# 高等数学实训教程

主编 干国胜 肖海华 孙旭东

高等教育出版社

# 高等数学实训教程

Gaodeng Shuxue Shixun Jiaocheng

主　编　干国胜　肖海华　孙旭东
副主编　李爱萍　王燕娜　张　洋

高等教育出版社·北京

内容提要

Mathematica 是 Wolfram Research 公司的著名数学软件，以符号计算见长，同时具有高精度的数值计算、强大的图形和动画等多媒体集成功能。本书通过该软件构建数学模型演示抽象的数学概念和思想，引导学生动手操作数学，在实践中提升数学素养和培养学生理解和应用数学的能力。

本书内容包括：函数与极限、导数及其应用、积分、常微分方程、向量代数与空间图形的绘制、多元函数微积分、无穷级数、Mathematica 软件常用的操作命令。

本书可作为高等院校学生学习高等数学课程的实训教程、数学实验和数学建模的辅助教材、数学教学的辅助工具、科研和工程人员科学计算的参考教材。

**图书在版编目(CIP)数据**

高等数学实训教程/干国胜，肖海华，孙旭东主编. --北京:高等教育出版社,2014.10(2015.4 重印)
ISBN 978-7-04-041194-2

Ⅰ.①高… Ⅱ.①干… ②肖… ③孙… Ⅲ.①高等数学-高等职业教育-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 228612 号

策划编辑 曹京华　责任编辑 崔梅萍　封面设计 王 洋　版式设计 童 丹
插图绘制 尹文军　责任校对 刘娟娟　责任印制 毛斯璐

| | | | |
|---|---|---|---|
| 出版发行 | 高等教育出版社 | 咨询电话 | 400-810-0598 |
| 社　　址 | 北京市西城区德外大街 4 号 | 网　　址 | http://www.hep.edu.cn |
| 邮政编码 | 100120 | | http://www.hep.com.cn |
| 印　　刷 | 国防工业出版社印刷厂 | 网上订购 | http://www.landraco.com |
| 开　　本 | 787mm×960mm 1/16 | | http://www.landraco.com.cn |
| 印　　张 | 11.5 | 版　　次 | 2014 年 10 月第 1 版 |
| 字　　数 | 210 千字 | 印　　次 | 2015 年 4 月第 2 次印刷 |
| 购书热线 | 010-58581118 | 定　　价 | 19.70 元 |

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 41194-00

# 前 言

迄今为止，数学科学的巨大发展，比以往任何时代都更牢固地确立了它作为整个科学技术的基础的地位。数学帮助人们探讨原因、量化过程、控制风险、优化管理、合理预测等，它正突破传统的应用范围向几乎所有的人类知识领域渗透，并越来越直接地为人类物质生产与日常生活做出贡献。同时，数学作为一种文化，已成为人类文明进步的标志。因此，对于当今社会每一个有文化的人士而言，不论他从事何种职业，都需要学习数学，了解数学和运用数学。

微积分是人类文明发展史上理性智慧的精华，微积分的理论与方法已经在自然科学、社会科学和工程技术等领域发挥着重要作用，它提供给人们的不仅是一种高级的数学技术，而且是一种(数学)文化和美的熏陶。

Mathematica 在技术计算领域带来的重大革新，正在改变明天的课堂。美国 Macword 杂志称 Mathematica 为“不只是一个软件，更是一场划时代的革命”。本书为学生的高等数学实训教材，充分发挥了此软件的优势，渗透于微积分的教学过程中。

本书的编写遵循以下原则：注重概念的实际背景和直观描述，强化理解基本的数学思想；利用软件构建数学模型演示抽象的数学概念；充分运用 Mathematica 软件进行快速准确的计算，使繁琐的计算简单化，引导学生动手操作数学、应用数学，培养学生运用数学的能力，从而不断提高学生学习数学的主动性和积极性。

