

问题解决与认知模拟

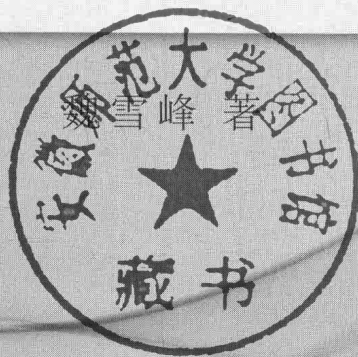
——以数学问题为例

魏雪峰 著

中国社会科学出版社

问题解决与认知模拟

——以数学问题为例



中国社会科学出版社

图书在版编目(CIP)数据

问题解决与认知模拟：以数学问题为例 / 魏雪峰著. —北京：中国社会科学出版社，2017.5

ISBN 978 - 7 - 5161 - 7694 - 8

I. ①问… II. ①魏… III. ①小学数学课—教学研究 IV. ①G623.502

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 041331 号

出版人 赵剑英
责任编辑 王 琪
责任校对 刘 娟
责任印制 王 超

出 版 中国社会科学出版社
社 址 北京鼓楼西大街甲 158 号
邮 编 100720
网 址 <http://www.csspw.cn>
发 行 部 010 - 84083685
门 市 部 010 - 84029450
经 销 新华书店及其他书店

印 刷 北京君升印刷有限公司
装 订 廊坊市广阳区广增装订厂
版 次 2017 年 5 月第 1 版
印 次 2017 年 5 月第 1 次印刷

开 本 710 × 1000 1/16
印 张 16.25
插 页 2
字 数 271 千字
定 价 69.00 元

凡购买中国社会科学出版社图书，如有质量问题请与本社营销中心联系调换
电话：010 - 84083683

版权所有 侵权必究

序

教学过程依赖于学习过程，问题解决是数学学习的主要形式，对问题解决认知过程的分析和研究，能科学认识学生数学学习过程，正确把握学生的认知规律。目前，许多国家大力支持脑与学习科学的研究工作。随着研究的不断深入，为有效研究学习提供了新的视野。

近年来，学习科学（Learning Sciences）的诞生和发展，尤其是认知心理学、脑科学、认知神经科学等领域最新研究成果的不断涌现，为有效研究学习提供了新的视野，同时也为深入研究数学问题解决的认知过程提供了帮助。学习科学是一个研究教与学的跨学科领域，其研究目标首先是更好地理解认知过程和社会化过程以产生最有效的学习，其次便是为了用学习科学的知识来重新设计课堂和学习环境，从而使学习者能够更有效和更深入地学习。目前，许多国家大力支持脑与学习科学的研究工作。我国北京师范大学认知神经科学与学习国家重点实验室和东南大学学习科学研究中心正在从事这方面的研究。关于学生学习的基础研究十分重要。我们应该将数学问题解决的研究置于多学科研究的广泛视野，涉及信息科学、脑科学、认知科学、心理学及教育学等众多研究领域，通过在心智、脑科学和教育（Mind, Brain and Education）之间建立桥梁，将脑科学的最新成果应用于学习和教育过程。这些学科的最新研究成果所揭示的人是如何学习的过程，为深入分析数学问题解决提供了重要的理论基础。同时，人工智能等技术的发展，也为实现数学问题解决认知模拟提供了技术保障。

《问题解决与认知模拟》一书是魏雪峰博士多年来关于数学问题解决认知模拟的研究成果。本书以我国小学数学问题为研究对象，探索了

问题解决认知过程的分析方法。认知模型是分析数学问题解决认知过程的依据，本书在波利亚数学问题解决模型的基础上，结合小学生的心理特点，构建了小学数学问题解决的认知模型，介绍了模型的特点、应用范围及教育意义，为进一步分析问题解决认知过程奠定了基础。书中选取了小学数学陈述性知识和程序性知识的典型问题，分别以“众数”和“异分母相加”问题为例，实现了认知模拟，并对模拟结果开展了实证研究。虽然专家学者对认知模拟存在争议，但它具有严密的逻辑性和确定性，对揭示问题解决的认知过程的作用是其他手段不可取代的。计算机模拟把问题解决过程中的一些因素综合起来，重建这个过程，克服了以往实验心理学以分析为主的做法，为从整体上了解问题解决的认知过程开辟了一条道路。书中关于认知模拟的案例分析未必都科学合理，但越来越多的年轻学者关注相关学科的最新研究成果，必将为教育技术学科的发展注入新的活力。

