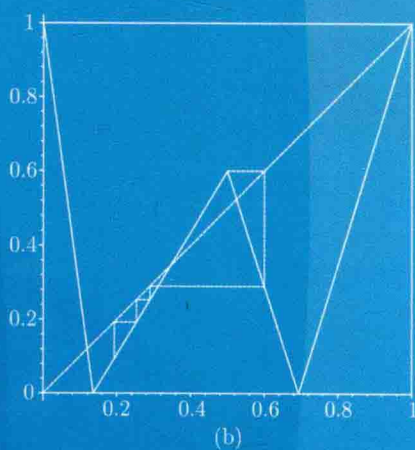
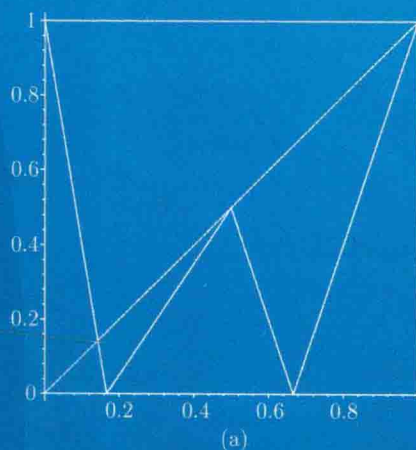


一维空间上动力系统的 绝对连续不变测度与斜率条件

Slope Conditions and Absolutely Continuous Invariant
Measures for Dynamical Systems in One Dimensional Space

李贞阳 著



科学出版社

一维空间上动力系统的 绝对连续不变测度与斜率条件

李贞阳 著



科学出版社

北京

内 容 简 介

本书主要讨论混沌动力系统的遍历性质. 首先引入一类相对简单但特殊的系统, 讨论其不变测度的存在及稳定性, 突出动力系统对斜率条件的要求. 接着讨论了这一类系统的稳定性与斜率之间的关系, 从算子谱的角度分析了斜率参数与系统之间的关系, 引入调和平均条件并讨论了相关的收敛问题; 且给出了具体的常数计算.

本书可作为数学学院研究生或高年级本科生专业课教材, 也可作为相关方向科研工作者的参考资料.

图书在版编目(CIP)数据

一维空间上动力系统的绝对连续不变测度与斜率条件/李贞阳著. —北京: 科学出版社, 2017.8

ISBN 978-7-03-054155-0

I. ①—… II. ①李… III. ①动力系统(数学)—绝对连续—不变测度
IV. ①O19

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 196247 号

责任编辑: 王胡权 / 责任校对: 邹慧卿
责任印制: 吴兆东 / 封面设计: 正典设计

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京教图印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017 年 8 月第 一 版 开本: 720 × 1000 B5

2017 年 8 月第一次印刷 印张: 7

字数: 142 000

定价: 49.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

相对论、量子力学和混沌理论被一些科研工作者认为是 20 世纪的三项科学革命。其中混沌理论的较完整提出晚于前两者，混沌理论也需要更多的研究和认识。简单来讲，混沌理论研究那些对初始条件具有高度敏感依赖性的动力系统的特性。

自从 Isaac Newton(艾萨克·牛顿) 提出万有引力的假设并建立基本运动方程，数学和物理不断取得巨大的成功。科学家们建立许多模型来描述天体运行行为。当解能够找到的时候，它大都反映一个非常规则的运动：如果这些微分方程的解是包含在一个有界的范围内，最终它们要么因为能量的损失渐渐趋于某个稳定的状态，要么做周期或拟周期运动。从 19 世纪的后半叶开始，J. C. Maxwell(麦克斯韦)，H. Poincaré(庞加莱)，G. D. Birkhoff(伯克霍夫)，J. E. Littlewood(李特尔伍德)，S. Smale(斯梅尔) 和 A. N. Kolmogorov(柯尔莫哥洛夫) 等数学和物理学家做出了大量的工作，推动了人们对自然界存在的另一种运动方式的认识和理解。19 世纪 60 年代，J. C. Maxwell 做了著名的空气分子运动试验，发现分子碰撞运动的结果具有不可预测性。1890 年，H. Poincaré 发表了对三体问题的研究，他建立一个简化的三体问题数学模型，引入了动力系统中的极重要的分析方法：Poincaré 映射。其研究结果被称为是牛顿之后天体力学最重要的成就。其研究的思想方法为后来的混沌理论奠定了重要基础。