此外，书末附录中的 Mathematica 操作命令一览表，可供学习时查阅、参考，更多的命令或命令详细说明可查阅软件的系统帮助。

参加本书编写的有：于国胜、肖海华、孙旭东、李爱萍、王燕娜、张洋、李波、李松、黄琳、项楷尧、姜秋明、范光、彭先萌、王旭吾、潘佳麟、常星星、王妍婷。高等教育出版社曹京华、崔梅萍和张倩在本书编排过程中提供了很多帮助和支持，在此一并表示衷心感谢。

由于时间仓促，编者水平有限，书中难免有不妥之处，热忱希望有关专家、读者批评指正！

编 者

2014 年 7 月

# 目　　录

# 第一章　函数与极限

## 1.1　函数

### 1.1.1　认识函数

什么是函数？有的同学说："函数是变量与变量之间的依赖关系.函数是用一个变量去认识另一个变量,用一个变量去控制另一个变量.函数是微积分研究的对象,极限是微积分研究函数的工具."用文字描述函数,不同同学描述得会不尽相同,但都表达了自己对函数的认识,是应当肯定的！如果用文字描述函数,你的描述是怎样呢？请把它写在下面的空行上.

用文字描述函数,尽管不够精确,但对数学概念的理解是非常有帮助的.

**早期函数概念**

17 世纪伽利略在《两门新科学的对话》一书中,几乎全部包含函数或称为变量关系的这一概念,用文字和比例的语言表达函数的关系.1637 年前后笛卡儿在他的解析几何中,已注意到一个变量对另一个变量的依赖关系,但因当时尚未意识到要提炼函数概念,因此直到 17 世纪后期牛顿、莱布尼茨建立微积分时还没有人明确函数的一般意义,大部分函数是被当做曲线来研究的.

1673 年,莱布尼茨首次使用"function"(函数)表示"幂",后来他用该词表示曲线上点的横坐标、纵坐标、切线长等曲线上点的有关几何量.与此同时,牛顿在微积分的讨论中,使用"流量"来表示变量间的关系.

**18 世纪**

1718 年约翰·伯努利在莱布尼茨函数概念的基础上对函数概念进行了定义:"由任一变量和常数的任一形式所构成的量."他的意思是所有变量 $x$ 和常量构成的式子都叫做 $x$ 的函数,并强调函数要用公式来表示.

1748 年,欧拉在其《无穷分析引论》一书中把函数定义为:“一个变量的函数是由该变量的一些数或常量与任何一种方式构成的解析表达式.”他把约翰·伯努利给出的函数定义称为解析函数,并进一步把它区分为代数函数和超越函数,还考虑了“随意函数”.不难看出,欧拉给出的函数定义比约翰·伯努利的定义更普遍、更具有广泛意义.

1755 年,欧拉给出了另一个定义:“如果某些变量,以某一种方式依赖于另一些变量,即当后面这些变量变化时,前面这些变量也随着变化,我们把前面的变量称为后面变量的函数.”

**19 世纪**

1821 年,柯西从定义变量起给出了定义:“在某些变数间存在着一定的关系,当一经给定其中某一变数的值,其他变数的值可随之确定时,则将最初的变数叫自变量,其他各变数叫做函数.”在柯西的定义中,首先出现了自变量一词,同时指出对函数来说不一定要有解析表达式.不过他仍然认为函数关系可以用多个解析式来表示,这是一个很大的局限.

1822 年傅里叶发现某些函数可以用曲线表示,也可以用一个式子表示,或用多个式子表示,从而结束了函数概念是否以唯一一个式子表示的争论,把对函数的认识又推进了一个新层次.

1837 年狄利克雷突破了这一局限,认为怎样去建立 $x$ 与 $y$ 之间的关系无关紧要,他拓广了函数概念,指出:“对于在某区间上的每一个确定的 $x$ 值,$y$ 都有一个确定的值,那么 $y$ 叫做 $x$ 的函数.”这个定义避免了函数定义中对依赖关系的描述,以清晰的方式被所有数学家接受.这就是人们常说的经典函数定义.

