



中国科学院规划教材

ZHONGGUO KEXUEYUAN GUIHUA JIAOCAI

应用技术型大学公共数学“十三五”规划教材

线性代数

主 编 王洪珂 邬 毅

副主编 谭 婕 任泽民 张正萍

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$



科学出版社

中国科学院规划教材
应用技术型大学公共数学“十三五”规划教材

线 性 代 数

主 编 王洪珂 邬 毅
副主编 谭 婕 任泽民 张正萍

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书根据全国高等教育工科“线性代数”教学的基本要求,总结多年教学经验编写而成.全书内容包括行列式及其计算、矩阵及其运算、 n 维向量与向量空间、特征值与特征向量、二次型等基本知识 with 基本理论.突出线性代数的计算和方法,每节配有适量习题,书后附有习题参考答案,本书力求做到取材得当,结构合理,内容丰富,深入浅出.

本书适合高校理工类以及经济管理类各专业学生作为教材使用,也可作为本科生同步学习或考研复习参考资料.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/王洪珂, 邬毅主编. —北京: 科学出版社, 2016. 12
中国科学院规划教材·应用技术型大学公共数学“十三五”规划教材
ISBN 978-7-03-048933-3

I. ①线… II. ①王… ①邬… III. ①线性代数-高等学校-教材
IV. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 138521 号

责任编辑: 王胡权 陈曰德 / 责任校对: 邹慧卿

责任印制: 白 洋 / 封面设计: 迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

保定市**中画美凯印刷有限公司** 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 12 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16

2016 年 12 月第一次印刷 印张: 12

字数: 242 000

定价: 32.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《线性代数》编委会

主 编 王洪珂 邬 毅

副主编 谭 婕 任泽民 张正萍

编 委 (按姓名拼音排序)

李春艳 廖文诗 刘丽莎 王 蕾

王晓峰 袁玉兴 周定均 左 宁

前 言

线性代数是以前向量空间、线性变换和有限维的线性方程组为主要研究对象的一个重要数学分支。由于线性代数理论广泛存在于自然科学和技术科学的各个领域,且很多非线性模型在一定条件下可以转化为线性模型来处理,这使得它的思想、方法和结论在科学领域、工程技术、经济学、管理学等众多方面有着广泛的应用。另外,它的结构化、公理化思维方式,对训练和提高学生的计算、抽象思维、逻辑推理、数学表达等能力也都非常有益。随着现代社会的发展和知识结构的迅速更新,线性代数的方法和思想日益为人们所重视。

本书包括了行列式、矩阵、向量空间、特征值与特征向量、二次型等内容,涵盖了线性代数课程的基本要求。由于非数学专业的线性代数课程的学时限制,本书重点置于线性代数的基本概念、基本原理和基本方法等方面,有些内容不再做深入讨论。遵循目前我国高校理、工、农(林)、经(管)类专业线性代数课程设置惯例,本书按32学时安排教学内容。根据专业的不同需要,教师可以在此基础上酌减相应内容(例如带“*”的内容)。另外,对本书中小字排印的内容(包括某些定理的证明过程和应用方面的拓展阅读)不作要求。

本书在编写过程中,参考了大量的相关教材和参考书籍,重庆科技学院领导、教务处、科研处、数理学院等部门领导对本书的出版给予了大力支持和帮助,在此一并表示致谢。

限于编者水平,书中疏漏、不妥之处在所难免,希望各位专家、同行、读者予以批评指正。

编 者

2016年7月

参考文献

- 北京大学数学系几何与代数教研室. 2003. 高等代数. 3 版. 北京: 高等教育出版社.
- 居余马, 等. 2002. 线性代数. 2 版. 北京: 清华大学出版社.
- 同济大学数学系. 2007. 线性代数. 5 版. 北京: 高等教育出版社.
- David C.Lay. 2005. 线性代数及其应用. 3 版. 刘深泉, 等, 译. 北京: 机械工业出版社.