在 20 世纪 70 年代，科学家们开始认同第三种运动方式的存在，现在大家称它为“混沌”。这一种运动方式是非常的不规则的，不仅仅包含着相当大量的周期轨道，也不一定是发生在一个包含着大量相互作用的物体或粒子的系统中。这种复杂的运动也可以发生在很简单的系统中，甚至是一维的系统。混沌现象还可以出现在一个确定性的系统中，这样的系统没有随机变量的出现，但系统本身却呈现随机的性质。这些系统都是非线性的动力系统。E. Lorenz(洛伦兹) 被很多科学家认为是现代混沌理论的奠基者。他对混沌有着这样的总结：混沌发生于当现在的状态决定了未来，但是现状的近似却不能帮助我们近似地描述未来。经典的混沌现象“蝴蝶效应”比较清晰的反映这一概念。

动力系统往往呈现出一些复杂的现象, 离散的系统虽然表面简单, 但不管是一维的还是高维空间的都呈现出来难以研究的性质. 用概率和统计的方法来观测一个动力系统慢慢成为一个该领域的有效工具, 遍历理论也由此逐渐发展起来, 从而促进近代以来混沌理论取得深刻的发展. 遍历理论, 研究保测变换的渐近性态的数学分支. 它起源于对统计力学提供基础的“遍历假设”的研究, 并与动力系统理论、概率论、信息论、泛函分析、数论等数学分支有着密切的联系. 遍历理论作为一个有效的工具, 从统计学的角度比较全面的研究系统的整体长期特性. 保测变换和不变测度是遍历理论较为核心的概念. 绝对连续不变测度也称为“实体测度”或“可观测测度”, 它是在我们做实验或数字模拟时可以观测得到的测度. 本书围绕保测变换及绝对连续不变测度展开.

1982 年 G. Keller 引入了一类图像类似于 W 的变换, 基于比较详细的分析, 猜想绝对连续不变测度的不稳定性只能是由于极限变换转折点附近出现了小的不变子集的缘故. 本书首先从引入一类 W - 状变换开始, 否定这一猜想. 然后推广到更广泛的 W - 状变换, 从而最终引入调和平均斜率条件, 此条件帮助我们可以解决一些相关的动力系统的探讨, 以及某些以前无法判断稳定性的变换. 并进而把调和平均斜率条件和 Rychlik 定理及 C. Liverani 等人的研究相结合.

本书在编写的过程中得到了许多的关心和帮助, 为此向 A. Boyarsky 教授、P. Gora 教授、H. Proppe 教授以及加拿大康考迪亚大学的动力系统研讨组成员表示感谢. 谢谢红河学院的支持. 谢谢自然科学基金 (11601136) 和红河学院博硕基金项目 (XJ16B07) 的支持.

由于作者本人能力有限, 疏漏与不足之处在所难免, 欢迎读者批评指正.

作 者

2017 年 3 月

目 录

第 1 章 预备知识	1
1.1 绝对连续不变测度和泛函空间	1
1.2 混沌现象和混沌的概念	2
1.3 遍历理论的几个定理	9
1.4 有界变差函数和 Frobenius-Perron 算子	11
1.5 动力系统的研究: 绝对连续不变测度及其稳定性	21
第 2 章 绝对连续不变测度的极限为奇异测度的 W -形映射	25
2.1 问题的引入	25
2.2 W_a 映射簇及本章的主要结论	26
2.3 构建 Markov 映射子类: 获得主要定理的启发想法	27
2.4 定理 2.2.1 的证明	33
2.5 数值计算的结果	41
第 3 章 有关 W -形映射的绝对连续不变测度不稳定性的各种情形	42
3.1 简述	42
3.2 W -形映射簇以及主要定理	43
3.3 定理 3.2.1 和定理 3.2.2 的证明	45
3.4 一个例子	61
第 4 章 W -形映射对应算子的孤立谱点的不稳定性	63
4.1 简述	63
4.2 Markov W_a 映射及其不变密度函数	65
4.3 W_a 映射对应算子的第二特征值	69
4.4 对应于 $\lambda_a < 1$ 的特征函数	72
4.5 附注	74

