于一个信号 $f(t)$ 下的面积作为信号大小的一种可能的度量。由于可能出现信号的正、负面积相互抵消的情况,将信号大小定义为 $f^2(t)$ 下的面积可以解决这个问题。推广到复值信号 $f(t)$, 则

$$\text{总能量} \quad E = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt \quad (1.2-2)$$

$$\text{平均功率} \quad P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt \quad (1.2-3)$$

信号可以看作是随时间变化的电压或电流,则信号 $f(t)$ 在 1Ω 电阻上的瞬时功率为 $|f(t)|^2$, 在时间区间 $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ 内所消耗的总能量和平均功率用式 (1.2-2) 和式 (1.2-3) 表示。

根据能量和功率定义, 则:

① 当且仅当 $0 < E < \infty$ 时, $f(t)$ 为能量信号, 此时 $P = 0$, 即能量信号的能量为有限值而平均功率为零。

② 当且仅当 $0 < P < \infty$ 时, $f(t)$ 为功率信号, 此时 $E = \infty$, 即功率信号的功率为有限值而能量为无限大。

不符合上述条件的信号既不是能量信号也不是功率信号。

例 1.2-2 判断下列信号是否为能量信号或功率信号。

$$\textcircled{1} f_1(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t & 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}; \quad \textcircled{2} f_2(t) = 5 \cos(\pi t) u(t); \quad \textcircled{3} f_3(t) = e^{-2t}.$$

解

$$\textcircled{1} E_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} |f_1(t)|^2 dt = \int_0^1 t^2 dt + \int_1^2 (2-t)^2 dt = \frac{1}{3} t^3 \Big|_0^1 + \left(\frac{1}{3} t^3 - 2t^2 + 4t \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad (\text{J})$$

$$P_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f_1(t)|^2 dt = 0$$

所以 $f_1(t)$ 为能量信号。

$$\textcircled{2} P_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{T/2} 25 \cos^2(\pi t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^{T/2} \frac{25}{2} [1 + \cos(2\pi t)] dt$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{T}{2} = 6.25 \quad (\text{W})$$

$$E_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^{T/2} 25 \cos^2(\pi t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^{T/2} \frac{25}{2} [1 + \cos(2\pi t)] dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{25}{2} \cdot \frac{T}{2} = \infty$$

所以 $f_2(t)$ 为功率信号。

$$\textcircled{3} E_3 = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} (e^{-2t})^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-4t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{4} \right) (e^{-2T} - e^{2T}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4} e^{2T} = \infty$$

$$P_3 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (e^{-2t})^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-4t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(-\frac{1}{4} \right) (e^{-2T} - e^{2T})$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{2T}}{4T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{2T}}{2} = \infty$$

所以 $f_3(t)$ 既不是能量信号也不是功率信号。

1.3 基本信号

在信号与系统的分析中, 有几种很重要的基本信号, 即指数信号、正弦信号、阶跃信号、冲激信号等。这些信号不仅本身可以作为实际物理信号的模型, 而且是描述其他信号的基础, 可以作为基本信号去构造更复杂的信号。这些基本信号的应用能使信号与系统的很多分析得到简化。

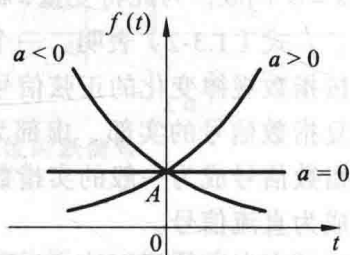
1.3.1 基本连续时间信号

1. 指数信号

实指数信号可以表示为

$$f(t) = Ae^{at}$$

式中, A 和 a 均为实数, A 是指信号在 $t=0$ 时刻的幅度, a 可以取正值也可以取负值。若 $a > 0$, 则指数信号随时间增长而增长; 若 $a < 0$, 则指数信号随时间增长而衰减; 若 $a = 0$, 则指数信号成为直流信号, 如图 1.3-1 (a) 所示。

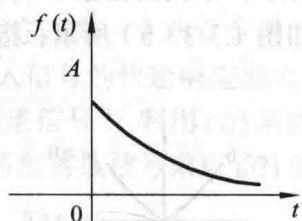


(a) 指数信号

在实际中较多遇到的是单边指数衰减信号, 如图 1.3-1 (b) 所示, 其数学表达式为

$$f(t) = \begin{cases} Ae^{-at} & t \geq 0, a > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (1.3-1)$$

