

人工智能与智能系统

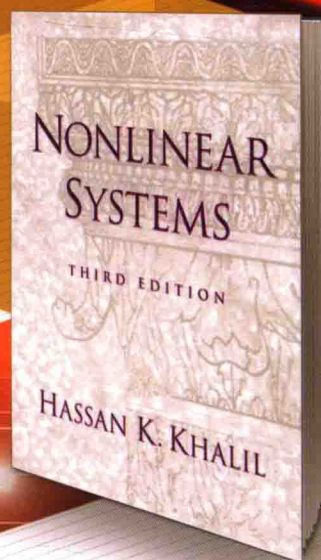
Nonlinear Systems, Third Edition

非线性系统 (第三版)

Nonlinear Systems, Third Edition

【美】 Hassan K. Khalil 著

朱义胜 董辉 李作洲 等译



中国工信出版集团



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
<http://www.phei.com.cn>

经典译丛·人工智能与知识系统

非线性系统

(第三版)

Nonlinear Systems

Third Edition

[美] Hassan K. Khalil 著

朱义胜 董辉 李作洲 等译

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书内容按照数学知识的由浅入深分成了四个部分。基本分析部分介绍了非线性系统的基本概念和基本分析方法;反馈系统分析部分介绍了输入-输出稳定性、无源性和反馈系统的频域分析;现代分析部分介绍了现代稳定性分析的基本概念、扰动系统的稳定性、扰动理论和平均化以及奇异扰动理论;非线性反馈控制部分介绍了反馈控制的基本概念的反馈线性化,并给出了几种非线性设计工具,如滑模控制、李雅普诺夫再设计、反步法、基于无源的控制和高增益观测器等。全书已根据作者2017年2月所发勘误表进行了内容更正。

本书既可以作为研究生第一学期非线性系统课程的教材,也可以作为工程技术人员、应用数学专业人员的自学教材或参考书。

Authorized translation from the English language edition, entitled *Nonlinear Systems*, Third Edition, 9780130673893 by Hassan K. Khalil, published by Pearson Education, Inc., Copyright ©2002 by Pearson Education, Inc.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced or transmitted in any forms or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage retrieval system, without permission from Pearson Education, Inc.

CHINESE SIMPLIFIED language edition published by PEARSON EDUCATION ASIA LTD., and PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY Copyright ©2017.

本书中文简体字版专有出版权由 Pearson Education(培生教育出版集团)授予电子工业出版社。未经出版者预先书面许可,不得以任何方式复制或抄袭本书的任何部分。

本书贴有 Pearson Education(培生教育出版集团)激光防伪标签,无标签者不得销售。

版权贸易合同登记号 图字:01-2003-4492

图书在版编目(CIP)数据

非线性系统:第三版/(美)哈森·K. 哈里尔(Hassan K. Khalil)著;朱义胜等译. —北京:电子工业出版社,2017.7 (经典译丛·人工智能与智能系统)

书名原文:Nonlinear Systems, Third Edition

ISBN 978-7-121-31452-0

I. ①非… II. ①哈… ②朱… III. ①非线性系统(自动化)—研究生—教材 IV. ①TP271

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第094561号

策划编辑:马 岚

责任编辑:马 岚

印 刷:北京京科印刷有限公司

装 订:北京京科印刷有限公司

出版发行:电子工业出版社

北京市海淀区万寿路173信箱 邮编 100036

开 本:787×1092 1/16 印张:33 字数:845千字

版 次:2017年7月第1版(原著第3版)

印 次:2017年7月第1次印刷

定 价:109.00元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换。若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010)88254888,88258888。

质量投诉请发邮件至 zltts@phei.com.cn,盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式:classic-series-info@phei.com.cn。

中文版序言

It is my pleasure and honor to write a preface to the Chinese translation of my book *Nonlinear Systems*. I am grateful to the Chinese scientists who took on such tremendous task. For me, as the author, the most gratifying return of writing this book is to know that many colleagues and students have used it and found it to be useful. This feeling can only increase knowing that the book will now be available to the largest scientific community in the world in its native language.

Hassan Khalil

East Lansing, Michigan, USA

——译文——

很荣幸能为我的著作的中译本写此序言,也非常感激为翻译此书付出极大心血的中国学者。作为本书原作者,我写这本书的最大回报莫过于得知众多同行及学生在使用本书,而且从中受益匪浅。中译本的出版让我更加感到欣慰,因为占世界科学界人数最多的中国读者,今后可以直接用自己的母语学习本书了。

译者序

非线性是自然界和工程技术领域里最普遍的现象。非线性系统的研究在近年来取得了可喜的进展,特别是以微分几何为工具发展起来的精确线性化方法,受到了普遍的重视。通过利用 Lie 括号以及微分同胚等基本工具研究非线性系统的状态、输入及输出变量之间的依赖关系,系统地建立了非线性控制系统可控制、可观测及可检测的充分或必要条件,特别是全局状态精确线性化和输入-输出精确线性化方法的发展,使复杂的非线性问题在一定条件下可以转化为线性问题来处理。加上计算机的普及和现代计算技术的发展,人们逐步对非线性系统有了进一步的了解。诸如非线性系统中的分岔、混沌、分形和奇怪吸引子等现象越来越引起学者们的兴趣,使其在生物学、化学、气象学、经济学、物理学和工程技术领域的应用也更加广泛。