第 5 章	区间上分段扩张变换的不变密度函数的新显式常数表达与调和平均斜率条件	76
5.1	简述	76
5.2	记号和一些初步结论	77
5.3	不变密度函数的下界	82
5.4	显式收敛常数	89
第 6 章	调和平均斜率条件与绝对连续不变测度的稳定性	94
6.1	简述	94
6.2	记号的引入和一些初步结论	95
6.3	有关 Rychlik 定理的主要结论	97
6.4	映射簇的绝对连续不变测度的稳定性	99
6.5	例子	101
参考文献		103

第1章 预备知识

1.1 绝对连续不变测度和泛函空间

取 X 为一个带有距离的集合, 这里的 X 一般假设为一个紧距离空间, 即 X 的任意开覆盖可挑出有限子覆盖. 例如 (I^n, d) , 其中 $I = [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, d 为欧氏距离. 设 $\mathfrak{B}$ 是由 X 的子集构成的一个 σ -代数:

(I) $\emptyset \in \mathfrak{B}$;

(II) 如果 $A \in \mathfrak{B}$, 则 $A^c \in \mathfrak{B}$;

(III) 如果 $A_n \in \mathfrak{B}$, $n \in \mathbb{N}$, 则 $\cup A_n \in \mathfrak{B}$.

定义 1.1.1 我们称函数 $\mu: \mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{R}^+$ 为 $\mathfrak{B}$ 上的一个测度, 如果满足如下条件:

(I) $\mu(\emptyset) = 0$;

(II) 对任一个可测集序列 $\{B_n\}$, $B_n \in \mathfrak{B}$, $n = 1, 2, 3, \dots$,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n).$$

此时我们称 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ 为一个测度空间, 有时我们简单地称 X 是测度空间. 我们称 $\mathfrak{B}$ 中的集合为可测开集. 进一步, 如果 $\mu(X) = 1$, 我们称 X 是单位化测度空间或者称为概率空间.

定义 1.1.2 如果 X 可以表示为可数个具有有限测度的可测集的并, 我们称 μ 是 σ -有限的.

定义 1.1.3 假设我们已有两个测度 μ 和 ν , 都定义在同一个空间 $(X, \mathfrak{B})$ 上. 对任意的 $B \in \mathfrak{B}$ 且满足 $\nu(B) = 0$, 此时如果 $\mu(B) = 0$ 成立, 我们称 μ 相对于 ν 是绝对连续的, 记作 $\mu \ll \nu$.

定义 1.1.4 设 $1 \leq p < \infty$, $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ 为一个测度空间. 考虑满足如下条件的实可测函数族 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$: 在此函数族上, 按照几乎处处相等的意义来定义商空间,

从而可以定义一个赋范空间, 即: 对任一 f , 定义范数 $\| \cdot \|_p$ 为

$$\| f \|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

这就是我们常见的可测函数空间, 记为 $L^p(X, \mathfrak{B}, \mu)$, 当 X 和 $\mathfrak{B}$ 明确给出时, 我们常简记为 $L^p(\mu)$, 或者更为简单的 L^p (如果 μ 也明确给出).

Radon-Nikodym 定理作为一个重要的结论, 它告诉当 $\mu \ll \nu$ 时, 我们可以用 ν 来表示 μ .

定理 1.1.1 假设 μ 和 ν 是 $(X, \mathfrak{B})$ 上的两个单位测度. 如果 $\mu \ll \nu$, 那么存在唯一一个 $f \in L^1(X, \mathfrak{B}, \nu)$, 使得对每一个集合 $A \in \mathfrak{B}$ 下式成立:

$$\mu(A) = \int_A f d\nu.$$

这个函数 f 被称为 Radon-Nikodym 导数, 记作 $\frac{d\mu}{d\nu}$.