指数信号的一个重要性质是: 对时间的微分和积分仍是指数形式。



(b) 单边指数衰减信号

图 1.3-1 指数信号和单边指数衰减信号

2. 正弦信号

连续时间正弦信号表示为

$$f(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

式中, A 是振幅, ω 是角频率, φ 是初相位, 如图 1.3-2 所示。正弦信号是周期信号, 周期 T 、频率 f 和角频率 ω 之间的关系为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$

根据欧拉公式, 有 $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$

$$\cos\omega t = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) = \operatorname{Re}(e^{j\omega t})$$

$$\sin\omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) = \operatorname{Im}(e^{j\omega t})$$

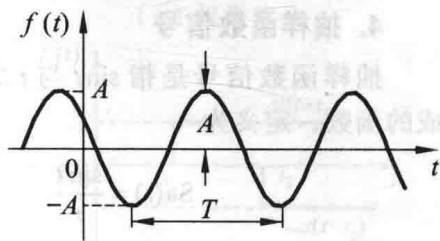


图 1.3-2 正弦信号

即一个正弦信号可以表示为两个周期相同、频率异号的虚指数信号的加权和, 也可以表示为虚指数的实部。

正弦信号和虚指数信号的共同特性是: 对时间微分和积分后, 仍是同周期的正弦信号和虚指数信号。正弦信号和虚指数信号作为一种基本信号, 常用于连续信号与系统的频域分析。

3. 复指数信号

连续时间复指数信号表示为

$$f(t) = Ae^{st}$$

式中, $s = \sigma + j\omega$, A 一般为实数, 也可为复数。因此

$$e^{st} = e^{(\sigma+j\omega)t} = e^{\sigma t} e^{j\omega t} = e^{\sigma t} (\cos \omega t + j \sin \omega t) \quad (1.3-2)$$

与欧拉公式比较可以看出， e^{st} 是 $e^{j\omega t}$ 函数的推广，这里，频率变量被推广到复变量 $s = \sigma + j\omega$ ，为此将变量 s 称为复频率。

式 (1.3-2) 表明，一个复指数信号可分解为实部、虚部两部分。实部、虚部分别为振幅按指数规律变化的正弦信号。若 $\sigma < 0$ ，复指数信号的实部、虚部为衰减正弦信号；若 $\sigma > 0$ ，复指数信号的实部、虚部为增幅正弦信号；若 $\sigma = 0$ ，则为虚指数信号 $e^{j\omega t}$ ；若 $\omega = 0$ ，则复指数信号成为一般的实指数信号；若 $\sigma = 0$ ， $\omega = 0$ ，复指数信号的实部、虚部均与时间无关，成为直流信号。

由上述分析可知，函数 e^{st} 包含了一大类函数：常数 $A = Ae^{0t}$ ($\sigma = 0, \omega = 0$)，如图 1.3-3 (a) 所示；单调实指数 $e^{\sigma t}$ ($\omega = 0, s = \sigma$)，如图 1.3-3 (a) 所示；余弦函数 $\cos \omega t$ ($\sigma = 0, s = \pm j\omega$)，如图 1.3-3 (b) 所示；指数变化的余弦函数 $e^{\sigma t} \cos \omega t$ ($s = \sigma \pm j\omega$)，如图 1.3-3 (c)、(d) 所示。