《问题解决与认知模拟》一书还对数学学习的“弱势群体”——小学数学学习困难学生，进行了特别关注。针对学习困难学生，书中提出了基于认知模型的“一对一”认知诊断流程与方法，对学习困难学生问题解决认知过程进行诊断，取得了良好的诊断效果。基于认知模型的“一对一”认知诊断尤其关注学习困难学生的学习过程，分析不同阶段学生解题过程的认知变化情况。该方法是满足学习困难学生不同的现有水平和未来发展水平的一种动态评价方法，其特点是强调“一对一”性，兼顾学习结果的评估和学习过程的剖析，目的是深入评估每个学习困难学生的优点和缺点，针对学生在做题过程中的表现给予及时、适当的反馈，引导学生逐步完成问题解决，达成目标，有利于学习发生。

难能可贵的是，魏雪峰博士在开展研究的过程中“身体力行”，长期深入小学数学课堂，并为小学生讲授了“圆柱侧面积”等知识点，实现了从大学课堂到小学课堂的转换。只有站在小学数学讲台上，才能切身体会到研究与教学的密切相关性，才能进一步促进理论与实践的有效结合。

希望魏雪峰博士以本书出版为契机，积极探索教育技术的新领域，将本书研究成果积极用于数学教学实践，帮助解决数学课堂教学中

思维能力僵化、解题方式固化等现实问题，不断提高学生的创新思维能力！

A handwritten signature in black ink, reading '崔光佐' (Cui Guangzuo). The characters are written in a cursive, flowing style.

2017年4月于北京师范大学演播楼

(崔光佐，北京师范大学教育学部教授、博士生导师，思维教学实验室主任)

目 录

第一章 绪论	(1)
第一节 研究背景	(1)
第二节 问题提出	(2)
第三节 本书结构	(3)
第二章 国内外研究现状	(6)
第一节 核心概念	(6)
第二节 一般问题解决的过程模型	(9)
一 国外研究	(9)
二 国内研究	(14)
三 述评	(15)
第三节 数学问题解决的过程模型	(16)
一 国外研究	(16)
二 国内研究	(21)
三 述评	(22)
第四节 数学问题解决认知过程分析	(23)
一 解题过程中的问题表征	(23)
二 问题解决过程中的语句表征	(25)
三 问题解决过程中的图式	(27)
四 问题表征与解题效果	(28)
五 述评	(29)
第五节 小结	(29)

第三章 问题与研究设计	(31)
第一节 问题聚焦:拟解决的关键问题	(31)
第二节 研究框架	(31)
第三节 研究方法	(34)
第四节 研究假设	(37)
第五节 理论基础	(38)
第六节 研究意义	(40)
一 理论意义	(40)
二 实践价值	(41)
第七节 小结	(41)
第四章 小学数学问题解决认知模型	(42)
第一节 小学儿童的心理特点	(42)
一 小学儿童思维发展特点	(42)
二 小学儿童内部语言的发展特点	(43)
三 小学儿童记忆发展特点	(43)
四 认知神经科学中的小学儿童数学认知研究	(44)
五 启示:构建认知模型的理论基础	(47)
第二节 小学数学各类问题解题过程分析	(47)
一 “数与代数”类问题	(48)
二 “图形与几何”类问题	(51)
三 “统计与概率”类问题	(52)
四 启示:构建认知模型的实例基础	(53)
第三节 小学数学问题解决认知模型	(54)
一 认知模型	(54)
二 认知模型的特点	(62)
三 认知模型的几点说明	(62)
四 认知模型的教育意义	(63)
第四节 小结	(63)
第五章 小学数学问题解决认知模拟	(65)
第一节 认知模拟依据	(65)

第二节	认知模拟工具	(66)
一	ACT-R 工具	(66)
二	ACT-R 应用领域	(67)
三	ACT-R 认知神经学基础	(68)
第三节	认知模拟	(69)
一	程序性知识问题解决认知模拟	(70)
二	陈述性知识问题解决认知模拟	(78)
第四节	程序性知识问题解决认知模拟实证研究	(86)
一	目的	(86)
二	方法	(86)
三	结果分析	(88)
四	讨论	(90)
第五节	陈述性知识问题解决认知模拟实证研究	(93)
一	目的	(93)
二	方法	(93)
三	结果分析	(94)
四	讨论	(97)
第六节	认知模拟的贡献及局限性	(99)
第七节	小结	(100)
第六章	基于认知过程的小学数学探究问题设计	(101)
第一节	探究问题设计相关研究	(102)
一	探究教学模式及策略	(102)
二	关于探究问题的类型与设计	(103)
三	信息技术支持的数学探究学习	(104)
四	评述	(105)
第二节	探究问题设计依据与原则	(105)
一	探究问题设计依据	(105)
二	探究问题设计原则	(106)
第三节	典型探究问题设计	(108)
一	“众数”课前探究题设计	(109)