我们称完备的赋范线性空间 $(Y, \| \cdot \|)$ 为 Banach (巴拿赫) 空间. 例如前面提到的可测函数空间 L^p , 以及后面我们需要经常讨论的有界变差函数空间 $BV([a, b])$. 赋范线性空间 Y 上的全部有界线性泛函组成了 Y 的对偶空间 Y^* , 它为 Banach 空间. 同时可以类似定义 Y 的二次对偶空间 $Y^{**} = (Y^*)^*$.

定义 1.1.5 (I) 设 $\{y_n\} \subset Y$, $y \in Y$, 若有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - y\| = 0$, 则称 $\{y_n\}$ 强收敛于 y .

(II) 设 $\{y_n\} \subset Y$, $y \in Y$, 若对任意 $f \in Y^*$ 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(y_n) - f(y)| = 0$, 则称 $\{y_n\}$ 弱收敛于 y .

(III) 设 $\{f_n\} \subset Y^*$, $f \in Y^*$, 若对任意 $y \in Y$ 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(y) - f(y)| = 0$, 则称 $\{f_n\}$ 弱 * 收敛于 f .

1.2 混沌现象和混沌的概念

混沌的概念在数学和物理上的定义比较多, 我们这里引用 R. L. Devaney 在 [Devaney, 2003] 中的定义.

定义 1.2.1 我们称一个映射 $\tau: X \rightarrow X$ 是混沌的, 如果它满足以下三个条件:

(I) 对初始值的敏感依赖性. 对初始值任意小的改动或扰动, 系统未来的轨道会产生十分明显的差异, 轨道的性质也截然不同. 混沌动力系统的这个特点直接导致了系统具有不可预知性. 即: 存在 $\delta > 0$, 使得对任意的 $x \in X$ 及其邻域 U , 能够找到 $y \in X$ 及整数 $n \geq 0$, 满足

$$|\tau^n(x) - \tau^n(y)| > \delta;$$

(II) 拓扑传递性. 有时候也被称作拓扑混合性. 任意在相平面中取一个开集, 它在系统不断演化下的象定会与相平面上的另一开集相交. 即: 对 X 中的任意两个开集 U 和 V , 存在整数 $n > 0$ 使得

$$\tau^n(U) \cap V \neq \emptyset;$$

(III) 具有稠密的周期轨道. 即 τ 的所有周期点集合在 X 中是稠密的. 一个点 $x \in X$ 被称作是周期点, 如果存在整数 $n > 0$ 使得 $\tau^n(x) = x$. 我们称点集 $\{\tau^n(x_0)\}_{n \geq 0}$ 为动力系统的一条初始值为 x_0 的轨道. 这里的 τ^n 表示 τ 的 n 次迭代, 在下一节会有更多的讨论.

下面我们来讨论一个很广为人知的例子. 考虑如下的二次映射, 也叫做 Logistic 映射:

$$\tau_4(x) = 4x(1-x), \quad x \in [0, 1].$$

它的图形我们画在图 1.1 中. 并且用虚线画出了初始值 $x_0 = 0.235632$ 的最初几个轨道值. 为了画出该轨道值, 我们采用了如下方法: 设所取初始值为 x_0 , 其轨道为

$$x_0, x_1 = \tau_4(x_0), x_2 = \tau_4^2(x_0), \dots, x_n = \tau_4^n(x_0),$$

那么我们在图像上依次用虚线连接如下的点:

$$(x_0, x_1), (x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{n-1}, x_n).$$

为了方便, 我们画出了对角线.

在图 1.2 中, 我们取初始值 $x_0 = 0.235632$, 并画出其最初的 100 个轨道值. 同时在图 1.3 中, 我们取初始值 $x_0 = 0.23563$, 并画出其最初的 100 个轨道值. 横轴表示迭代的次数 (时刻), 纵轴表示迭代值 (状态). 我们可以看出, 虽然初始值的差别只有 2×10^{-6} , 但轨道的差别却很大. 这就反映了混沌概念里面的第 (I) 条.