目 录

前言

第一章 行列式及其计算	1
第一节 二阶与三阶行列式	1
第二节 n 阶行列式的定义	5
第三节 行列式的性质	9
第四节 行列式按行 (列) 展开	15
第五节 行列式的计算	20
第六节 行列式的应用 —— 克拉默法则	25
*第七节 MATLAB 软件简介	30
习题一	35
第二章 矩阵及其运算	39
第一节 矩阵	39
第二节 矩阵的运算	41
第三节 逆矩阵	47
第四节 分块矩阵	52
第五节 矩阵的初等变换	56
第六节 矩阵的秩	66
第七节 矩阵的应用 —— 线性方程组有解判别定理	69
*第八节 MATLAB 在矩阵中的应用	80
习题二	84
第三章 n 维向量与向量空间	88
第一节 n 维向量及向量组	88
第二节 向量组的线性相关性	95
第三节 向量组的秩	99
第四节 向量组的应用 · 线性方程组的结构	104
*第五节 向量空间	112
*第六节 MATLAB 在向量空间中的应用	118
习题三	121
第四章 特征值与特征向量	126
第一节 向量组的正交性与正交矩阵	126

第二节	方阵的特征值与特征向量	132
第三节	矩阵的相似对角化	139
第四节	对称矩阵的对角化	142
*第五节	特征值和特征向量的应用	148
*第六节	MATLAB 在特征值理论中的应用	152
习题四		153
*第五章	二次型	157
第一节	二次型及其矩阵	157
第二节	二次型的标准形	160
第三节	正定二次型	166
第四节	MATLAB 在二次型理论中的应用	170
习题五		171
习题参考答案		173
参考文献		181

第一章 行列式及其计算

行列式作为线性代数中一个基本概念,是在线性方程组的求解过程中产生的,也是线性代数的一个重要工具,不仅可以用来研究某类特殊线性方程组的解,而且也是讨论后续知识(矩阵理论)的基础.

本章首先通过二、三元线性方程组的求解引入二、三阶行列式的概念,并在此基础上引入 n 阶行列式的概念,同时讨论其相关性质并研究其计算方法;最后介绍利用行列式求解一类特殊线性方程组的原理和方法.

第一节 二阶与三阶行列式

一、二元线性方程组与二阶行列式

在初等数学中,对于二元方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \quad (1.1.1)$$

我们用消元法分别消去未知数 x_1, x_2 得其同解方程组

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}, \end{cases} \quad (1.1.2)$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,可得方程组 (1.1.1) 的唯一解

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (1.1.3)$$

式 (1.1.3) 中的分子、分母都是四个数分两对先相乘再相减而得,以分母 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 为例,它是由方程组 (1.1.1) 的四个系数所确定的,为了便于书写和记忆,我们引入记法

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \quad (1.1.4)$$

我们称 (1.1.4) 的右边为二阶行列式,它是由方程组 (1.1.1) 中的四个系数按它们在方程组中的位置,排成的二行二列的数表

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

再赋以行列式符号“ $|\cdot|$ ”所构成. 行列式通常用大写字母 D 来表示, 即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

在二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 中, $a_{ij}(i, j = 1, 2)$ 称为二阶行列式的元素(或元), 下标 i, j 分别称为该元素的行标、列标, 分别表示该元素位于行列式中的第 i 行、第 j 列. 位于第 i 行、第 j 列的元素称为行列式的 (i, j) 元; 以 a_{ij} 为元素的行列式可简记为 $\det(a_{ij})$.

由二阶行列式的记法 (1.1.4) 可引入以下方法来记忆, 如图 1-1 所示.

图 1-1

我们称二阶行列式左上角元素 a_{11} 与右下角元素 a_{22} 的实联线为主对角线, 把左下角元素 a_{21} 与右上角元素 a_{12} 的虚联线称为次对角线(或副对角线). 于是二阶行列式可视为主对角线上两元素之积与次对角线上两元素之积的差, 该方法称为对角线法则.

利用上述方法, 我们可将解 (1.1.3) 中的分子都写成二阶行列式的形式, 即

$$b_1 a_{22} - a_{12} b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \stackrel{\text{记为}}{=} D_1, \quad a_{11} b_2 - b_1 a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \stackrel{\text{记为}}{=} D_2,$$

因而当方程组 (1.1.1) 的系数行列式^① $D \neq 0$ 时, 其解可以简单地表示为两个行列式的商的形式:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}. \quad (1.1.5)$$

此表示方法的规律性在于: 解的分母都是方程组的系数行列式, x_1 的分子是将系数行列式中 x_1 的系数所在列替换成方程组等号右边的常数列后所得到的行列式, x_2 的分子是将系数行列式中 x_2 的系数所在列替换成方程组等号右边的常数列后所得到的行列式.