等到康托尔创立的集合论在数学中占有重要地位之后,维布伦用“集合”和“对应”的概念给出了近代函数定义,通过集合概念把函数的对应关系、定义域及值域进一步具体化了,且打破了“变量是数”的极限,变量可以是数,也可以是其他对象.

**现代概念**

1914 年豪斯道夫在《集合论纲要》中用不明确的概念“序偶”来定义函数,其避开了意义不明确的“变量”、“对应”概念.库拉托夫斯基于 1921 年用集合概念来定义“序偶”使豪斯道夫的定义更严谨了.

1930 年新的现代函数定义为“若对集合 $M$ 的任意元素 $x$,总有集合 $N$ 确定的元素 $y$ 与之对应,则称在集合 $M$ 上定义一个函数,记为 $y=f(x)$.元素 $x$ 称为自变元,元素 $y$ 称为因变元.”

在中国清代数学家李善兰(1811—1882)翻译的《代数学》一书中首次用中文把“function”翻译为“函数”,此译名沿用至今.对于为什么这样翻译这个概

念，书中解释说“凡此变数中函彼变数者，则此为彼之函数”；这里的“函”是包含的意思.

### 1.1.2 Mathematica入门

Mathematica 是由美国 Wolfram 公司研究开发的一个数学软件，本书的版本为 Mathematica 9.0. 它的语法规则简单，操作语言与人们的日常语言非常相近. 在功能方面，除数值计算外，还有强大的符号运算功能和制图功能. 由于 Mathematica 能给出问题的解析符号解，从而使得用户能用该软件方便地处理微积分、微分方程、线性代数和规划优化等各类问题. 现在，Mathematica 软件已在工程、科研、教学等各个领域被广泛使用.

**1. Mathematica 的启动和运行**

运行 Mathematica 9.0，在屏幕上显示是 Mathematica 笔记本窗口，系统暂时取名“未命名-1”，直到用户保存时重新命名为止(图 1-1).

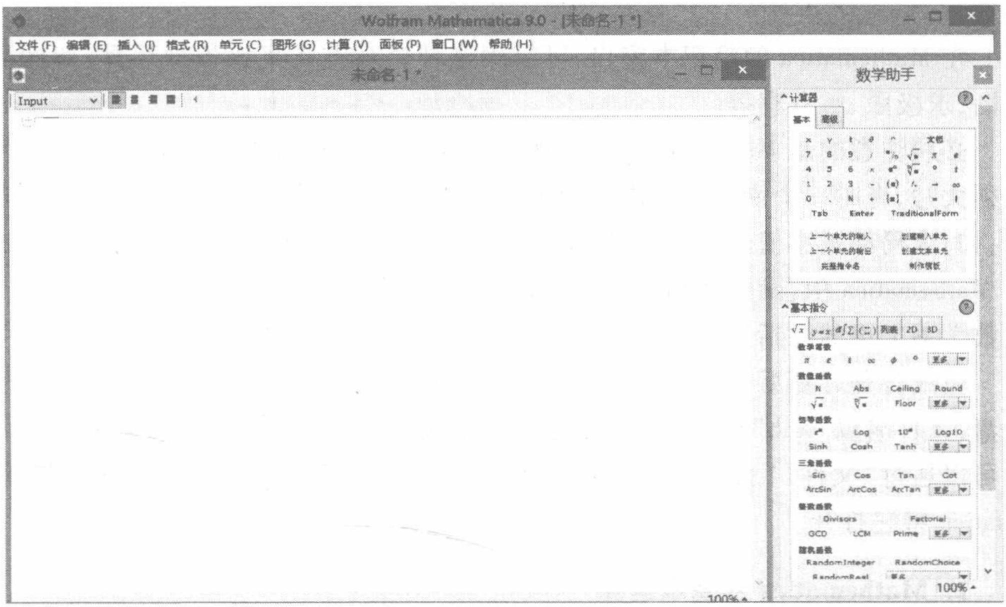


图 1-1

输入 2+3，然后按下 Shift+Enter 键或按右边小键盘的 Enter 键，这时系统开始计算并输出计算结果，并给输入和输出附上次序标识 In[1]和 Out[1]，注意 In[1]是计算后才出现的；再输入第二个表达式，要求系统在$[0,2\pi]$上画出函数 $y=\sin x+\cos 3x$ 的图形，按 Shift+Enter 输出计算结果后，系统分别将其标识为

In[2]和 Out[2],如图 1-2 所示.