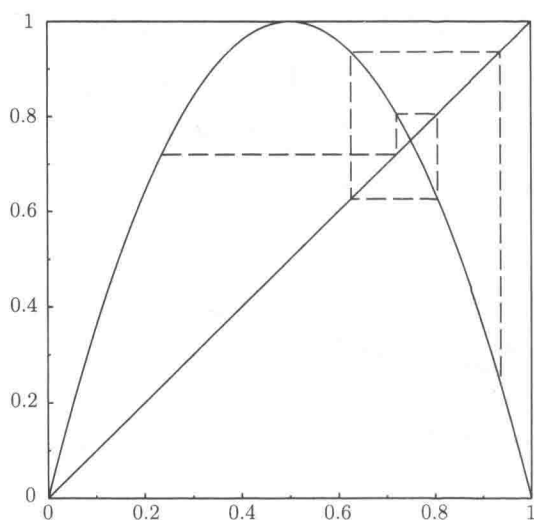


图 1.1 Logistic 映射及初始值 $x_0 = 0.235632$ 的最初几个轨道值

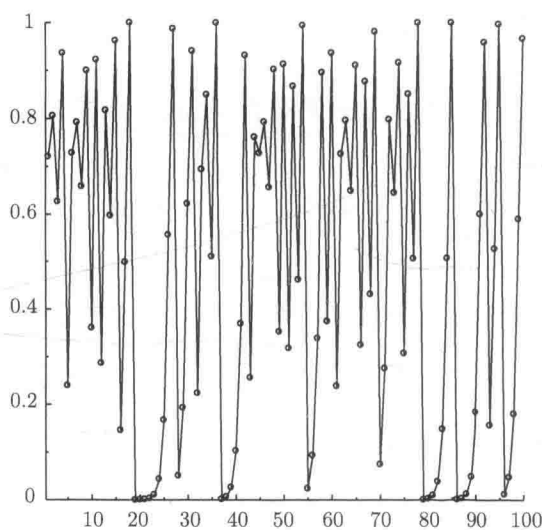


图 1.2 Logistic 映射取初始值 $x_0 = 0.235632$ 时的最初 100 个轨道值

在图 1.4 中, 我们画出了初始值 $x_0 = 0.235632$ 对应的最初 200 个轨道值, 可以看出其轨道已经快要充满相空间, 如果继续增加迭代时间, 此种情形就更加明显. 其他的初始值也有类似的性质. 这也就反映出来混沌概念里面的第 (II) 条.

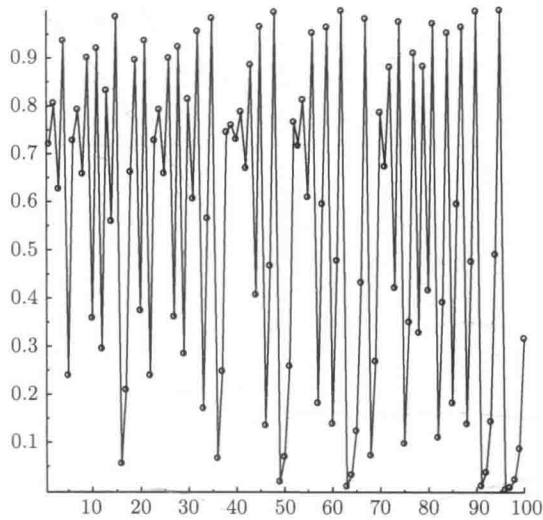


图 1.3 Logistic 映射取初始值 $x_0 = 0.23563$ 时的最初 100 个轨道值

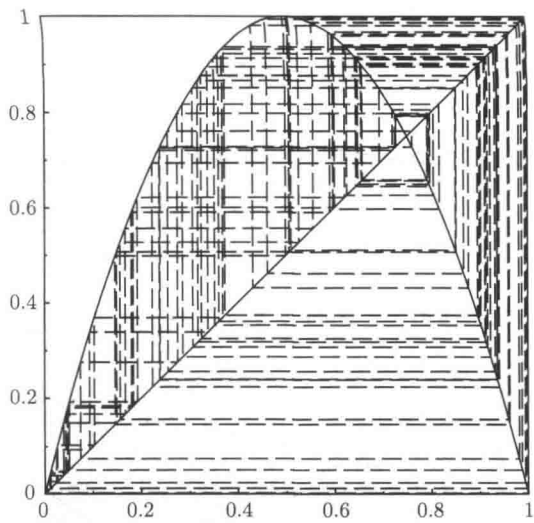


图 1.4 Logistic 映射取初始值 $x_0 = 0.23562$ 时的最初 200 个轨道值

而混沌概念里面的第 (III) 条, 需要通过解方程

$$\tau_4^n(x) = x$$

来演示, 但求解高次方程的解并不是一件容易的事情, 感兴趣的读者可以参考 Devaney 的书 [Devaney, 2003]. 实际上, 容易看出帐篷映射

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1/2; \\ 2 - 2x, & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (1.1)$$

