HIT

数学 · 统计学系列

An Elementary Treatise on Modern Pure Geometry

近世纯粹几何学初论

[英] 罗伯特·拉克兰 著　赵勇 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

数学·统计学系列

近世纯粹几何学初论

An Elementary Treatise on Modern Pure Geometry

[英] 罗伯特·拉克兰 著

赵勇 译

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书是一部平面几何学的名著.作者使用综合的方法对点列和线束、三角形和圆、直线形、透视、相似形、倒演、反演、圆组、共轴圆的理论进行了系统的研究.其中对于帕斯卡定理全图、共轴圆组的彭赛列定理与三个已知圆交成已知角的圆、有一个公切圆的四圆组的开世定理、圆弧三角形等内容的论述尤为详尽,这些在同类书籍中并不多见.

本书适合于理工科师生和平面几何学爱好者学习和参考.

图书在版编目(CIP)数据

近世纯粹几何学初论/(英)罗伯特·拉克兰著;赵勇译.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2017.1

书名原文:AN ELEMENTARY TREATISE ON MODERN PURE GEOMETRY

ISBN 978-7-5603-6256-4

Ⅰ.①近… Ⅱ.①罗… ②赵… Ⅲ.①几何学-研究 Ⅳ.①O18

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 254701 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 李宏艳
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 17.75 字数 333 千字
版 次 2017 年 1 月第 1 版 2017 年 1 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-6256-4
定 价 58.00 元

翻译说明

本书的英文名是 *An Elementary Treatise on Modern Pure Geometry*，英国麦克米兰（Macmillan）出版有限公司1893年出版，作者是剑桥大学三一学院的研究员罗伯特·拉克兰（Robert Lachlan）.

19世纪下半叶，平面几何学研究进入了一个繁荣发展的时期，短短的几十年间，新成果不断涌现，名家辈出. 相应地也出现了大量优秀的平面几何学著作，对这一时期的研究成果进行了适时系统的整理. 拉克兰的这本《近世纯粹几何学初论》就是这些优秀著作中的一本.

这本书内容丰富. 该书对当时的一些研究成果进行了及时的整理，如三相似形、圆弧三角形等都是那时平面几何研究的最新成果；还搜集了许多当时期刊上以及剑桥大学和都柏林大学的试卷中的题目. 这些难得的资料为之后一些书籍的写作提供了重要的参考，例如R·A·约翰逊的《近代欧氏几何学》就将该书列为主要的参考书目之一. 该书出版至今虽已逾百年，但仍经常被引用，如线上数学百科全书"MathWorld"的许多平面几何词条中都将该书列为重要的参考. 一个重要原因是这本书中的不少内容在同类的书籍中是不常见到的. 如，帕斯卡定理全图的研究（帕斯卡线、斯坦纳点、寇克曼点等，第八章181～186），虽然在很多书籍中都有涉及，但大多止于帕斯卡定理，对进一步探讨的介绍则很少见. 圆弧三角形（哈特圆，第十五章397～404）的情形与之类似，本书论述得比较全面. 另外还有共轴圆组的彭赛列定理（第十三章334～342），与三个已知圆交成已知角的圆（第十五章382～386），关于有一个公切圆的四圆组的开世定理（第十五章287～296），对于这些内容本书都比许多同类的书籍阐述得更为细致. 其中在别的书中很难见到的内容有两圆的幂的概念（第十二章313～315），这是个很有用的概念，能使许多结论的叙述变得简洁、统一. 还有圆倒演（第十五章405～404），虽然并不是很重要，但这种有趣的点到圆的二一对应也别有一种美妙.

本书论证严谨，方法多样. 对于重要的定理，都在后面设置了例题以说明其应用. 而插入的例题都有基于紧接在前面的定理的简单而直接的证明，其中较难的大多给出了详细的解答. 对于同一例题会在不同的地方多次出现，让读

者从不同的角度去审视同一个问题，开拓读者的思维，这也给出了同一问题的多种证明. 例如，著名的费尔巴哈定理就在本书中出现了6次(68页，例7、例8；130页，例6；179页，例8；192页，例5；195页，例2；213页，例1.).

但金无足赤，这本书也存在着一些不足. 例如本书在一些内容的安排上不尽合理. 最后一章包含的交比理论，与前面第四章的内容有紧密联系，没有必要将这样重要的不变量设置的如此靠后. 译者在翻译的过程中，觉得本书在部分知识点的论述上太过简略，甚至是缺漏，这些都可能给读者的阅读理解带来困难. 下面花一点笔墨对此做一些解读. 因为其中牵涉到一些概念，所以建议读者在阅读完本书相应的正文内容后，再来读下面的解读.