例 1 求解二元线性方程组 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 6, \\ -5x_1 + 4x_2 = 8. \end{cases}$

^① 行列式 D 中的所有元素均由方程组 (1.1.1) 中的系数所构成, 故称其为方程组 (1.1.1) 的系数行列式.

解 因为

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 10 = 2 \neq 0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 24 - (-16) = 40,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -5 & 8 \end{vmatrix} = 24 - (-30) = 54,$$

$$\text{所以 } x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{40}{2} = 20, x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{54}{2} = 27.$$

二、三阶行列式

类似于二阶行列式, 对于三元线性方程组也有类似的结论.

定义 1 表达式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \quad (1.1.6)$$

称为由数表

$$\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}$$

所确定的三阶行列式.

该定义指出三阶行列式含 6 项, 每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号, 其规律遵循图 1-2 所示的对角线法则, 即图中每一实线上的三个元素之积前冠以正号, 每一虚线上的三个元素之积前冠以负号.

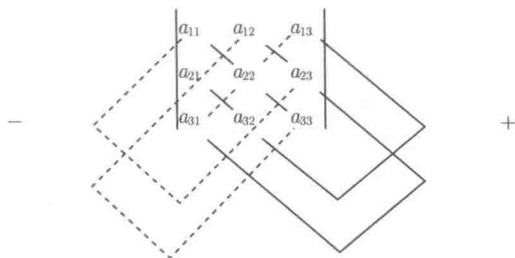


图 1-2

例 2 求解方程 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & x-1 \\ 13 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0$.

解 方程左端的三阶行列式

$$\begin{aligned} D &= 2 \cdot 2 \cdot x^2 + 1 \cdot (x-1) \cdot 13 + 3 \cdot 9 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 13 - 1 \cdot 3 \cdot x^2 - (x-1) \cdot 9 \cdot 2 \\ &= x^2 - 5x + 6, \end{aligned}$$

由 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 解得 $x = 2$ 或 $x = 3$.

需要指出的是, 对角线法则只适用于二、三阶行列式, 为了定义四阶及更高阶行列式, 我们首先要弄清楚二、三阶行列式的结构和规律, 然后根据其结构和规律来推广 n 阶行列式的概念. 为了研究二、三阶行列式的规律, 下面先介绍有关 n 级排列及其逆序数的知识.

三、 n 级排列及其逆序数

定义 2 由 $1, 2, \dots, n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列, 也简称为排列.

由初等数学中排列组合的相关知识可知, n 个不同元素的排列有 $n!$ 个, 作为最简单的一个 n 级排列 $12 \cdots n$, 其特点是按元素递增的顺序进行排列, 我们称其为自然排列.

定义 3 在一个排列中, 如果一对数的前后位置与大小顺序相反, 即前面的数大于后面的数, 那么它们就称为一个逆序, 一个排列中逆序的总数就称为这个排列的逆序数. 排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数记为 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$.

下面讨论计算排列的逆序数的方法.

不失一般性, 不妨设 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 为 1 至 n 这 n 个自然数的一个排列, 依次考虑元素 $p_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 若比 p_i 小且排在 p_i 后面的元素有 t_i 个, 就称该元素的逆序数是 t_i , 全体元素的逆序数之和

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{i=1}^n t_i$$

即是这个排列的逆序数.

显然, $\tau(12 \cdots n) = 0$.

定义 4 逆序数为偶数的排列称为偶排列, 逆序数为奇数的排列称为奇排列.

例如, $\tau(3257146) = 2 + 1 + 2 + 3 + 0 + 0 = 8$, 故 3257146 是一个偶排列;

$\tau(7654321) = 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$, 故 7654321 是一个奇排列.

*四、对换

在一个 n 级排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 中, 仅将其中任意两个元素 j_i, j_k 对调而其余元素不动, 这样的一次对调称为一个**对换**, 记为 (j_i, j_k) ; 将相邻的两个元素对换, 称为**相邻对换**.

对换具有下列性质.

定理 1 对换改变排列的奇偶性. 即经过一次对换, 奇排列变成偶排列; 偶排列变成奇排列.

证 (1) 相邻对换的情形: 设排列为

$$\cdots jk \cdots, \quad (1.1.7)$$

施行对换 (j, k) 后变为

$$\cdots kj \cdots, \quad (1.1.8)$$

其中 “...” 表示固定不动的元素, 而排列 (1.1.7) 与 (1.1.8) 的差别仅在于 j, k 相互交换, 下面要证 (1.1.7) 与 (1.1.8) 的奇偶性相反, 即证它们的逆序数相差为 1.