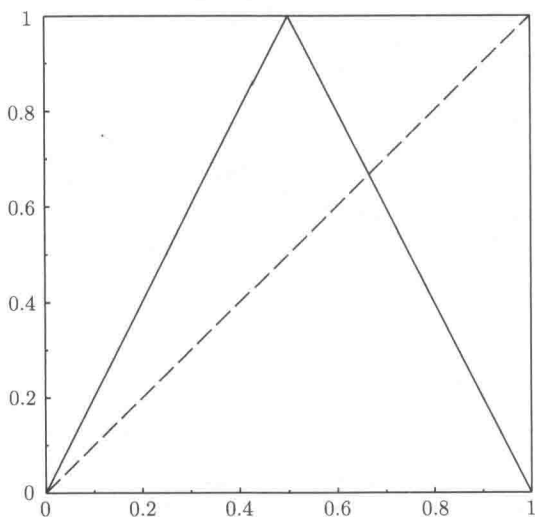


图 1.5 帐篷映射

具有稠密的周期轨道. 而 Logistic 映射与帐篷映射是共轭的, 即: 存在可逆函数 φ 使得

$$\tau_4(\varphi(x)) = \varphi(T(x)).$$

从而它们有着类似的动力学性质. 但这是另一个比较大的内容, 我们不在这里展开. 同时我们也可以用 Logistic 类映射

$$\tau_\alpha(x) = \alpha x(1 - x), \quad \alpha \in (0, 4]$$

的分支图形来说明 Logistic 映射的轨道复杂性, 参见图 1.6. 横坐标代表参数 α 的取值, 纵坐标代表对应该参数值时的映射 τ_α 的轨道集, 即在垂直方向放置点集 $\{\tau_\alpha^n(x_0)\}_{n \geq 0}$, 初始值 x_0 在 $[0, 1]$ 上随机取得.

现在我们来从另一个角度来观察这些轨道, 当迭代时间较长时, 我们很难知道轨道的具体位置, 但我们可以来考虑一条轨道在 $[0, 1]$ 上的分布, 即考虑这些点为随机变量的取值. 我们在图 1.7 和图 1.8 中分别画出了两个不同初始值 $x_0 = 0.235632$ 和 $x_0 = 0.23563$ 的最初 500 个轨道值所对应的直方图, 均将区间 $[0, 1]$ 平均分为 50

个小区间. 此时可以看出它们呈现出了一些相似. 这就给我们提供了一个重要的研究动力系统的工具——密度函数 (测度).