① 两个圆的交角

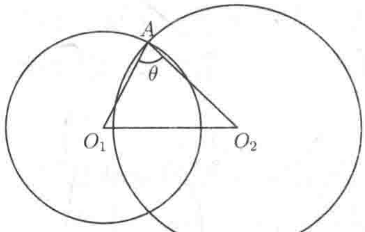

图 1

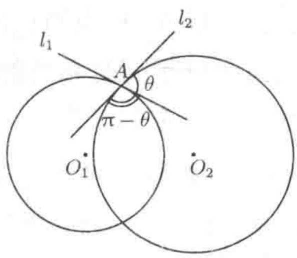

图 2

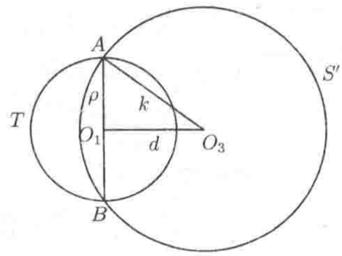

图 3

本书165页将两个圆的交角定义为这两圆的连心线对任一个交点所张的角. 如图1，圆 O_1，O_2 的交角为 $\theta = \angle O_1AO_2$. 采用这一定义的好处是不会产生歧义，而缺点是不能推广到任意两条曲线的交角的情形. 所以在不少书中将两条曲线的交角定义为这两条曲线在交点处的切线的夹角，如N・A・考特的《大学几何学》[①]中§529的定义. 特别地当这两条曲线是圆时就得到两个圆的交角的定义. 但这种定义容易引起歧义，如图2，切线 l_1 和 l_2 的夹角实际上有两个，θ 和 $\pi-\theta$. 究竟哪个角是这两个圆的交角，《大学几何学》中采取了随意的态度. 而R・A・约翰逊的《近代欧氏几何学》中§48的定义采用有向角来避免这种不确定性. 如图2，此时圆 O_1 到圆 O_2 的交角为 θ，而圆 O_2 到圆 O_1 的交角为 $\pi-\theta$. 这种定义的缺点是要区分方向.

这几种定义的优缺点在关于反演的一个结论中显得更加清楚. 下面来看这个结论在这三本书中的不同表述.

本书的定理358为：如果两个圆相交，则它们的交角等于或互补于反形圆的交角. 这里将结论分为两种情况.

① N・A・考特 著，*College Geometry*，中译本由赵勇译出，哈尔滨工业大学刘培杰数学工作室即将出版.

《大学几何学》的定理 531 为：如果两条曲线相交，则它们的交角等于两条反形曲线在对应点处的交角. 这里看似将两种情况统一为一种情况，但其实是不严格的.

《近代欧氏几何学》的定理 74 为：两个圆的反形的交角，等于原来的圆的交角，但方向相反. 这里采用有向角，使结论统一为一种情况，但要区分方向.

而本书作者也意识到书中对于两圆交角定义的局限性，于是在 205 页采用将圆的半径看成带正负号的量来改进这一不足. 如图 1，当圆 O_1，O_2 的半径的符号相同时，它们的交角取为 θ；而当它们半径的符号相反时，交角取为 $\pi-\theta$. 采用这一改进后，定理 358 的结论可以统一为“两个已知圆的反形的交角与两个已知圆的交角相等”. 这一广义的交角相等，即将两圆的交角为 θ 和 $\pi-\theta$ 看作相等的观点，在“与三个已知圆交成已知角的圆”的问题中被广泛采用，参见本书 206 页的 381. 这与《近代欧氏几何学》§179 将两个圆的交角看成没有正负的量有异曲同工之妙. 其相同的目的都是为了简化问题的叙述，可以统一地叙述一个结论，而不用分为多种不同的情况.

② 广义的内切、外切

按本书对两个圆交角的定义（165 页），两个圆相内切，当且仅当它们的交角为 0 时；而两个圆相外切，当且仅当它们的交角为 π 时. 这是一般意义上的内切和外切. 但当两个圆交角的定义被按 205 页进行拓展时，内切、外切的含义也相应地被进行了拓展，即所谓“广义的内切、外切”. 在两圆交角的广义定义下，两个圆的交角若为 0，则称它们为相内切；当交角为 π 时，称为相外切. 显然，当这两个圆的半径的符号相同时，广义的内切、外切与一般的内切、外切的含义是相同的；但当这两个圆的半径的符号相反时，广义的内切、外切恰是一般意义的外切、内切. 广义的内切和外切在本书中两次被提及（221 页 404 和 225 页 412），但原书却遗漏了对其含义的说明.

