高等代数

郭 嵩 主编

科学出版社

高 等 代 数

郭　嵩　主编

科 学 出 版 社

北　京

内容简介

高等代数是普通高等院校数学专业的基础课程. 本书包括高等代数课程的标准内容：多项式、行列式、矩阵、线性方程组、线性空间、线性变换、二次型、欧几里得空间等. 本书的写作力求简洁易懂，编写中注意到初等代数与高等代数知识的衔接，并加入一些体现两者联系的问题和实例. 希望本书包含的大量在实际生活与后续课程中的应用，能够开拓读者的思路，进一步提升读者学习的兴趣.

本书可作为普通高等院校数学专业本科生、专科生的高等代数教材，也可供理工科非数学专业的教师和学生参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等代数 / 郭嵩主编. —北京：科学出版社，2016.12
ISBN 978-7-03-051544-5

Ⅰ. ①高… Ⅱ. 郭… Ⅲ. ①高等代数-高等学校-教材 Ⅳ. ①O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 006753 号

责任编辑：胡海霞 /责任校对：彭　涛
责任印制：张　伟 /封面设计：迷底书装

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京京华虎彩印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2016 年 12 月第　一　版　开本：720×1000 1/16
2016 年 12 月第一次印刷　印张：17 5/8
字数：346 000
定价：49.00 元
（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　　言

高等代数是普通高等院校数学专业的一门重要的基础课. 这一课程的教学，能使学生进一步提高专业知识水平，为学生整个大学阶段的数学学习提供一些必要的代数基础理论和知识，也能使学生接受严谨的数学训练，培养自己的抽象思维、逻辑推断能力以及迅速准确的运算能力，并从中学习数学的思想方法，感受数学的深刻内涵.

高等代数是中学代数的延拓. 线性方程组、矩阵成为连接中学代数和高等代数的桥梁. 经过高等代数课程的学习，学生们能对初等代数内容有更为深入的了解，并能从更高维度处理中学数学的一些问题，如此可使学生们的知识体系贯穿中学和大学，形成一个有机整体. 这些能力对师范院校数学专业的学生尤其重要. 随着中小学教学改革的进行和教师资格证国家考试制度的实施，中小学数学教师岗位更为迫切地需要具备创新性思维、具有独立思考能力、能够灵活运用专业知识的高素质人才.

高等代数也是一门应用广泛的课程. 它包含的知识不仅为数学专业的后继课程(如近世代数、离散数学、计算方法、微分方程等)做准备，也在很多有实际应用的学科和领域广泛使用. 尤其本世纪，在计算机技术、通讯信息技术和现代生物工程技术等热门的学科领域中，越来越多的代数学的理论和方法被应用. 本书也将提供一些这样的应用实例.

本书的编者们讲授高等代数、线性代数等课程多年，积累了大量代数课程教学的素材和经验，早有意于编写一部适合新时代潮流、适合师范院校数学专业教学的高等代数教材. 这一愿望终于在科学出版社的支持下得以实现. 本书的编写分工为：张海辉编写第 1 章，郭嵩编写第 2 章及全书各章中实用部分的内容，胡宏、唐娜编写第 3、4 章，房剑平编写第 5、6 章，张新建编写第 7 章，雷雪萍编写第 8 章，最后由郭嵩负责全书的统稿和校对.

本书在编写过程中得到了许多同行的支持与帮助，借此表示诚挚的谢意. 由于编者水平有限，不妥之处在所难免，希望广大读者批评指正.

编　者

2016 年 9 月

目　　录

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

第1章 多 项 式

多项式理论是高等代数的一个重要组成部分，多项式的内容是中学代数中的重要内容，因此，大家应该对本章的内容并不陌生. 但是，中学是以多项式的具体运算为主，而这里将以多项式的理论为主. 也就是说，这里讨论的多项式主要侧重于一般性的规律，比起初等代数更具有抽象性. 多项式不仅是中学代数的主要内容之一，也是代数学的一个基本概念，在数学本身和实际应用中都很常见，因此有必要系统地学习这部分内容.

多项式是一类最常见、最简单的函数，它的应用非常广泛，多项式的一些重要定理和方法，不仅在解决实际问题时常常用到，而且在进一步学习代数以及其他数学课程时也经常会碰到. 在中学代数里，我们曾经学习过多项式的运算. 本章将在复习这些内容的基础上，进一步讨论关于一元多项式的一些理论，例如，最大公因式的性质、求法，以及多项式的因式分解等问题.