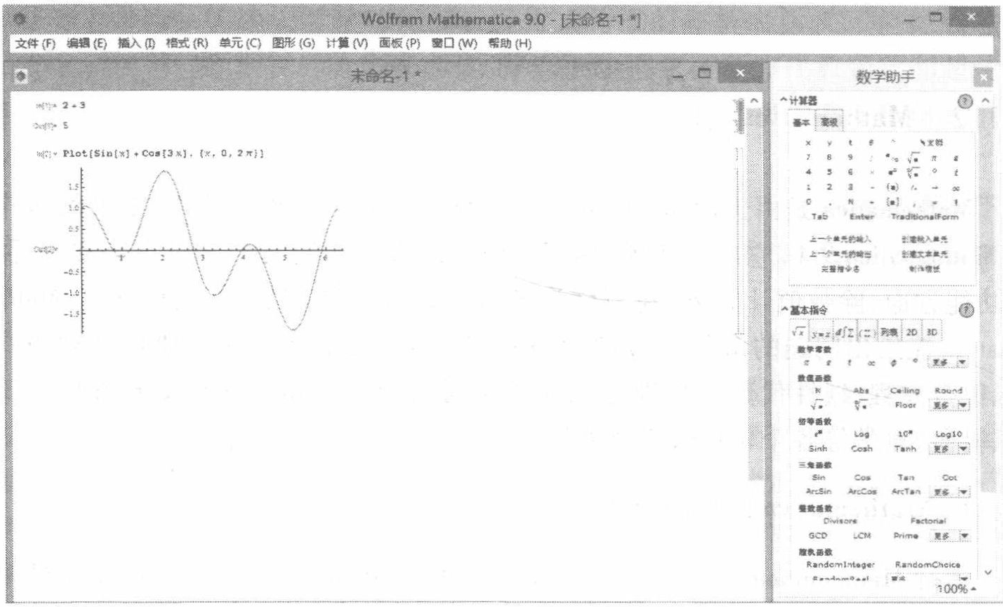


图 1-2

在 Mathematica 的笔记本窗口,可以用这种交互方式完成各种运算,如函数作图,求极限、解方程等.

必须注意的是 Mathematica 严格区分大小写,一般地,内建函数的首写字母必须大写,有时一个函数名是由几个单词构成,则每个单词的首写字母也必须大写,如:求局部极小值函数 FindMinimum[f[x],{x,$x_0$}]等. 第二点要注意的是,在 Mathematica 中,函数名和自变量之间的分隔符是用方括号"[ ]",而不是一般数学书上用的圆括号"( )".

完成各种计算后,点击"文件""退出"退出,如果文件未存盘,系统提示用户存盘,文件名以".nb"作为后缀,称为笔记本文件. 以后想使用本次保存的结果时可以通过"文件""打开"菜单读入,也可以直接双击它,系统自动调用 Mathematica 将它打开.

### 2. Mathematica 的基本运算

**例 1** 计算 $5^2\times2-10\div(8-3)$.

**解** In[1]:=$5^2\times2-10/(8-3)$

Out[1]=48

说明:(1) 乘法还可以用"*"和空格表示,如 2×3=2*3=2 3=6.

(2) 乘方还可以用"^"表示,如 $5^2$=5^2.