4 问题解决与认知模拟

二	“圆柱侧面积”课前探究题设计	(114)
第四节	探究问题教学应用	(117)
一	实验班与对比班推理能力比较	(118)
二	实验班数学推理能力比较分析	(119)
第五节	小结	(120)

第七章 “一对一”认知诊断

(122)

第一节	小学数学问题认知诊断	(123)
一	学生解答应用题认知诊断分析	(124)
二	认知神经科学领域中的数学认知诊断	(125)
第二节	“一对一”认知诊断的目的及特点	(126)
第三节	基于认知模型的“一对一”诊断	(128)
一	诊断流程	(128)
二	认知模型的作用	(130)
第四节	对数学教学的启示	(130)
一	关注学生的能力差异	(130)
二	有助于数学认知障碍的早期鉴别和干预	(131)
三	有针对性的开展面向数学认知障碍群体的 特殊辅导	(131)
四	合理利用学生“最近发展区”,促进认知发展	(131)
第五节	小结	(132)

第八章 “一对一”认知诊断的教学实践应用

(133)

第一节	实验设计	(133)
第二节	陈述性知识“一对一”认知诊断实证研究	(135)
一	目的	(135)
二	方法	(135)
三	结果分析	(139)
四	讨论	(153)
第三节	程序性知识“一对一”认知诊断实证研究	(156)
一	目的	(156)

二	方法	(156)
三	结果分析	(160)
四	讨论	(175)
第四节	实验结果对数学教学的启示	(176)
一	从生活实际出发,创设问题情境、合理设计 典型问题	(176)
二	将问题解决的阶段融入课堂教学中,帮助学生 形成良好的解题思路	(176)
三	学生解题遇到困难时,教师提供恰当的提示	(177)
四	重视对学生解题兴趣、态度、意志力等的培养	(177)
第五节	小结	(177)
第九章	数学课堂交互过程认知模拟	(179)
第一节	已有课堂交互分析方法	(180)
一	行为系统视角	(180)
二	信息系统视角	(181)
三	对已有分析方法的评述	(182)
第二节	课堂交互认知分析与模拟	(182)
一	学习科学的兴起	(182)
二	课堂交互认知分析框架	(184)
三	典型课堂交互认知分析与模拟	(186)
第三节	认知过程分析对课堂教学的启示	(190)
第四节	小结	(192)
结 论	(193)
附 录		
附录一	“异分母相加”问题解决认知模拟程序	(196)
附录二	“众数”问题解决认知模拟程序	(201)
附录三	认知诊断表	(217)
附录四	学生调查问卷	(218)

6 问题解决与认知模拟

附录五 教师访谈提纲 (222)

参考文献 (224)

后 记 (245)

第一章 绪论

第一节 研究背景

数学是人类文化的重要组成部分，随着世界信息化和数字化程度日益提高，数学素养对于每一位公民来说具有重要意义，是现代社会的每个公民应该具备的基本素养。数学问题解决能力是数学素养的重要组成部分，培养学生问题解决能力是数学教育的重要目标，已经受到世界各国数学教育界的重视。20世纪80年代，美国在学校数学教育的纲领性文件《行动的议程》（*An Agenda for action*）中就明确提出“数学课程应当围绕问题解决来组织”，“问题解决作为学校数学教育的核心”。2011年9月，奥巴马（Obama）政府再次批准了《初等和中等教育法案》（*Elementary and Secondary Education Act, ESEA*），专注于更好地改进学生的学习和提高问题解决能力。^①日本数学教育界也十分重视“问题解决”，于1994年开始全面实行新数学教学大纲，把“课题教学”列入大纲内容，而所谓“课题教学”就是以“问题解决”为特征的数学课。^②英国著名的《柯克克洛夫特报告》（*Cockcroft Report*）中认为“应将问题解决作为课程论的重要组成部分”。我国《义务教育数学课程标准》（2011年版）指出，“数学课程要使得人人都能获得良好的数学教育，不同的人在数学上得到不同的发展”^③，“学生自己发现和提出问题是创新的基础”^④。培养学生问题解

① U. S. Department of Education, *Elementary and Secondary Education Act* (<http://www.ed.gov/esea>) .