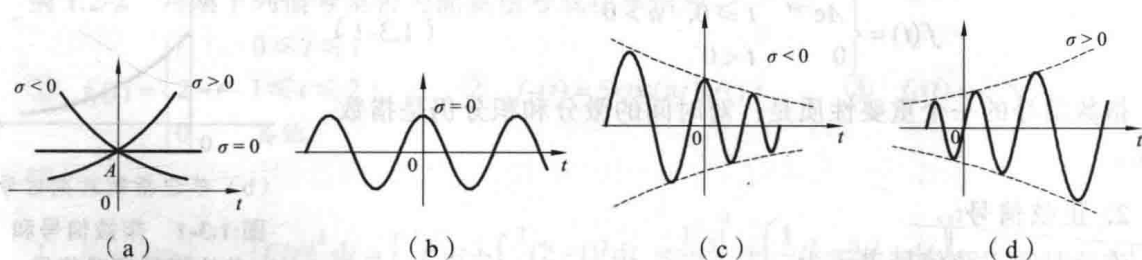


图 1.3-3 复指数信号

复指数信号对时间的微分和积分仍是复指数形式。利用复指数信号可以使许多运算和分析简化。因此，复指数信号是信号分析中非常重要的基本信号。

4. 抽样函数信号

抽样函数信号是指 $\frac{\sin t}{t}$ 与 t 之比构成的函数，定义为

$$\text{Sa}(t) = \frac{\sin t}{t}$$

波形如图 1.3-4 所示。

抽样函数信号 $\text{Sa}(t)$ 具有如下性质：

① 是实变量 t 的偶函数， $f(t) = f(-t)$ 。

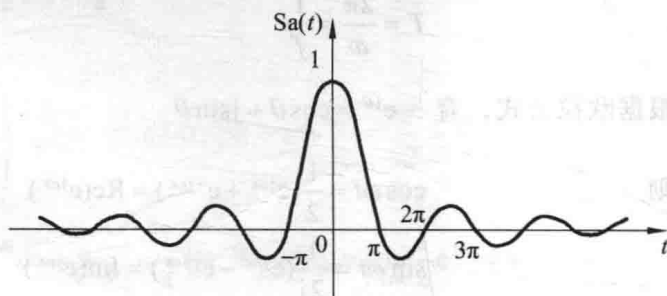


图 1.3-4 抽样函数信号

② $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

③ 当 $t = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$ 时，即 $t = \pm k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) 时， $\text{Sa}(t)$ 函数值为零。

④ $\int_{-\infty}^{\infty} \text{Sa}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi$ ， $\int_0^{\infty} \text{Sa}(t) dt = \frac{\pi}{2}$ 。

⑤ $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$ ，在 t 的正、负两方向振幅都逐渐衰减。

5. 单位阶跃信号

单位阶跃信号通常用符号 $u(t)$ 表示，定义为

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

波形如图 1.3-5 (a) 所示。

延迟的单位阶跃信号为

$$u(t-t_0) = \begin{cases} 1 & t > t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases}$$

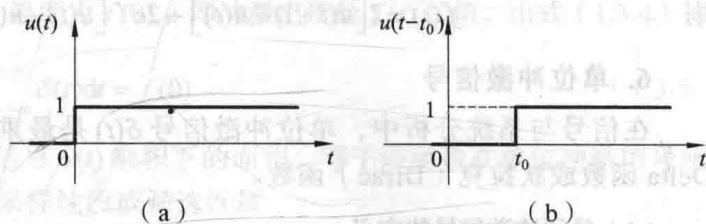


图 1.3-5 单位阶跃信号

波形如图 1.3-5 (b) 所示。

单位阶跃信号 $u(t)$ 是一个应用特别简单的信号。在信号与系统分析中，使用单位阶跃信号是因为它可以用数学方式来描述实际物理系统中一个常见的现象：从一个状态到另一个状态的快速转换。例如，在 $t=0$ 时刻，合上开关接入直流电源。同时，它还是一个非常有用的测试信号，系统对阶跃输入信号的响应揭示了该系统对突然变化的输入信号快速响应能力。

用单位阶跃信号可以起始任一信号。对于在 $t=0$ 开始的信号（因果信号），利用 $u(t)$ 来描述非常方便。如果能让一个信号在 $t=0$ 开始（即 $t < 0$ 其值为零），只需要将该信号乘以 $u(t)$ 就可以实现。因此，阶跃信号能方便地表现出信号的单边特性。

例如， $f(t) = Ae^{-at}$ 是一个始于 $t = -\infty$ 的无始无终指数信号，它的因果形式就是单边指数衰减信号 [其数学表达式见式 (1.3-1)]，即

$$f_1(t) = \begin{cases} Ae^{-at} & t \geq 0, a > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