在一般的意义下，两个相内（外）切的圆，经过反演后，两个反形圆可能是相内（外）切的，也可能变为相外（内）切的，取决于反演中心的位置（参见 195 页，359 的例 1）. 而在广义下，两个相内（外）切的圆经过反演后仍然是相内（外）切的.

③ 虚圆

本书中较多地论述与虚圆有关的内容，这些在前面提到的两本书中却鲜有提及，而这也可能给一些读者带来理解上的困难.

如图 1，设圆 O_1，O_2 的半径分别为 r_1，r_2，圆心距为 $d=O_1O_2$. 则在三

角形 O_1AO_2 中根据余弦定理有 $d^2=r_1^2+r_2^2-2\,r_1r_2\cos\theta$. 所以这两个圆的幂 $=d^2-r_1^2-r_2^2=-2\,r_1r_2\cos\theta$. 所以当这两个圆正交时（$\theta=\frac{\pi}{2}$），幂为 0；相内切时（$\theta=0$），幂为 $-2\,r_1r_2$；相外切时（$\theta=\pi$），幂为 $2\,r_1r_2$（165 页）.注意虽然这里的推理是针对两个实圆的，但根据连续性原理，结论对于含虚圆的情形也成立.

在本书中虚圆是指有一个实圆心 O_1，且半径为 $r_1=\mathrm{i}\rho$ 的圆（这里 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，ρ 是一个正实数），记该圆为 S. 另外一个实圆 T 的圆心为 O_2，半径为 r_2（r_2 是一个正实数）. 则这两个圆的幂 $(ST)=d^2-r_1^2-r_2^2=d^2+\rho^2-r_2^2$. 即一个实圆和一个虚圆的幂是一个实数（165 页 313）. 当圆 T 是一个与圆 S 同心且正交的圆时，$d=0$，$(ST)=0$，所以 $r_2=\rho$. 即两个正交的同心圆具有 ρ，$\mathrm{i}\rho$ 形式的半径. 以下用 T 特指与虚圆 S 正交的同心圆，因此它的圆心为 O_1，半径为 ρ. 这个实圆 T 在与虚圆 S 有关的作图中极为重要. 设 P 是一个实点，则 P 关于虚圆 S 的反演点可以借助于圆 T 来作. 先作出 P 关于实圆 T 的反演点 P_1，再作出 P_1 关于圆 S，T 共同的圆心 O_1 的反射点 P'，则 P' 就是 P 关于虚圆 S 的反演点. 其他实图形关于圆 S 的反形可以类似作出. 设 S' 是一个以 O_3 为圆心，且 k 为半径的实圆. 如果 S' 与 S 正交，则 $(SS')=d^2+\rho^2-k^2=0$，这里 $d=O_1O_3$. 如图 3，此时显然圆 S' 与圆 T 的公共弦 AB 是圆 T 的一条直径，即与虚圆 S 正交的任意实圆平分圆 T，反过来平分圆 T 的任意实圆一定与圆 S 正交. 这也给出了与一个虚圆正交的实圆的作法（222 页，407）.

该书原版中的插图没有编号，节标题前也没有编号. 为了便于读者阅读，翻译时我将插图和节标题都进行了编号，并在行文中增加了一些提示语，如“如图 5.3”，等等.

译者不建议读者将本书作为学习近世几何学的入门书籍来读，前面提到的 N・A・考特的《大学几何学》是一本更适合于初学者的书. 如果将本书放在《大学几何学》之后来读，效果会更好.

限于水平，译文中一定存在着诸多疏漏之处，望读者朋友们能不吝批评指正.

赵 勇

2014 年 8 月

于六安东桥

序

本专著的目的是为满足学生对合适的几何课本的需求. 迄今为止，纯粹几何学的研究已经被忽视了，毫无疑问，这主要是因为与该学科有关的问题很少被设置在考卷中. 然而，在剑桥大学荣誉学位考试的新章程中，对一份试卷的简介中所做的规定涉及“纯粹几何学——欧氏几何学、直线和圆的简单性质、反演、用几何法处理的圆锥曲线的简单性质（不排斥射影法）、倒演、调和的性质、曲率”. 在这本专著中，我汇集了与直线和圆的简单性质有关的所有重要命题——这些完全可以看作在以上章程的限制之内. 同时我竭力尽可能完整地论述这一学科的每一个分支，希望能促使比现在更多的学生专心致力于这一值得与任一纯数学分支得到同样关注的学科.