若 $j > k$, 则 jk 在 (1.1.7) 中构成逆序;

若 $j < k$, 则 jk 在 (1.1.7) 中不构成逆序, 但在 (1.1.8) 中构成逆序.

但其他任意两元素的逆序性无论在 (1.1.7) 还是 (1.1.8) 中皆相同, 因而排列 (1.1.7) 与 (1.1.8) 的逆序数仅相差 1, 即改变了排列的奇偶性;

(2) 非相邻对换的情形: 设排列为

$$\cdots ji_1 i_2 \cdots i_s k \cdots, \quad (1.1.9)$$

施行对换 (j, k) 后变为

$$\cdots ki_1 i_2 \cdots i_s j \cdots, \quad (1.1.10)$$

排列 (1.1.10) 可以看成对 (1.1.9) 连续施行 $(2s+1)$ 次相邻位置的对换而成.

由 (1) 知, 相邻对换改变排列的奇偶性, 显然, 奇数次这样的对换最终还是改变了排列的奇偶性. ■

下面, 不加证明地给出对换的其余两个性质.

推论 1 任意一个 n 级排列与排列 $12 \cdots n$ 都可以经过一系列对换互变, 并且所作对换的个数与这个排列有相同的奇偶性.

推论 2 在全部 $n(n > 1)$ 级排列中, 奇、偶排列的个数相等, 各有 $\frac{n!}{2}$ 个.

第二节 n 阶行列式的定义

本节中通过研究二、三阶行列式的结构和规律来给出 n 阶行列式的定义.

一、 n 阶行列式

由第一节的知识知, 二、三阶行列式分别定义如下:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

可见, 二、三阶行列式都是一些乘积的代数和, 其中

(1) “行列式”的结构 所谓二 (三) 阶行列式是由 $2^2(3^2)$ 个元素排成的 $2(3)$ 行 $2(3)$ 列的数表赋以行列式符号构成;

(2) “项数”的规律 当每项的元素按行标的自然排列时, 二 (三) 阶行列式中确定了 $2!(3!)$ 项二 (三) 级排列;

(3) “项”的结构 二 (三) 阶行列式中每一项是不同行不同列的 $2(3)$ 个元素的乘积, 且所有取自于不同行不同列的 $2(3)$ 个元素的乘积都是二 (三) 阶行列式的项;

(4) “项”的符号 当每项的元素按照行标的自然顺序排列时, 若列标的排列是偶排列时, 此项前面冠以正号; 若列标的排列是奇排列时, 此项前面冠以负号.

由于各项的符号与该项各元素列标排列的奇偶性有关, 所以各项所带的正负号可以表示为 $(-1)^\tau$, 其中 τ 为列标排列的逆序数.

综上所述, 二、三阶行列式分别可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1 p_2)} a_{1p_1} a_{2p_2}, \text{ 其中 } \sum \text{ 表示对 } 1, 2 \text{ 两个数的所有排列 } p_1 p_2 \text{ 取和};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1 p_2 p_3)} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}, \text{ 其中 } \sum \text{ 表示对 } 1, 2, 3 \text{ 三个数的所有排列 } p_1 p_2 p_3 \text{ 取和}.$$

不失一般性, 可以把二、三阶行列式推广到 n 阶行列式的情形.

定义 5 n 级行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 等于所有取自不同行不同列的 n

个元素的乘积

$$a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} \quad (1.2.1)$$

的代数和, 其中 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列, 每一项 (1.2.1) 都按下列规则带有符号: 当 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 是偶排列时, 带正号; 当 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 是奇排列时, 带负号. 该定义可以表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}, \quad (1.2.2)$$

其中 $\sum_{p_1 p_2 \cdots p_n}$ 表示对所有 n 级排列求和.

实际上, 定义 5 是按元素的行标自然排列来定义行列式的, 同样地, 也可以按元素的列标自然排列来定义行列式. 利用定理 1, 下面来讨论行列式定义的另一种表示法.