② 张天孝、唐彩斌：《美、日、德小学数学教材的共性特征及启示》，《比较教育研究》2005年第1期。

③ 中华人民共和国教育部制定：《义务教育数学课程标准》（2011年版），北京师范大学出版社2012年版，第2页。

④ 同上书，第7页。

决的能力是数学思想方法的育人功能之一。

提高学生问题解决能力也是减轻学业负担的有效手段。合理设计问题，通过有效的问题解决训练，帮助学生形成良好的知识结构、良好的解题习惯和数学思维方法，实现数学问题的深层次理解，是提高学生问题解决能力的有效途径。

第二节 问题提出

数学问题解决能力的培养应建立在对数学认知的研究基础上。我国《义务教育数学课程标准》（2011年版）指出“课程内容要符合学生的认知规律，不仅包括数学的结果，也包括数学结果的形成过程和蕴涵的数学思想方法”，“教师教学应该以学生的认知发展水平和已有的经验为基础”，“学习评价的主要目的是为了全面了解学生数学学习的过程和结果，评价既要关注学生学习的结果，也要重视学习的过程”。

前期调研发现，当前小学数学教学中，教师缺乏对学生问题解决认知过程的理解，教学往往靠个人经验，对解题困难学生的问题诊断也主要是依靠个人经验来判断，干预大多是在课堂上把出错的题目再给学生讲解一遍，缺少针对性，很难让学生真正理解问题。

近年来，学习科学的发展，尤其是认知心理学、脑科学、认知神经科学等领域的发展，为深入研究数学问题解决的认知过程提供了帮助。学习科学是一个研究教与学的跨学科领域，其研究目标首先是更好地理解认知过程和社会化过程以产生最有效的学习，其次便是用学习科学的知识来重新设计课堂和其他学习环境，从而使学习者能够更有效和更深入地学习。^①

教学过程依赖于学习过程，问题解决是数学学习的主要形式，对问题解决认知过程进行分析和研究，能帮助我们科学认识学生数学学习过程，正确把握学生的认知规律。本研究的核心问题是如何分析小学数学问题解决的认知过程。

^① [美] R. 基恩·索耶主编：《剑桥学习科学手册》，徐晓东等译，教育科学出版社 2010 年版，第 1—4 页。

第三节 本书结构

本书在已有研究的基础上,提出了问题解决认知模拟的方法,以数学问题为例开展实证研究,讨论了认知分析与模拟在数学课堂教学中的应用(如基于认知过程的小学数学探究问题设计、“一对一”认知诊断与应用、数学课堂交互过程认知模拟等)。本书的组织结构如图1—1所示。

第一章:分析研究的背景,提出本研究拟解决的问题。

第二章:界定研究中的核心概念,从一般问题解决的过程模型、数学问题解决的过程模型、数学问题解决认知过程分析等几方面进行文献综述。

第三章:阐述本研究拟解决的关键问题、采用的研究方法、研究的框架、理论基础、研究意义,从而保证研究问题的真实性、方法的科学性、过程的可操作性。

第四章:以小学儿童思维发展特点为基础,分析“数与代数”“图形与几何”“统计与概率”各部分内容的典型问题的解决过程,对波利亚数学问题解决模型进一步细化,在此基础上构建小学数学问题解决的认知模型,分析该模型的特点、应用范围,并论述教育意义。

第五章:在第四章构建问题解决认知模型的基础上,分析“异分母相加”和“众数”两类典型问题的解题过程,使用ACT-R(Adaptive Control of Thought-Rational)工具实现认知模拟。选取了某小学五、六年级各六名学生,采用口语报告法对两类问题的认知模拟结果进行实证研究,结果发现认知模拟和口语报告一致。

第六章:基于第四章、第五章对数学问题解决认知过程的分析 and 模拟,提出数学课堂探究问题的设计依据与原则,并以“众数”“圆柱侧面积”等知识点为例设计了典型探究问题,并在课堂教学中应用,分析了教学应用效果。

第七章:基于数学问题解决认知过程的分析 and 模拟,深入理解问题解决过程中的一系列认知操作和认知成分,探讨基于认知模型的“一对一”认知诊断流程,对学生尤其是学习困难学生问题解决认知过程进行诊断,为教学实践及学生个体发展提供更具体、更详细、更有针对性的指导和建议。