贯穿本书引入了大量有趣的定理和问题用以阐释本学科的原理. 其中多数取自剑桥大学和都柏林大学的试卷，或者取自 *Educational Times*. 一部分内容是原创的，而另一些取自汤森（Townsend）的 *Modern Geometry*，以及开世（Casey）的 *Sequel to Euclid*[①]. 在对它们的挑选和安排上特别精心. 事实上，插入的例题都有基于紧接在前面的定理的简单而直接的证明.

对于有些例题补充了解答，尤其是那些出现涉及一些特别重要定理的例题. 这样做主要是为了显示使用纯几何推理较于解析处理的冗长方法的巨大优越性.

尽管作为一种研究的工具解析法可能是强有力的，但对于希望对几何这一学科获得本质认识的学生不能过于强求，如果忽视纯几何推理的运用，他将得不到实质的进步. 事实上，或许能作为一条公理，根据经验，使用纯粹几何学的原理，每个几何定理都可以有一个简单而直接的证明.

在本书的写作中，我使用了开世、沙勒（Chasles）及汤森的成果；纽伯格（Neuberg）和泰利（Tarry）发表在 *Mathesis* 上的一些论文；A·拉莫尔（A. Larmor）先生，H·M·泰勒（H. M. Taylor）先生，以及 R·塔克（R. Tucker）先生发表在 *Quarterly Journal*，*Proceedings of the London Mathematical So-*

---

① 这本书由李俨先生译为《近世几何学初编》，商务印书馆，1952 年 5 月初版. —— 译者注

ciety 上，或者 *The Educational Times* 上的论文.

我非常感激我的朋友们，克莱尔学院(Clare College)的研究员A·拉莫尔先生，以及圣约翰学院(St John's College)的研究员H·F·贝克(H. F. Baker)先生，感谢他们阅读校样，并提出了一些已经融入我的著作中的宝贵建议. 对于拉莫尔先生，我尤其要感谢他允许我使用他发表过的论文来组成本书.

R. LACHLAN

1893年2月11日

于剑桥

目录

第 1 章　引论

第 2 章　几何量的度量

第 3 章　基本的度量性命题

第 4 章　调和点列与调和线束

第 5 章　对合的理论

第 6 章　三角形的性质

第 7 章　直线形

第 8 章 透视的理论

第 9 章 相似形的理论

第 10 章 圆

第 11 章 倒演的理论

第 12 章 两圆的性质

第 13 章 共轴圆

第 14 章 反演的理论

第 15 章 圆组

第 16 章 交比的理论

第1章 引论

I 平面图形的定义

1. 一个平面图形可以定义为同一平面上点和直线的集合，直线被认为是无限延长的. 通常不是把点作为基本元素，就是把直线作为基本元素，进而图形可以分别看作点的集合或直线的集合. 为了说明这一观点，让我们来考虑圆的情形. 设想一个动点 P 运动时，使得它与一个定点 O 的距离是固定的，同时假设一条直线 PQ 始终随点 P 转动，使得 $\angle OPQ$ 是一个直角. 如果我们使点 P 连续运动，那么我们知道它将画出一个圆，并且我们假设运动发生在一张平面的白色表面上，而平面上所有被直线 PQ 通过的部分都变为黑色，则平面上将留下一块由点 P 画出的圆所围成的白色区域.

这里存在三个要考虑的对象：

（i）将白色区域与平面的剩余部分分离开来的实际的曲线.

（ii）动点 P 所有位置的集合.

（iii）动直线 PQ 所有位置的集合.

通常说这条曲线是动点在所有位置的轨迹（locus），以及动直线在所有位置的包络（envelope）. 而重要的是要注意这三者是有区别的. [1]

2. 现在让我们来考虑任一由单一曲线组成的简单平面图形的情况. 这样的一个图形可以认为是由一个动点描绘出的. 因此我们可以把一个简单图形看作是一个动点在一个位置集合的轨迹.

曲线作为一个包络的概念并不显然，而这可以从曲线作为一个轨迹的概念中得到. 但是必须定义一条曲线的切线.

设在一条曲线上取一个与已知点 P 接近的点 P'，并设 PT 是当 P' 无限趋近于 P 时直线 PP' 的极限位置（图 1.1），则说直线 PT 与这条曲线切于（touch）点 P，并称为是这条曲线在该点处的切线（tangent）.