对于行列式的任一项

$$(-1)^{\tau} a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n},$$

其中 $1 \cdots i \cdots j \cdots n$ 为自然排列, τ 为排列 $p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n$ 的逆序数, 对换元素 a_{ip_i} 与 a_{jp_j} 得

$$(-1)^{\tau} a_{1p_1} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{np_n},$$

此时, 这一项的值没有变, 而行标排列与列标排列同时作了一次相应的对换. 设新的行标排列 $1 \cdots j \cdots i \cdots n$ 的逆序数为 t , 则 t 为奇数; 设新的列标排列 $p_1 \cdots p_j \cdots p_i \cdots p_n$ 的逆序数为 τ_1 , 则

$$(-1)^{\tau_1} = -(-1)^{\tau},$$

故

$$(-1)^{\tau} = (-1)^{\tau_1+t},$$

于是

$$(-1)^{\tau} a_{1p_1} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{np_n} = (-1)^{\tau_1+t} a_{1p_1} \cdots a_{jp_j} \cdots a_{ip_i} \cdots a_{np_n}.$$

以上表明, 对换乘积中两元素的次序, 从而行标排列与列标排列同时作了相应的对换, 则行标排列与列标排列的逆序数之和并不改变奇偶性, 经过一次对换是如此, 经过多次对换仍然是如此. 于是经过若干次对换, 可使:

列标排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ (逆序数为 τ) 变为自然排列 (逆序数为 0);

行标排列相应地从自然排列变为一个新的排列, 设此新的排列为 $q_1 q_2 \cdots q_n$, 其逆序数为 s , 则有

$$(-1)^\tau a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} = (-1)^s a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}.$$

又若 $p_i = j$, $q_j = i$ (即 $a_{ip_i} = a_{ij} = a_{q_j j}$), 可见排列 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 由排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 所唯一确定.

于是可得如下结论.

* 定义 6

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{q_1 q_2 \cdots q_n} (-1)^{\tau(q_1 q_2 \cdots q_n)} a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}. \quad (1.2.3)$$

定义表明, n 阶行列式是由位于不同行不同列的 n 个元素所有可能乘积 (共 $n!$ 个) 的代数和, 把构成这些乘积的元素按行 (或列) 标排成自然顺序, 然后由列 (或行) 标所成的排列的奇偶性来决定该项的符号.

二、几类特殊的 n 阶行列式

1. 对角行列式

主对角线以外的元素全为 0 的行列式称为对角行列式, 且有

$$\Lambda = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

证 由 n 阶行列式的定义, n 阶对角行列式为位于不同行不同列的 n 个元素所有可能乘积的代数和, 但它除主对角线上 n 个元素的乘积 $a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$ 之外, 其余 $(n! - 1)$ 项都包含 0, 即仅有 $a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$ 这一项可能非零, 且该项各元素的行标、列标排列都是自然排列, 故前面冠以正号, 从而得证. ■

2. 次对角行列式

次对角线以外的元素全为 0 的行列式称为次对角行列式, 且有

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \ddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} a_{n1}.$$

证 n 阶次对角行列式除次对角线上 n 个元素的乘积 $a_{1n}a_{2,n-1}a_{n1}$ 之外, 其余 $(n!-1)$ 项都包含 0, 即仅有 $a_{1n}a_{2,n-1}a_{n1}$ 这一项可能非零, 且该项各元素的行标按自然排列, 而列标排列的逆序数 $\tau(n, n-1, \dots, 1) = (n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$, 故前面冠以代数符号 $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$, 从而得证. ■

3. 上、下三角行列式

主对角线以下的元素全为 0, 即满足 $a_{ij} = 0 (i > j)$ 的行列式称为上三角行列式, 且

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn};$$

主对角线以上的元素全为 0, 即满足 $a_{ij} = 0 (i < j)$ 的行列式称为下三角行列式, 且

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}.$$

证 以 n 阶下三角行列式为例进行证明: 由于当 $i < j$ 时 $a_{ij} = 0$, 故 D 中可能不为 0 的元素 a_{ip_i} , 其下标应有 $i \geq p_i$, 即 $1 \geq p_1, 2 \geq p_2, \dots, n \geq p_n$.

在所有排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 中, 满足上述关系的排列只有一个自然排列 $12 \cdots n$, 所以 D 中可能不为 0 的项只有一项 $(-1)^{\tau(12 \cdots n)} a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$, 于是有 $D = (-1)^0 a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$. ■

第三节 行列式的性质

用 n 阶行列式的定义来计算 n 阶行列式的值, 当 n 很大时是很麻烦的, 为此,