1.1 一元多项式

定义 1.1.1 设 P 是一个数域，x 为一个符号(或称为文字)，n 是一个非负整数，形式表达式

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \tag{1.1.1}$$

称为系数在数域 P 中的 x 的一元多项式，或简称为数域 P 上的 x 的一元多项式，其中 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是属于数域 P 中的数.

式(1.1.1)中，a_ix^i 称为 i 次项，a_i 称为 i 次项的系数. 以后用 $f(x), g(x), h(x), \cdots$ 或 $f, g, h, \cdots$ 来表示多项式.

注意，这里定义的多项式是符号或文字的一个形式表达式，当符号(或文字) x 是未知数时，式(1.1.1)即为在中学所学代数中的多项式. 这个符号还可代表其他待定事物，如矩阵、向量等. 为了能统一研究未知数和其他选定事物的多项式，才如此抽象定义上述形式表达式.

定义 1.1.2 如果多项式

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0\text{，}\quad g(x) = b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1x + b_0$$

的同次项的系数都相等，即 $a_i = b_i (i = 0,1,2,\cdots,n)$，则称多项式 $f(x), g(x)$ 是相等的，记为 $f(x) = g(x)$.

系数全为零的多项式称为零多项式，记为 0.

在式(1.1.1)中，如果项 $a_n x^n$ 的系数 $a_n \neq 0$，则 $a_n x^n$ 称为多项式(1.1.1)的最高次项，a_n 称为最高次项的系数，n 称为多项式(1.1.1)的次数.

多项式 $f(x)$ 的次数记为 $\partial(f(x))$ 或 $\deg(f(x))$.

零多项式不规定次数，是唯一不定义次数的多项式. 零次多项式，也就是非零常数，其次数为 0，要能正确区分零多项式与零次多项式.

例 1 $f(x) = 8x^3 + \dfrac{1}{3}x + 2$ 是有理数域 **Q** 上的 3 次多项式，$g(x) = 4x^4 - \mathrm{i}$ 是复数域 **C** 上的 4 次多项式.

运用求和符号，数域 P 上的多项式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ 可简记为

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i.$$

定义 1.1.3 数域 P 上的所有一元多项式组成的集合记为 $P[x]$，称为数域 P 上的一元多项式环，即

$$P[x] = \left\{ a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in P \right\}, \tag{1.1.2}$$

其中 $i = 0,1,2,\cdots,n$, n 为非负整数.

本节及后面各节的讨论都是在某一固定数域 P 上的多项式环 $P[x]$ 中进行的，以后就不再重复说明了.

设 $f(x), g(x) \in P[x]$，

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0 = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i,$$

如果 $n \geqslant m$, $g(x)$ 也可写作

$$g(x) = 0x^n + 0x^{n-1} + \cdots + 0x^{m+1} + b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0 = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i.$$

定义上述两个多项式 $f(x), g(x) \in P[x]$ 的和与积分别为：

$$f(x) + g(x) = (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_0 + b_0) = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i)x^i,$$

$$f(x)g(x)=a_nb_mx^{n+m}+(a_{n-1}b_m+b_{n-1}a_n)x^{n+m-1}+\cdots+(a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2)x^2$$
$$+(a_1b_0+a_0b_1)x+a_0b_0.$$

分析可知 x^k 前面的系数为

$$a_kb_0+a_{k-1}b_1+a_{k-2}b_2+\cdots+a_2b_k+a_1b_{k-1}+a_0b_k=\sum_{i+j=k}a_ib_j\ ,$$

于是上述两个多项式的乘积可写成

$$f(x)g(x)=c_{n+m}x^{n+m}+c_{n+m-1}x^{n+m-1}+\cdots+c_1x+c_0=\sum_{i=0}^{n+m}c_ix^i=\sum_{k=0}^{n+m}\left(\sum_{i+j=k}a_ib_j\right)x^k.$$

定义两个多项式相减为

$$f(x)-g(x)=f(x)+[-g(x)].$$

例 2 设 $f(x),g(x)\in P[x], f(x)=2x^3+x^2+2x+1, g(x)=x^2-3x-2$，求 $f(x)+g(x)$, $f(x)g(x), f(x)-g(x)$.