**例 2** 求 $\pi^2$ 的近似值(保留 6 位有效数字).

**解** In[1]:=N[π^2,6]

Out[1]=9.86960

说明:(1) N[ ]在 Mathematica 中表示近似运算,N[ ]的语法如下:

N[表达式]可求 5 位有效数字的近似值;

N[表达式,n]可求 n 位有效数字的近似值.

(2) Mathematica 中定义了一些常见的数学常数,这些数学常数都是精确数.

| | |
|---|---|
| Pi | 表示 $\pi=3.14159\cdots$ |
| E | 自然对数的底 $e=2.71828\cdots$ |
| Degree | 1 度,$\pi/180$ 弧度 |
| I | 虚数单位 i |
| Infinity | 无穷大∞ |
| -Infinity | 负无穷大-∞ |

**例 3** 计算多项式 $3x^2-5x-2$ 和 $x^2-4$ 的和、差、积、商.

**解** In[1]:=$(3x^2-5x-2)+(x^2-4)$

$(3x^2-5x-2)-(x^2-4)$

$(3x^2-5x-2)\times(x^2-4)$

$(3x^2-5x-2)/(x^2-4)$

Out[1]=$-6-5\ x+4\ x^2$

Out[2]=$2-5\ x+2\ x^2$

Out[3]=$(-4+x^2)(-2-5\ x+3\ x^2)$

Out[4]=$\dfrac{-2-5x+x^2}{-4+x^2}$

说明:Mathematica 提供一组按不同形式表示代数式的函数,命令语法格式及其意义:

| | |
|---|---|
| Expand[多项式] | 按升幂展开多项式 |
| ExpandAll[多项式] | 全部展开多项式 |
| Factor[多项式] | 对多项式进行因式分解 |
| FactorTerms[多项式,{x,y,…}] | 按变量 $x,y,\cdots$ 进行分解 |
| Simplify[多项式] | 把多项式化为最简形式 |
| FullSimplify[多项式] | 把多项式化简 |
| Collect[多项式,x] | 把多项式按 $x$ 幂展开 |
| Collect[多项式,{x,y…}] | 把多项式按 $x,y\cdots$ 的幂次展开 |

Solve[方程(组),vars]　　　　　　求解关于变量(组)vars 的方程或方程组

Reduce[不等式(组),vars]　　　　求解关于变量(组)vars 的不等式

**例 4**　展开多项式$(-4+x^2)(-2-5x+3\ x^2)$.

**解**　In[1]:=Expand[$(-4+x^2)\ (-2-5x+3x^2)$]

Out[1]=$8+20\ x-14\ x^2-5\ x^3+3\ x^4$

**例 5**　对多项式 $3x^2-5x-2$ 因式分解.

**解**　In[1]:=Factor[$3x^2-5x-2$]

Out[1]=$(-2+x)(1+3x)$

**例 6**　解方程(组)和不等式

(1) $x^2+ax+1=0$;　　　　(2) $\begin{cases} ax+y=7, \\ bx-y=1; \end{cases}$　　　　(3) $x^2-7x-8<0$.

**解**　(1) In[1]:=Solve[x^2+a x+1==0,x]

Out[1]=$\left\{\left\{x\to\frac{1}{2}(-a-\sqrt{-4+a^2})\right\},\left\{x\to\frac{1}{2}(-a+\sqrt{-4+a^2})\right\}\right\}$

(2) In[2]:=Solve[{a x+y==7,b x-y==1},{x,y}]

Out[2]=$\left\{\left\{x\to\frac{8}{a+b},y\to-\frac{a-7b}{a+b}\right\}\right\}$

(3) In[3]:=Reduce[$x^2-7x-8<0$,x]

Out[3]=$-1<x<8$

说明:输入方程时必须用“==”代替“=”.

### 1.1.3　函数图形与性质

#### 1. 定义函数

定义函数的语法为 f[x_]=expr,函数名为 f,自变量为 x,expr 是表达式. 在执行时会把 expr 中的 x 都换为 f 的自变量 x(不是 x_).