如果现在我们假设一点 P 连续画出一条已知的曲线，并且对于 P 的每一个位置，我们假设作出该曲线的切线，那么显然我们可以把这些直线看成当点 P 沿着这条曲线运动时，一条随着 P 转动的直线的各个位置. 于是我们得

到一条曲线作为一条直线的各个位置的包络的概念.

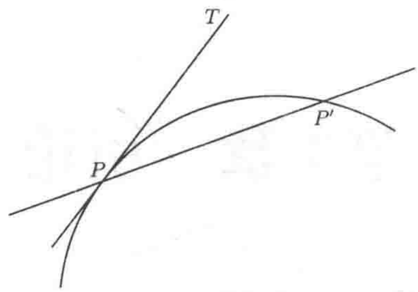

图 1.1

3. 还需考虑两种特殊情形. 首先，我们假设点 P 画出一条直线：在这一情形里，直线的集合不存在，而我们可以说这条直线是点的各个位置的轨迹. 其次，假设点 P 是不动的：在这一情形中没有点的轨迹，而我们说点 P 是一条绕它旋转的直线所有位置的包络.

4. 由此可得任意一个由点、直线和曲线所组成的平面图形，可以看作一
[2] 个点的集合或者直线的集合. 但是用这种方式来看一个图形并不总是必要的；有时把一个图形的一部分看作点的集合，而另一部分看作直线的集合是方便的.

II 曲线的分类

5. 曲线若被看作轨迹，则依据它们与任意一条直线交点的数目来进行分类. 一条直线能在一条曲线上截得的交点的最大数目称为这条曲线的阶(order). 因此一条直线是一个一阶的点集，因为不能作出与一条已知直线相交多于一个点的直线. 落在两条直线上的点集是二阶的，因为这些点中不会有多于两个在任意一条直线上. 根据同样的道理，圆也是一个二阶的轨迹.

另一方面，容易看出每个一阶的点集都必定在一条直线上.

6. 曲线若被看作包络，则根据它们通过任意一点的切线的数目来分类. 通过一个任意点能作与一条已知曲线相切的直线的最大数目称为这条曲线的级(class). 因此一个点是个一级的包络，因为过任意一点只能作一条直线通过它. 圆是一条二级曲线，因为过一点最多能作两条切线与一个已知圆相切.

另一方面，一级的直线集必定通过同一个点，但是二级的直线集不一定包络出一个圆.

III 对偶原理

7. 几何命题有两类——要么涉及与一个图形有关的某些点或直线的相互位置，要么直接或间接地牵涉到度量的概念. 在前一情形中，它们被称为描述性(descriptive)命题，在后一种情形中的被称为度量性(metrical)命题. 欧几里得《几何原本》前六卷中包含的命题基本上都是度量性质的. 实际上，其中没有一个命题能被称为是纯粹描述性的. [3]

在关于点集合图形的描述性命题和关于对应的线集合图形的描述性命题之间，存在着一种非同寻常的类推关系. 任意两个图形，其中一个图形中的点对应于另外一个图形中的直线，则它们称为是互倒形(reciprocal figures). 将会发现，当关于任一图形的一个命题已被证明了，则对于倒形的相应命题可以仅仅通过互换“点”和“直线”，“轨迹”和“包络”，“两条直线的交点”和“联结两点的直线”等术语而得以阐明. 这样的两个命题称为是互倒的(reciprocal)或对偶的(dual)，而倒命题的真实性可以从我们称为对偶原理(principle of duality)的规则中推断出来.

对偶原理在几何学研究中扮演了一个重要的角色. 根据一般性的推理，倒命题是自明的，但在这本专著中，当它们出现时，我们将进行独立的证明，而在后面留出一章给出这一原理正确性的一个规范证明.

IV 连续性原理

8. 连续性原理是近代几何学中一个极为重要的原理，最先是由开普勒(Kepler)明确阐述的，之后由博斯科维克(Boscovich)进行了发展；但直至彭赛列(Poncelet)的“Traité des Propriétés Projectives”在1822年出版后，它才被普遍接受.

这一原理宣称，如果从一个特定问题的性质中我们期望得到一定数目的解，并且在一些特殊情形中，我们求得了这一数目的解，那么在所有的情形中都将存在同样数目的解，尽管这些解中的一些可能是虚的. 例如，可以作一条直线与一个圆交于两个点，则我们说每条直线都与一个圆相交于两个点，尽管这些交点可能是虚的，或是重合的. 类似的，我们说从任意一点能对一个圆作出两条切线，但是它们可能是虚的或重合的.

实际上，这一原理断言涉及实点和实直线的定理可以扩充至虚点或虚直线. [4]