解 $f(x)+g(x)=2x^3+2x^2-x-1,\quad f(x)-g(x)=2x^3+5x+3.$

由于 $f(x)g(x)$ 中 x^k 幂的系数为

$$a_kb_0+a_{k-1}b_1+a_{k-2}b_2+\cdots+a_2b_k+a_1b_{k-1}+a_0b_k=\sum_{i+j=k}a_ib_j,$$

依次计算可得

$$f(x)g(x)=2x^5-5x^4-5x^3-7x^2-7x-2.$$

定理 1.1.1 对任意的 $f(x),g(x)\in P[x]$, 且 $f(x)\neq 0, g(x)\neq 0$ ，有

(1) 当 $f(x)+g(x)\neq 0$ 时，$\partial[f(x)+g(x)]\leqslant\max[\partial(f(x)),\partial(g(x))]$；

(2) $\partial[f(x)g(x)]=\partial(f(x))+\partial(g(x))$.

证明 设 $f(x),g(x)\in P[x]$ ，且有

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i,\quad a_n\neq 0,$$

$$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0=\sum_{i=0}^{m}b_ix^i,\quad b_m\neq 0.$$

(1) 设 $n\geqslant m$, $f(x)+g(x)=(a_n+b_n)x^n+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}+\cdots+(a_0+b_0)$, 其中 $b_{m+1}=$

$b_{m+2}=\cdots=b_n=0$，于是 $f(x)+g(x)$ 的次数不能超过 n，得证.

(2) $f(x)g(x)=a_nb_mx^{n+m}+(a_{n-1}b_m+b_{n-1}a_n)x^{n+m-1}+\cdots+(a_1b_0+a_0b_1)x+a_0b_0$，由于 $a_n\neq 0$ 且 $b_m\neq 0$，所以 $a_nb_m\neq 0$，即 $f(x)g(x)$ 的次数为 $n+m$.

数域 P 上的两个多项式的和、差、积仍然是 P 上的多项式. 即对任意的 $f(x),g(x)\in P[x]$, $f(x)\pm g(x)\in P[x], f(x)g(x)\in P[x]$.

和数的运算一样，多项式的运算也满足下述规律. 对任意 $f(x),g(x)\in P[x]$, 有

(1) 加法交换律：$f(x)+g(x)=g(x)+f(x)$.

(2) 加法结合律：$(f(x)+g(x))+h(x)=f(x)+(g(x)+h(x))$.

(3) 乘法交换律：$f(x)g(x)=g(x)f(x)$.

(4) 乘法结合律：$f(x)(g(x)h(x))=(f(x)g(x))h(x)$.

(5) 乘法对加法的分配律：$f(x)(g(x)+h(x))=f(x)g(x)+f(x)h(x)$.

对于多项式的乘法，我们还可以证明乘法满足下述规律.

(6) 乘法消去律：如果 $f(x)g(x)=f(x)h(x)$ 且有 $f(x)\neq 0$，则 $g(x)=h(x)$.

1.2 多项式的整除

在一元多项式环 $P[x]$ 中，可以作加法、减法、乘法三种运算，而且两个多项式的加、减与乘所得到的多项式仍是 $P[x]$ 中的多项式，但是乘法的逆运算除法并不是普遍可以作的. 如中学代数中所学多项式一样，作为形式表达式，也能用一个多项式去除另一个多项式，求得商和余式，在中学中一般用长除法或竖线法来求得两个多项式作除法所得的商与余式. 通过例子来复习一下商与余式的求法.

例 1 求 $g(x)=x^2-3x+1$ 除 $f(x)=2x^4+4x^2-5x+6$ 的商与余式.

解 长除法：

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & & & 2x^2 & +6x & +20 \\
\cline{2-6}
x^2-3x+1 & 2x^4 & & +4x^2 & -5x & +6 \\
 & 2x^4 & -6x^3 & +2x^2 & & \\
\cline{2-6}
 & & 6x^3 & +2x^2 & -5x & +6 \\
 & & 6x^3 & -18x^2 & +6x & \\
\cline{2-6}
 & & & 20x^2 & -11x & +6 \\
 & & & 20x^2 & -60x & +20 \\
\cline{2-6}
 & & & & 49x & -14
\end{array}
$$

由上式可知商为 $2x^2+6x+20$，余式为 $49x-14$.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