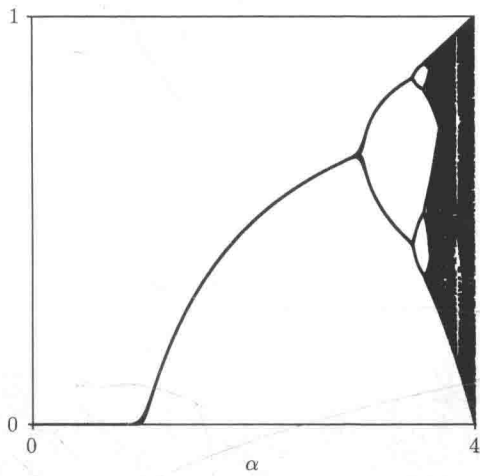


图 1.6 Logistic 类映射的分支图

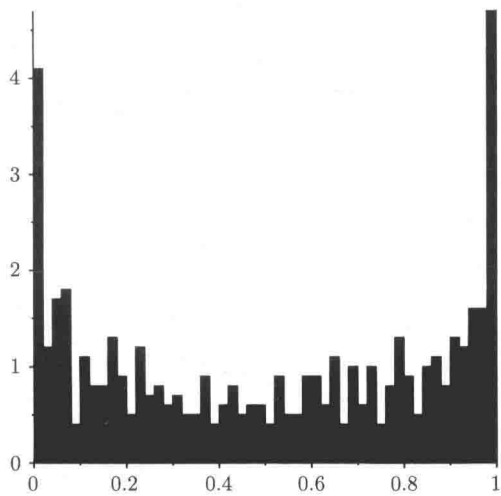


图 1.7 Logistic 映射取初始值 $x_0 = 0.235632$ 时的最初 500 个轨道值所对应的直方图

实际上, 映射 τ_4 具有不变密度函数

$$f(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}}, \quad x \in [0, 1],$$

其图像见图 1.9. 可以看出上面所提到的两个轨道都呈现出类似于该密度函数的性

质. 而不变密度和不变测度的概念是研究动力系统的核心, 我们在后面会有更详尽的叙述.

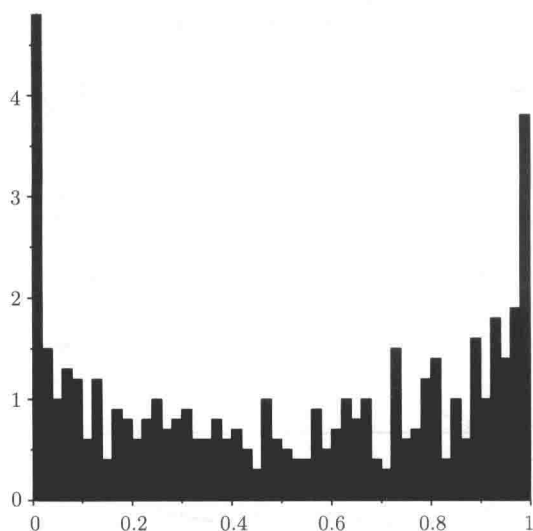


图 1.8 Logistic 映射取初始值 $x_0 = 0.23563$ 时的最初 500 个轨道值所对应的直方图

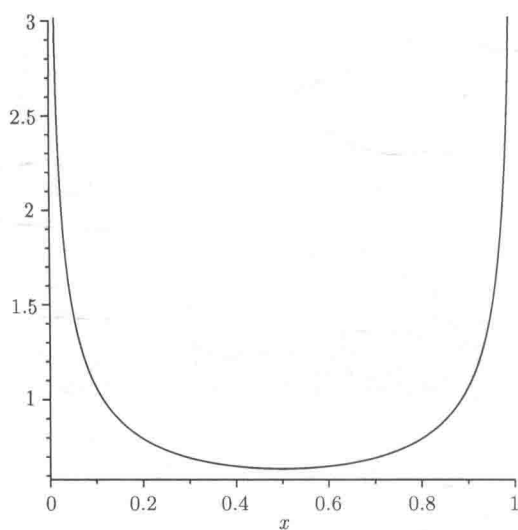


图 1.9 Logistic 映射的不变密度函数

1.3 遍历理论的几个定理

下面我们引入保测度变换的概念.

定义 1.3.1 我们称一个可测变换 $\tau: X \rightarrow X$ 保持测度 μ , 如果对任一 $B \in \mathfrak{B}$, 等式 $\mu(\tau^{-1}(B)) = \mu(B)$ 成立. 此时我们也称 μ 是 τ -不变测度.

假设 ν 是参照测度, μ 是不变测度, 并且 $\mu \ll \nu$, 那么我们称 μ 是一个绝对连续不变测度. 在本书和实际讨论中 ν 大都是 Lebesgue(勒贝格) 测度. 下面我们给出我们所要讨论的动力系统的定义.

定义 1.3.2 设 $\tau: X \rightarrow X$ 保持测度 μ . 我们称 $(X, \mathfrak{B}, \mu, \tau)$ 为一个动力系统.