**例 7**　定义 $f(x)=3x^2-5x-2$,计算 $f(3)$ 和 $f\left(\frac{1}{3}\right)$.

**解**　In[1]:=f[x_]=$-2-5x+3x^2$

Out[1]=$-2-5\ x+3\ x^2$

In[2]:=f[x]/. x→3

Out[2]=10

In[3]:=f$\left[\frac{1}{3}\right]$

$\mathrm{Out}[3]=-\frac{10}{3}$

说明:(1) $f[x]/.\ x\to x_0$ 或 $f[x_0]$ 表示变量替换运算,即用 $x_0$ 替换 $f(x)$ 中的 x.

(2) 当用户使用完一个定义函数时,最好清除该函数定义. 否则,当在同一 Mathematica 进程的后面使用同名函数,但用于不同的目的时,将会遇到麻烦. 用户可以用 Clear[f] 清除 f 函数或符号的所有定义.

**构造函数**

**例 8** 已知 $f(x)=x-1$,$g(x)=x^2$,求

(1) $f[g(x)]$、$g[f(x)]$;(2) $g(\sin x)$;(3) $2[f(x)]^2\cdot g(x)-x^4$.

**解** In[1]:=f[x_]=x-1

g[x_]=$x^2$

Out[1]=-1+x

Out[2]=$x^2$

(1) In[3]:=f[g[x]]

g[f[x]]

Out[3]=-1+$x^2$

Out[4]=$(-1+x)^2$

(2) In[5]:=g[Sin[x]]

Out[5]=$\mathrm{Sin}[x]^2$

(3) In[6]:=2(f[x])$^2$ * g[x]-$x^4$

Out[6]=$2(-1+x)^2x^2-x^4$

In[7]:=Expand[$2(-1+x)^2x^2-x^4$]

Out[7]=$2x^2-4x^3+x^4$

**函数迭代**

求函数迭代,命令语法格式如下:

Nest[f,expr,n]　　返回一个将 f 作用于 expr 上 n 次后得到的表达式.

**例 9** 已知 $f(x)=\frac{1}{1+x}$,求 $f[f[f[f[f(x)]]]]$.

**解** In[1]:=f[x_]:=$\frac{1}{1+x}$;Nest[f,x,5]

$$\mathrm{Out}[1]=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+x}}}}}$$

$$\text{In[2]:=Simplify}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}}}}\right]$$

$$\text{Out[2]=}\frac{5+3x}{8+5x}$$

**反函数**

- 求反函数,命令语法格式如下:

InverseFunction[f][x]

表示纯函数 $f$ 的反函数,$x$ 为反函数自变量.

- 纯函数是一种没有函数名字的函数,其命令的语法格式为:

Function[自变量,函数表达式]

纯函数常常用缩略式表示,其中用 & 代表 Function,#代表自变量.

**例 10** 已知 $f(x)=\ln x$.(1)给出 $f(x)$ 纯函数;(2)求 $f(x)$ 的反函数;(3)画出原函数和反函数的图形.

**解** In[1]:=f=Log[#]&;InverseFunction[f][x]

Out[1]=$e^x$

In[2]:=Plot[{Log[x],$e^x$,x},{x,-2.,2.},PlotRange→2]

Out[2]=

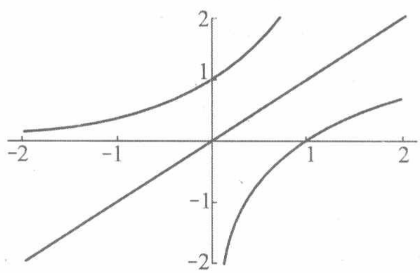


图 1-3

**例 11** 已知 $f(x)=y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$,求 $f^{-1}(x)$.

**解** $\text{In[1]:=InverseFunction}\left[\dfrac{a\#+b}{c\#+d}\&\right][x]$

$$\text{Out[1]=}\frac{-b+dx}{a-cx}$$

**2. 用 Mathematica 作平面曲线**

(1) 作函数 $y=f(x)$ 的图形. 在区间 $(a,b)$ 内作函数 $y=f(x)$ 的图形的语法:

Plot[f(x),{x,a,b}]

**例 12** 作出函数 $y=\sin x+\cos 3x, x\in[0, 2\pi]$ 上的图形.

**解** In[1]:=Plot[Sin[x]+Cos[3x],{x,0,2π}]

Out[1]=

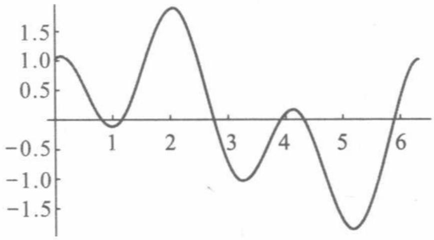


图 1-4

(2) 作曲线 $F(x,y)=0$ 的图形. 在 $x\in(a,b)$ 和 $y\in(c,d)$ 范围作曲线 $F(x,y)=0$ 的图形的语法:

ContourPlot[F(x,y)==0,{x,a,b},{y,c,d}]

**例 13** 画单位圆: $x^2+y^2=1$, 其中 $x\in(-1,1)$ 和 $y\in(-1,1)$.

**解** In[1]:=ContourPlot[x^2+y^2==1,{x,-1,1},{y,-1,1},Axes→True, Frame→False]

Out[1]=

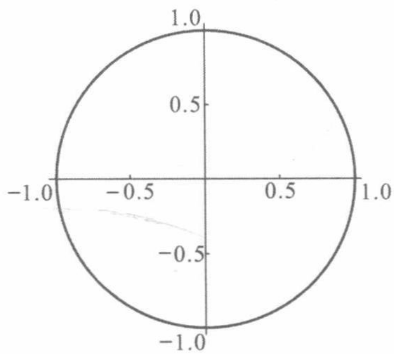


图 1-5

(3) 作参数方程的图形, 其命令的语法格式:

ParametricPlot[{fx,fy},{u,$u_{min}$,$u_{max}$}]

表示产生一个 $x$ 和 $y$ 坐标的参数方程的图形，其中 fx 和 fy 作为 u 的函数产生.

**例 14**　画参数方程 $\begin{cases} x=\sin t, \\ y=\sin 2t \end{cases}$ 的曲线.

**解**　In[1]:=ParametricPlot[{Sin[t],Sin[2t]},{t,0,2Pi}]

Out[2]=

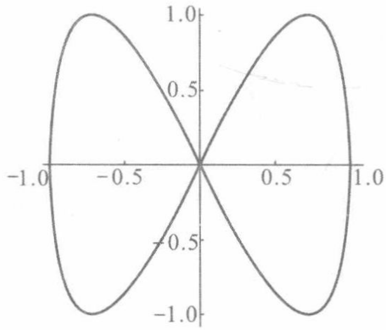


图 1-6

（4）作极坐标方程的图形，其命令的语法格式：

PolarPlot[{ρ,{θ,$\theta_{min}$,$\theta_{max}$}]

表示产生一个半径为 $\rho$ 的曲线极坐标图，作为角度 $\theta$ 的函数.

**例 15**　画心形线：$r=2(1+\cos t)$，$t\in[-\pi,\pi]$.

**解**　In[1]:=PolarPlot[2(1+Cos[t]),{t,-π,π}]

Out[1]=

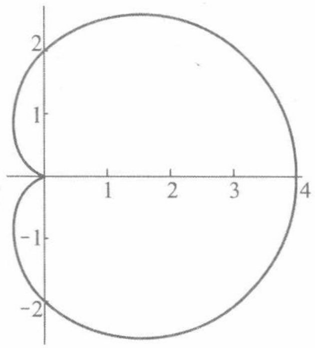


图 1-7

（5）作散点图，其命令的语法格式：

DiscretePlot[expr,{n,nmax}]