竖线法：

$$
\begin{array}{r|r|l}
x^2-3x+1 & 2x^4 \qquad\quad + 4x^2 - 5x + 6 & 2x^2+6x+20 \\
& 2x^4 - 6x^3 + 2x^2 \qquad\qquad & \\ \cline{2-2}
& 6x^3 + 2x^2 - 5x + 6 & \\
& 6x^3 - 18x^2 + 6x \qquad & \\ \cline{2-2}
& 20x^2 - 11x + 6 & \\
& 20x^2 - 60x + 20 & \\ \cline{2-2}
& 49x - 14 &
\end{array},
$$

由上式可知商为 $2x^2+6x+20$ ，余式为 $49x-14$.

上述求法具有一般性，下面就按这个想法来证明一元多项式环的一个基本性质.

1.2.1　带余除法

定理 1.2.1（带余除法定理）　对于一元多项式环 $P[x]$ 中任意两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$, 其中 $g(x)\neq 0$, 一定有 $P[x]$ 中的多项式 $q(x),r(x)$ 存在，使 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$ 成立，其中 $\partial(r(x))<\partial(g(x))$ 或者 $r(x)=0$, 并且这样的 $q(x),r(x)$ 是唯一存在的.

证明　定理中商式 $q(x)$ 及余式 $r(x)$ 的存在性可以由上面所说的除法直接得出，也可用归纳法的语言来叙述.

下面来证唯一性.

设另有多项式 $q'(x),r'(x)$ 使得 $f(x)=q'(x)g(x)+r'(x)$ 成立，且满足 $\partial(r'(x))<\partial(g'(x))$ 或者 $r'(x)=0$. 于是有

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x)=q'(x)g(x)+r'(x),$$

即有

$$(q(x)-q'(x))g(x)=r'(x)-r(x).$$

如果 $q(x)\neq q'(x)$ ，又根据题意有 $g(x)\neq 0$ ，则有 $r'(x)-r(x)\neq 0$ ，且有

$$\partial(q(x)-q'(x))+\partial(g(x))=\partial(r'(x)-r(x)),$$

但是 $\partial(g(x))>\partial(r'(x)-r(x))$ ，所以上式不可能成立，因此 $q(x)=q'(x)$ ，从而 $r'(x)=r(x)$. 得证.

1.2.2　整除性

定义 1.2.1　设 $f(x),g(x)\in P[x]$, $g(x)$ 称为整除 $f(x)$ ，如果存在 $h(x)\in P[x]$, 使

等式 $f(x)=g(x)h(x)$ 成立，用 $g(x)\mid f(x)$ 表示 $g(x)$ 整除 $f(x)$，用 $g(x)\nmid f(x)$ 表示 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$.

当 $g(x)\mid f(x)$ 时，$g(x)$ 称为 $f(x)$ 的因式，$f(x)$ 称为 $g(x)$ 的倍式.

当 $g(x)\neq 0$, 带余除法给出了整除性的一个判别法.

例 2 因为 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$, 所以 $x-1$ 能整除 x^3-1，称 $x-1$ 是 x^3-1 的因式，x^3-1 是 $x-1$ 的倍式.

例 3 $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$，所以 $x-1$ 是 x^n-1 的因式.

下面总结几个常见的整除性相关的结论.

性质 1.2.1 (1) 任意多项式都能整除它自己；

(2) 零多项式是任意多项式的倍式，而零多项式的倍式只有零多项式；

(3) 零次多项式是任意多项式的因式，而零次多项式的因式只有零次多项式.

性质 1.2.1 给出了当除式 $g(x)$ 为零多项式或非零常数时，判断除式 $g(x)$ 能否整除被除式 $f(x)$ 的方法. 一般情形下，如果 $g(x)\neq 0$, 可以用带余除法来判断 $g(x)$ 能否整除 $f(x)$.

定理 1.2.2 设 $f(x),g(x)\in P[x]$, 其中 $g(x)\neq 0$, 则 $g(x)$ 整除 $f(x)$ 的充分必要条件是 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式为零.

证明 若余式 $r(x)=0$, 则 $f(x)=g(x)h(x)$, 即 $g(x)\mid f(x)$. 反之，如果有 $g(x)\mid f(x)$, 则存在 $q(x)\in P[x]$, 使得满足 $f(x)=q(x)g(x)=q(x)g(x)+0$, 即余式 $r(x)=0$.