设 $\tau: X \rightarrow X$ 是一个保测度变换. 我们用 τ^n 表示它的 n 次迭代, 其中 $n \in \mathbb{N}$, 即: 若 $x \in X$, 则 $\tau^n(x) = \tau \circ \cdots \circ \tau(x)$, 表示连续复合了 n 次. 我们称点集 $\{\tau^n(x)\}_{n \geq 0}$ 为动力系统的一条初始值为 x 的轨道. 我们研究动力系统, 特别关注这些轨道. 著名的 Poincaré 回归定理表明, 一个动力系统经过足够长的迭代后, 轨道就会回归到初始状态附近.

定理 1.3.1 设 τ 是一个单位测度空间 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ 上的一个保测度变换. $E \in \mathfrak{B}$ 且 $\mu(E) > 0$. 则当我们对 τ 迭代时, E 中几乎所有的点的轨道都会无限多次回归到 E 中, 即:

$$\mu(\{x \in E \mid \text{存在 } N \text{ 使得只要 } n > N \text{ 就有 } \tau^n(x) \notin E\}) = 0.$$

定义 1.3.3 设变换 $\tau: (X, \mathfrak{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathfrak{B}, \mu)$ 保持测度 μ ; 我们称它是

(I) 遍历的, 对每一个满足 $\tau^{-1}(B) = B$ 的集合 $B \in \mathfrak{B}$, 我们有 $\mu(B) = 0$ 或者 $\mu(X \setminus B) = 0$;

(II) 混合的, 如果对所有的 $A, B \in \mathfrak{B}$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $\mu(\tau^{-n}(A) \cap B) \rightarrow \mu(A)\mu(B)$;

(III) 正则的, 如果对所有的 $B \in \mathfrak{B}$, $\tau(B) \in \mathfrak{B}$, 且 $\mu(B) > 0$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\tau^n(A)) = 1$.

遍历性是非常有用的一个概念, 它揭示了保测度变换的不可分解性质, 不能进一步分成互不作用的子系统. 我们引入一些其他与遍历性等价的性质 [Boyarsky and Góra, 1997]:

定理 1.3.2 设 $\tau : (X, \mathfrak{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathfrak{B}, \mu)$ 保持测度. 那么下面的表述是等价的:

(I) τ 遍历的;

(II) 如果 f 是可测函数且 $(f \circ \tau)(x) = f(x)$ 几乎处处成立, 那么 f 几乎处处为常数;

(III) 如果 $f \in L^2(\mu)$ 且 $(f \circ \tau)(x) = f(x)$ 几乎处处成立, 那么 f 几乎处处为常数.

下面的 Birkhoff 遍历定理 [Birkhoff, 1931] 是遍历理论中的基本定理.

定理 1.3.3 假设 $\tau : (X, \mathfrak{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathfrak{B}, \mu)$ 保持测度, 其中 $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ 是 σ -有限的, 且 $f \in L^1(\mu)$. 那么存在一个函数 $f^* \in L^1(\mu)$ 使得

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau^k(x)) \rightarrow f^*, \mu\text{-a.e.}$$

而且,

$$f^* \circ \tau = f^*, \mu\text{-a.e.}$$

进一步地, 如果 $\mu(X) < \infty$, 则

$$\int_X f^* d\mu = \int_X f d\mu$$

由定理 1.3.2, 我们得到如下的推论.

推论 1.3.1 如果 τ 是遍历的, 那么 f^* 是常数函数 μ -a.e.. 此外, 如果 $\mu(X) < \infty$ 那么

$$f^* = \frac{1}{\mu(X)} \int_X f d\mu \text{ a.e.}$$

由此, 如果 $\mu(X) = 1$ 且 τ 是遍历的, 那么对集合 $E \in \mathfrak{B}$ 我们有

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \chi_E(\tau^k(x)) \rightarrow \mu(E), \mu\text{-a.e.},$$

由此对 X 中几乎每一个点, 其轨道出现在 E 中的渐进相对频率为 $\mu(E)$.

定理 1.3.3 和推论 1.3.1 表明, 对一个遍历变换 $\tau : (X, \mathfrak{B}, \mu) \rightarrow (X, \mathfrak{B}, \mu)$, 我们有如下等式

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\tau^k(x)) = \frac{1}{\mu(X)} \int_X f d\mu \text{ a.e.},$$

即, $f \in L^1(\mu)$ 的时间平均值等于它的空间平均值.