可表示为 $f_1(t) = f(t)u(t) = Ae^{-at}u(t)$

用单位阶跃信号和延迟的单位阶跃信号可以表示任意的矩形信号（“或”门信号）。

例如，图 1.3-6 (a) 给出的门信号 $f(t)$ 可以根据图 1.3-6 (b) 表示为 $f(t) = u(t-t_1) - u(t-t_2)$

任意信号只要乘以门信号，就只剩下门信号的部分。所以，如果一个信号在不同区间有不同的数学表达式，用单位阶跃信号来描述这种分段函数也很方便。

例 1.3-1 利用单位阶跃信号表示图 1.3-7 所示的信号 $f(t)$ 。

解 图 1.3-7 的信号 $f(t)$ 在不同的时间段上有不同的数学表达式

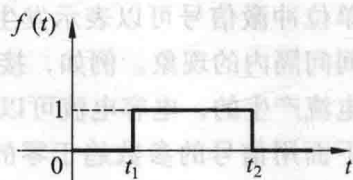
$$f(t) = \begin{cases} 2 & -1 \leq t < 0 \\ 2e^{-t} & 0 \leq t < 3 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

信号 $f(t)$ 可分为两个分量，一个是门信号

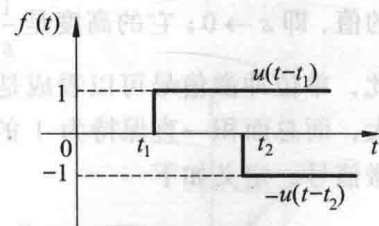
$$2[u(t+1) - u(t)]$$

另一个是指数信号 $2e^{-t}$ 乘以门信号得到

$$2e^{-t} [u(t) - u(t-3)]$$



(a) 矩形信号



(b) 矩形信号的图解表示

图 1.3-6 用单位阶跃信号表示门信号

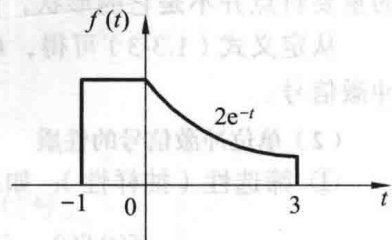


图 1.3-7 用单位阶跃信号表示信号

则
$$f(t) = 2[u(t+1) - u(t)] + 2e^{-t} [u(t) - u(t-3)]$$

6. 单位冲激信号

在信号与系统分析中, 单位冲激信号 $\delta(t)$ 是最重要的信号之一。单位冲激信号也称为 Delta 函数或狄拉克 (Dirac) 函数。

(1) 单位冲激信号的定义

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 & t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases} \quad (1.3-3)$$

该定义式说明: 函数值只在 $t=0$ 时不为零; 单位冲激信号的面积为 1; $t=0$ 时, $\delta(t) \rightarrow \infty$, 为无界函数。

冲激信号用箭头表示, 它具有强度, 即冲激信号对时间的定积分值, 在图中用括号注明, 以与信号的幅值相区分, 如图 1.3-8 (a) 所示。

延迟的单位冲激信号用符号 $\delta(t-t_0)$ 表示, 如图 1.3-8 (b) 所示, 定义为

$$\begin{cases} \delta(t-t_0) = 0 & (t \neq t_0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0) dt = 1 \end{cases}$$

单位冲激信号可以表示发生在比任何测量仪器的分辨率都短的时间间隔内的现象。例如, 接在电池两端的电容电压的瞬间增加。电容电压是在短时间流过大大电流产生的, 电容电流可以用冲激函数模型表示。

下面用信号参数趋于零的极限情况来描述单位冲激信号。将一个冲激信号想象为图 1.3-9 所示的一个具有单位面积的又高又窄的矩形脉冲。这个矩形脉冲的宽度是 ε , 一个非常小的值, 即 $\varepsilon \rightarrow 0$; 它的高度是 $\frac{1}{\varepsilon}$, 一个非常大的值, 即 $\frac{1}{\varepsilon} \rightarrow \infty$ 。

因此, 单位冲激信号可以看成是宽度变成无穷小、高度变成无穷大, 而总面积一直保持为 1 的一个矩形脉冲。极限情况就是冲激信号, 定义如下

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[u\left(t + \frac{\varepsilon}{2}\right) - u\left(t - \frac{\varepsilon}{2}\right) \right]$$