带余除法中，$g(x)$ 必须不等于零. 但在 $g(x)\mid f(x)$ 中，$g(x)$ 可以为零，此时 $f(x)=g(x)\cdot h(x)=0$. 在 $g(x)\mid f(x)$ 时，如果 $g(x)\neq 0$, 可以用 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 表示 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得的商.

在讨论整除性问题时，一般情形下，除了具体计算或直接由定义验证外，还可运用性质 1.2.1 讨论. 此外，还有一些常用到的关于多项式整除性的结论，我们把这些总结成下述性质，以便应用.

性质 1.2.2 (1) 如果 $g(x)\mid f(x), f(x)\mid g(x)$, 那么 $f(x)=cg(x)$, 式中 c 是一个非零常数；

(2) 如果 $h(x)\mid g(x), g(x)\mid f(x)$, 那么 $h(x)\mid f(x)$；

(3) 如果 $g(x)\mid f_1(x), g(x)\mid f_2(x)$, 那么对任意多项式 $u(v), v(x)\in P[x]$, 有

$$g(x)\mid u(x)f_1(x)+v(x)f_2(x).$$

证明 (1) 设 $g(x)\mid f(x), f(x)\mid g(x)$, 如果 $f(x),g(x)$ 中有一个是零多项式，那么另一个一定也等于 0，因此任取一个非零常数 c，有 $f(x)=cg(x)$.

如果 $f(x),g(x)$ 均不是零多项式，则假设 $g(x)\mid f(x), f(x)\mid g(x)$, 存在 $q_1(x)$,

$q_2(x)\in P[x]$, 使得

$$f(x)=g(x)q_1(x),g(x)=f(x)q_2(x),$$

因此 $f(x)=f(x)q_1(x)q_2(x)$. 又因为 $f(x)\neq 0$, 所以 $q_1(x)q_2(x)$ 也不为零, 比较上面等式两边的次数, 可得 $\partial(q_1(x)q_2(x))=0$, 因此 $\partial(q_1(x))=0$, $q_1(x)$ 是一个非零常数 $c, f(x)=cg(x)$.

(2) 如果 $h(x)\mid g(x),g(x)\mid f(x)$, 则有 $q_1(x),q_2(x)\in P[x]$, 使得

$$f(x)=g(x)q_1(x),\quad g(x)=h(x)q_2(x),$$

因此有 $f(x)=h(x)[q_1(x)q_2(x)]$, 所以 $h(x)\mid f(x)$.

(3) 如果 $g(x)\mid f_1(x),g(x)\mid f_2(x)$, 则有 $q_1(x),q_2(x)\in P[x]$, 使得

$$f_1(x)=g(x)q_1(x),\quad f_2(x)=g(x)q_2(x),$$

因此

$$u(x)f_1(x)+v(x)f_2(x)=g(x)[u(x)q_1(x)+v(x)q_2(x)],$$

所以 $g(x)\mid(u(x)f_1(x)+v(x)f_2(x))$.

上述性质可以推广到多个多项式的情形, 此处不再推广展开.

最后, 我们指出, 两个多项式之间的整除关系不因为系数域的扩大而改变. 即若 $f(x),g(x)\in P[x],\overline{P}(\supset P)$ 是一个较大的数域, 当然有 $f(x),g(x)\in\overline{P}[x]$, 则 $g(x)$ 在 $P[x]$ 中整除(或不能整除) $f(x)$ 时, $g(x)$ 在 $\overline{P}[x]$ 中也整除(或不能整除) $f(x)$.

1.3 最大公因式

1.3.1 最大公因式

设 P 是一个数域, $h(x),f(x),g(x)\in P[x]$, 如果 $h(x)$ 是 $f(x)$ 的因式, 又是 $g(x)$ 的因式, 即 $h(x)\mid f(x),h(x)\mid g(x)$, 则称 $h(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公因式.

例 1 $x-1$ 是 x^2-1 与 x^2-2x+1 的公因式.

定义 1.3.1 设 $f(x),g(x)$ 是 $P[x]$ 中的两个多项式, $P[x]$ 中多项式 $d(x)$ 称为 $f(x)$, $g(x)$ 的一个最大公因式, 如果它满足下面两个条件:

(1) $d(x)$ 是 $f(x),g(x)$ 的公因式;

(2) $f(x),g(x)$ 的任何公因式全是 $d(x)$ 的因式.