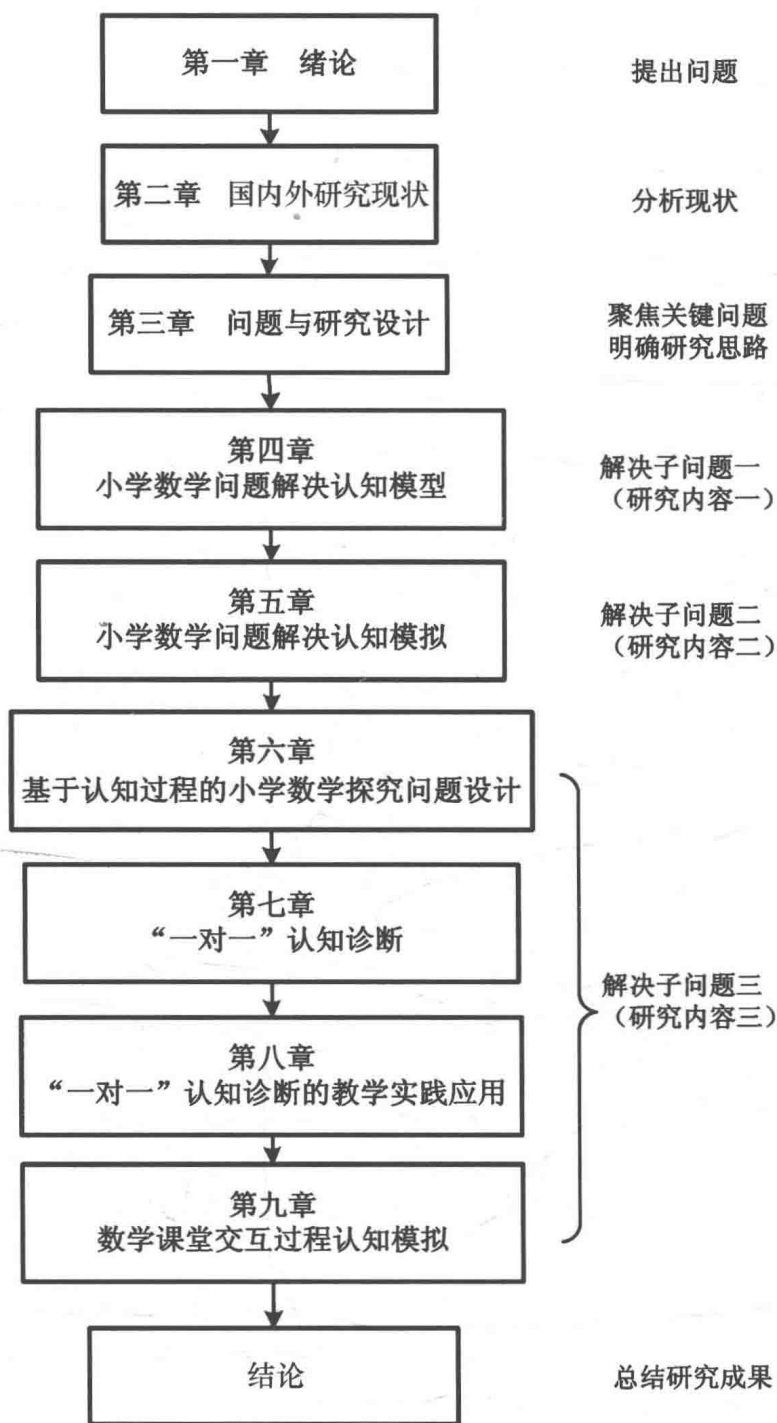


图 1—1 本书组织架构

第八章：在第七章介绍“一对一”认知诊断的基础上，本章分别以陈述性知识和程序性知识典型知识点为例，分析典型问题设计的依据和过程，采用口语报告法进行实证研究，结合学生调查问卷和教师访谈等方法对认知诊断过程和结果进行深入分析，并讨论其对数学教学的启示。

第九章：本章基于学习科学的研究成果，提出了从认知过程的角度对课堂交互过程进行分析的方法。在此基础上以中学（七年级）数学课堂《从不同方向看》为研究对象，选取典型课堂交互，利用思维模型对问答过程进行分析，并在 ACT-R 中实现了认知模拟。通过学习过程分析对课堂教学提出了三点建议，帮助教师更加有效地设计教学来促进学生学习。

结论：总结概括本书的主要研究成果、创新点，反思研究的不足之处。