其他一些脉冲信号也可近似形成冲激信号, 例如指数脉冲、三角脉冲或高斯型脉冲等, 只要取宽度趋于 0 的极限, 都可认为是冲激信号。单位冲激信号的重要特点并不是它的形状, 而是它的脉冲宽度趋近于零的同时, 它的面积保持为 1。

从定义式 (1.3-3) 可得, $k\delta(t) = 0 (t \neq 0)$, 它的面积是 k 。因此, $k\delta(t)$ 是一个面积为 k 的冲激信号。

(2) 单位冲激信号的性质

① 筛选性 (抽样性): 如果 $f(t)$ 在 $t=0$ 处连续, 且处处有界, 则有

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) \quad (1.3-4)$$

式 (1.3-4) 表明: 一个连续时间函数 $f(t)$ 与一个位于 $t=0$ 的单位冲激信号相乘, 将产生一个

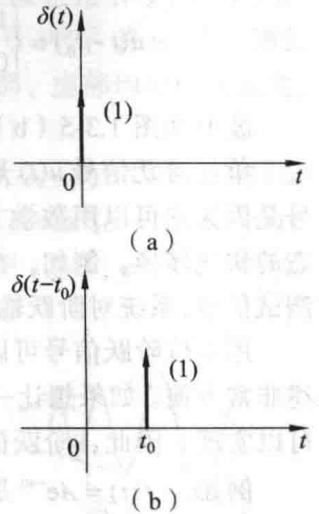


图 1.3-8 单位冲激信号

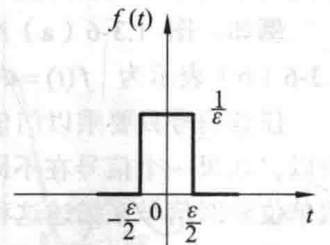


图 1.3-9 矩形脉冲

冲激信号, 该冲激信号发生在 $t=0$ 时刻, 强度为 $f(0)$, 即冲激出现处 $f(t)$ 的值。由式 (1.3-4) 得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = f(0) \quad (1.3-5)$$

式 (1.3-5) 表明: 一个函数与冲激信号 $\delta(t)$ 乘积下的面积, 等于该函数在单位冲激信号所在时刻的值。这个性质称为单位冲激的采样性质或筛选性质。

对于移位情况 $f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = f(t_0) \quad (1.3-6)$$

式 (1.3-6) 只是采样性质或筛选性质的另一种形式。这种情况下, 冲激 $\delta(t-t_0)$ 位于 $t=t_0$ 时刻, 因此位于 $f(t)\delta(t-t_0)$ 下的面积是 $f(t_0)$, 这就是冲激信号所在时刻 $t=t_0$ 时 $f(t)$ 的值。

② 冲激函数与阶跃函数的关系: 冲激函数的积分等于阶跃函数。

证明: 由冲激函数的定义式 (1.3-3) 得

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau)d\tau = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} = u(t)$$

反之, 阶跃函数的微分等于冲激函数, 即 $\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$ 。

③ 尺度变换特性: $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t) \quad (a \neq 0)$

④ 奇偶性质: $\delta(t) = \delta(-t)$

即冲激函数信号 $\delta(t)$ 是偶函数 (这可由尺度变换特性推导)。

7. 单位斜坡函数

单位斜坡函数用符号 $r(t)$ 表示, 定义为

$$r(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

如图 1.3-10 所示。单位斜坡函数用来描述信号在某一时刻接通后按线性变化或保持线性变化直到在某一时刻切断为止的这类信号。

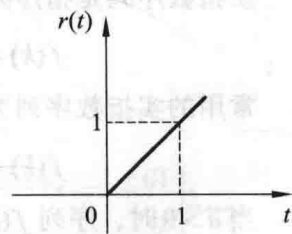


图 1.3-10 单位斜坡信号

单位斜坡函数与单位阶跃信号和单位冲激函数有如下关系

$$r(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau)d\tau, \quad r(t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^{\tau} \delta(\xi)d\xi d\tau$$

$$\frac{dr(t)}{dt} = u(t), \quad \frac{d^2r(t)}{dt^2} = \delta(t)$$

1.3.2 基本离散时间信号

下面讨论在离散时间信号与系统中经常会遇到的几个重要信号。

1. 单位阶跃序列

单位阶跃序列用 $u(k)$ 表示, 定义为

$$u(k) = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

式中, k 为整数, 是序列数。若希望一个信号从 $k=0$ 开始, 只需要将它乘以 $u(k)$ 即可。 $u(k)$ 类似于连续时间信号中的单位阶跃信号 $u(t)$ 。但应注意, $u(t)$ 在 $t=0$ 时刻发生跳变, 往往不予定义, 而 $u(k)$ 在 $k=0$ 处明确定义为 1, 如图 1.3-11 所示。