例 2 $x-1,x+1,x^2-1$ 都是 x^4-2x^2+1,x^4-1 的公因式, x^2-1 是它们的最大公因式.

关于最大公因式有下面一些基本结论：

(1) 两个零多项式的最大公因式是零；

(2) 对于任意多项式 $f(x)$, $f(x)$ 即为 $f(x)$ 与 0 的一个最大公因式；

(3) 两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式不唯一，两个多项式的最大公因式在可以相差一个非零常数倍的意义下是唯一确定的.

事实上，若 $d_1(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式，$d_2(x)$ 也是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式，则由最大公因式定义可知多项式 $d_1(x)$ 与 $d_2(x)$ 相互整除，由 1.2.2 节性质 1.2.2 中 (1) 可知，$d_1(x)=cd_2(x)(c\neq 0)$.

从上面性质 (3) 可以看出，如果两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式存在，那就不是唯一的，其最大公因式彼此之间仅相差一个非零常数因子. 我们知道，两个不全为零的多项式的最大公因式总是一个非零多项式，在这个情形下，我们约定，两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式中，用 $(f(x),g(x))$ 来表示首项系数为 1 的那个最大公因式.

例 3 $x-1,2x-2,3x-3$ 均是 $f(x)=x^2-1$ 与 $g(x)=x^2-2x+1$ 的最大公因式，但 $(f(x),g(x))=x-1$ 是唯一确定的.

在有了上述最大公因式定义及相关性质之后，首先要解决的是最大公因式的存在问题，最大公因式的存在性证明主要根据带余除法的知识得到，我们首先给出下面性质.

性质 1.3.1 如果有等式 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$ 成立，则 $f(x),g(x)$ 和 $g(x)$, $r(x)$ 有相同的公因式.

证明 如果 $h(x)\mid g(x),h(x)\mid r(x)$, 则由于 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$, 有 $h(x)\mid f(x)$, 即若 $h(x)$ 是 $g(x),r(x)$ 的公因式，可得 $h(x)$ 也是 $f(x),g(x)$ 的公因式. 反之，若有 $t(x)\mid g(x),t(x)\mid f(x)$, 则有 $t(x)\mid[r(x)=f(x)-q(x)g(x)]$.

由此可见，若 $d(x)$ 为 $f(x),g(x)$ 的一个最大公因式，则 $d(x)$ 也是 $g(x),r(x)$ 的一个最大公因式.

下面给出任意两个多项式的最大公因式的存在性定理.

定理 1.3.1 对于 $P[x]$ 中任意两个多项式 $f(x),g(x)$, 在 $P[x]$ 中一定存在 $f(x)$, $g(x)$ 的一个最大公因式 $d(x)$, 且 $d(x)$ 可以表示成 $f(x),g(x)$ 的一个组合. 即存在 $u(x),v(x)\in P[x]$, 使得

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x). \tag{1.3.1}$$

证明 如果 $f(x),g(x)$ 中有一个为零，比如说，$g(x)=0$, 那么 $f(x)$ 即为一个最大公因式，且有 $f(x)=1\cdot f(x)+1\cdot 0$. 若 $f(x)=0$, 那么 $g(x)$ 即为一个最大公因

式，且有 $g(x)=0\cdot f(x)+1\cdot g(x)$.

对于一般的情形，不妨设 $f(x)\neq 0, g(x)\neq 0$, 运用带余除法，用 $g(x)$ 除 $f(x)$，得到商式 $q_1(x)$ 和余式 $r_1(x)$, 即 $f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x)$; 如果余式 $r_1(x)=0$, 则由性质 1.3.1 可知 $r_1(x), g(x)$ 和 $f(x), g(x)$ 有相同的最大公因式 $g(x)$.