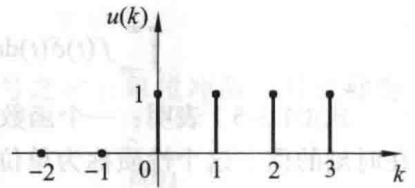


图 1.3-11 单位阶跃序列

2. 单位脉冲序列

离散时间信号中对应于连续时间冲激信号 $\delta(t)$ 的信号, 称为单位脉冲序列, 用 $\delta(k)$ 表示, 定义为

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

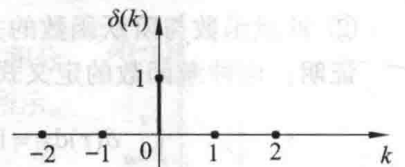
如图 1.3-12 (a) 所示。图 1.3-12 (b) 所示为移位脉冲序列 $\delta(k-2)$ 。与连续时间冲激信号 $\delta(t)$ 不同, $\delta(k)$ 函数很简单, $\delta(k)$ 仅在 $k=0$ 处取单位值 1, 其余 k 值处均为零。其抽样特性为

$$f(k)\delta(k) = f(0)\delta(k)$$

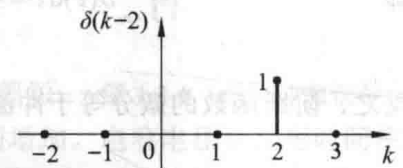
单位脉冲序列 $\delta(k)$ 与单位阶跃序列 $u(k)$ 的关系如下

$$\delta(k) = u(k) - u(k-1)$$

$$u(k) = \sum_{n=-\infty}^k \delta(n)$$



(a)



(b)

图 1.3-12 单位脉冲序列

3. 实指数序列

实指数序列是指序列值随序号变化而按指数规律变化的离散时间信号, 定义为

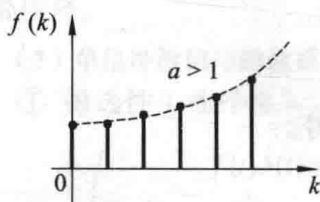
$$f(k) = a^k$$

常用的实指数序列为单边实指数序列, 当 $k < 0$ 时, $f(k) = 0$, 即

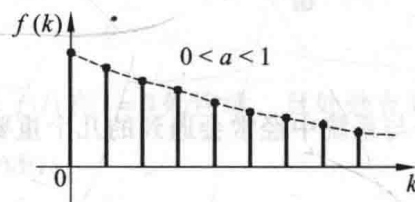
$$f(k) = a^k u(k)$$

当 $a > 0$ 时, 序列 $f(k)$ 都取正值, 如图 1.3-13 (a)、(b) 所示; $a < 0$ 时, 序列 $f(k)$ 在正、负值间摆动, 如图 1.3-13 (c)、(d) 所示。当 $|a| > 1$ 时, $f(k)$ 为一个发散序列, 如图 1.3-13 (a)、(c) 所示。当 $|a| < 1$ 时, $f(k)$ 为一个收敛序列, 如图 1.3-13 (b)、(d) 所示。

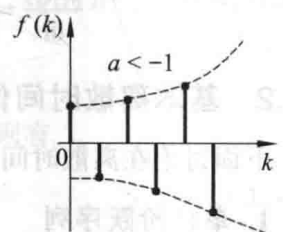
当 $a=1$ 时, $f(k)$ 为常数序列, 如图 1.3-13 (e) 所示; 当 $a=-1$ 时, $f(k)$ 的符号正、负交替变化, 如图 1.3-13 (f) 所示。



(a)



(b)



(c)