若 $r_1(x)\neq 0$, 就再利用 $r_1(x)$ 去除 $g(x)$, 得到商式 $q_2(x)$ 和余式 $r_2(x)$; 若 $r_2(x)\neq 0$, 就再利用 $r_2(x)$ 去除 $r_1(x)$，得到商式 $q_3(x)$ 和余式 $r_3(x)$; 如此辗转相除下去. 显然，所得余式的次数在不断地降低，即有

$$\partial(g(x))>\partial(r_1(x))>\partial(r_2(x))>\cdots,$$

因此在进行有限次之后，必然有余式为零，于是我们有一串等式

$$\begin{aligned}
f(x)&=q_1(x)g(x)+r_1(x),\\
g(x)&=q_2(x)r_1(x)+r_2(x),\\
&\cdots\cdots\\
r_{s-3}(x)&=q_{s-1}(x)r_{s-2}(x)+r_{s-1}(x),\\
r_{s-2}(x)&=q_s(x)r_{s-1}(x)+r_s(x),\\
r_{s-1}(x)&=q_{s+1}(x)r_s(x)+0,
\end{aligned}\tag{1.3.2}$$

如(1.3.2)所示，根据性质 1.3.1，我们可知，$r_s(x)$ 与 0 的一个最大公因式是 $r_s(x)$，$r_s(x)$ 也是 $r_{s-1}(x)$ 与 $r_s(x)$ 的一个最大公因式；同样的理由，由式(1.3.2)逐步推上至第一个式，可知 $r_s(x)$ 亦为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式.

下面我们再来看如何确定 $u(x), v(x)\in P[x]$, 使 $d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$.

由式(1.3.2)的倒数第二个等式，我们有 $r_s(x)=r_{s-2}(x)-q_s(x)r_{s-1}(x)$, 再由上面的倒数第三个等式，有 $r_{s-1}(x)=r_{s-3}(x)-q_{s-1}(x)r_{s-2}(x)$, 将其代入上式可消去 $r_{s-1}(x)$, 得到

$$r_s(x)=(1+q_s(x)q_{s-1}(x))r_{s-2}(x)-q_s(x)r_{s-3}(x).$$

然后根据同样的方法用它上面的等式逐个消去 $r_{s-2}(x), r_{s-3}(x), \cdots, r_1(x)$, 最后并项就可以得到

$$r_s(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x).$$

上述定理中用来求最大公因式的方法通常称为辗转相除法. 一般地，我们用下面形式来表示：

$$\begin{array}{r|c|c|l}
q_1(x) & g(x) & f(x) & q(x)\\
\vdots & r(x)q_1(x) & g(x)q(x) & \\
\cline{2-3}
 & r_1(x) & r(x) & q_2(x)\\
 & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

例 4 已知 $f(x)=x^3+2x^2-5x-6, g(x)=x^2+x-2$, 求 $(f(x),g(x))$ 及 $u(x), v(x)$ 使得 $(f(x),g(x))=u(x)f(x)+v(x)g(x)$.

解 运用辗转相除法，有

$$
\begin{array}{c|r|r|l}
-\frac{1}{4}x & x^2+x-2 & x^3+2x^2-5x-6 & x+1 \\
 & x^2+x & x^3+x^2-2x & \\
\cline{2-3}
 & -2 & x^2-3x-6 & \\
 & & x^2+x-2 & \\
\cline{3-3}
 & & -4x-4 & 2x+2 \\
 & & -4x & \\
\cline{3-3}
 & & -4 & \\
 & & -4 & \\
\cline{3-3}
 & & 0 &
\end{array}
$$

这里 $r(x)=-4x-4, r_1(x)=-2, r_2(x)=0$ ，因此

$$(f(x),g(x))=\cdots=(r_1(x),r_2(x))=(-2,0)=1.$$

下面求 $u(x),v(x)$ ，由于 $g(x)=(-4x-4)\left(-\frac{1}{4}x\right)+(-2)$, 将其代入

$$f(x)=(x+1)g(x)+(-4x-4),$$

化简得

$$
\begin{aligned}
1=-\frac{1}{2}(-2)&=-\frac{1}{2}\left(g(x)-r(x)\left(-\frac{1}{4}x\right)\right)\\
&=-\frac{1}{2}\left(g(x)-(f(x)-g(x)(x+1))\left(-\frac{1}{4}x\right)\right)\\
&=-\frac{x}{8}f(x)+\left(\frac{x^2}{8}+\frac{x}{8}-\frac{1}{2}\right)g(x).
\end{aligned}
$$

因此可取

$$u(x)=-\frac{x}{8},\quad v(x)=\frac{x^2}{8}+\frac{x}{8}-\frac{1}{2}.$$

注 (1) 上述定理的逆命题不成立. 例如，令 $f(x)=x, g(x)=x+1$, 若有 $d(x)=f(x)x+g(x)x=2x^2+1$ 成立，易见 $d(x)$ 不是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com