目前,“非线性系统”在国外已经被许多工科院校列入相关专业研究生的学位课程或必修课,本书就是美国密歇根州立大学电气与计算机工程专业的研究生教材,深受读者欢迎。目前国内也出版了数十种关于非线性系统理论与应用方面的优秀教材和专著,但国外一些代表性著作在国内尚未普及,因此把国外优秀教材介绍给我国工程专业技术人员和学生是十分必要的。

本书作者 Hassan K. Khalil 博士是美国密歇根州立大学电气与计算机工程系的杰出教授,1989 年由于其在“奇异扰动理论及其在控制中的应用”所取得的成就被选为 IEEE 会士。多年来他一直从事非线性系统的教学和研究工作。

本书内容翔实,论证严谨,具有很强的系统性。全书按照数学知识的由浅入深编写而成。内容大体分成四部分:基本分析、反馈系统分析、现代分析和非线性反馈控制。从第 5 章开始,每个章节都相对独立,或者仅需要用到前面章节中的少量知识,使读者具有较大的灵活性。为了避免学生过早地接触压缩映射原理,将结构存在性和唯一性定理的证明移至附录中。

本书在前面两个版本的基础上,增加了近年来非线性控制中比较成功的一些内容,例如无源性和基于无源控制的扩展处理方法、高增益反馈、递归法、迭代方法、最优稳定控制和观测器,另外在二阶系统分析中还引入了分岔的概念。通过网址 www.prenhall.com/khalil 可查阅有关本书的各种资料。

参加全书翻译的有:董辉(序、前言和第 1 章至第 3 章)、李作洲(第 12 章和第 14 章以及全部附录)、李汝来(第 9 章至第 11 章)、沈红林(第 4 章)、周晓龙(第 5 章)、李斌斌(第 6 章)、赵柏山(第 7 章)、周芸(第 8 章)和桑士伟(第 13 章)。全书译文经朱义胜教授和董辉副教授统一整理,并对全部译稿进行了详细的审校。为便于读者对照英文原著,本书中的符号正斜体等的形式,尽量与英文版保持了一致。

在翻译过程中,我们还按照网站上给出的原书第三版的勘误表对照原书内容对译文一一进行了修改。虽然我们已尽了最大努力,但由于涉足非线性系统领域比较晚,专业知识和英语水平有限,译文中一定有不妥和疏漏之处,敬请读者提出宝贵意见。

前 言

本书是为研究生一年级的非线性系统或控制课程编写的^①,也可以作为工程技术人员或应用数学研究人员的参考书。它是作者在密歇根州立大学多年执教非线性系统课程的结晶。学习这门课程的学生应具备电子工程、机械工程或应用数学的基础知识,这门课的先修课程是与 Antsaklis and Michel[9], Chen[35], Kailath[94]或 Rugh[158]同等水平的教材讲授的线性系统研究生层次课程。如果学生具备了线性系统的知识,就不必为引入“状态”一词而担心学生难于理解,也就可以自由引用“传递函数”、“状态转移矩阵”和其他一些线性系统的概念。此外,学生还应具备任何工程或数学专业的研究生应有的一般数学基础,如微积分、微分方程和矩阵理论等。附录中汇集了一些书中用到的数学知识。

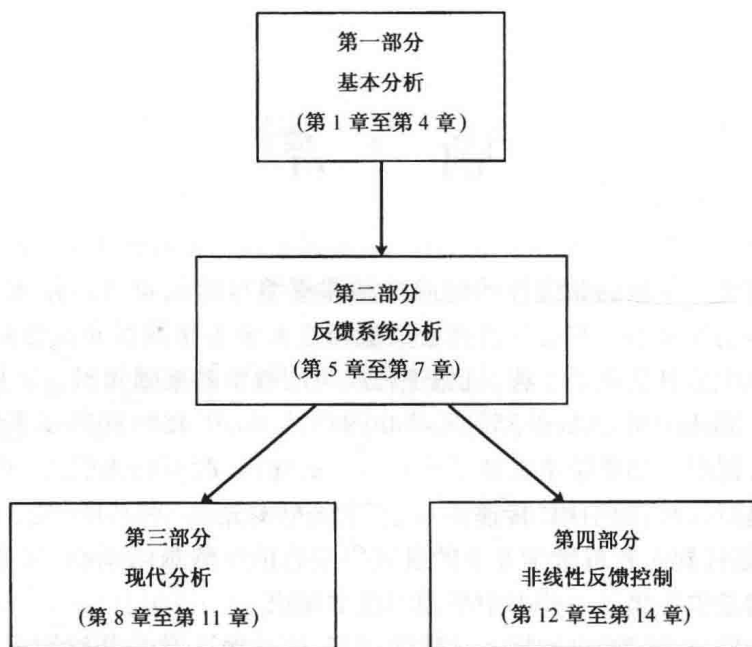
本书在写作中按章循序渐进地插入了数学内容,因此第2章是基础知识。实际上这一章可以在本科高年级学习,即使在低年级学习也没有困难,这也是把李雅普诺夫稳定性分为两部分讨论的原因。在4.1节到4.3节,引入了自治系统李雅普诺夫稳定性的实质,在这里不必担心一致性和 K 类函数等术语的学术性。在4.4节到4.6节以更适用于非自治系统的一般方式提出了李雅普诺夫稳定性问题,并允许进一步研究现代稳定性理论。第4章末引入的数学内容是为了让学生能顺利地学习其余内容。

附录中给出了一些较高水平的数学公式的证明,这些证明不必在课堂上讲授。把这些内容加进来一方面是因为课程内容本身的需要,另一方面是考虑到一些学生需要或希望学习这部分内容,例如要继续研究非线性系统或控制理论的博士生等,这些学生可以以自学的方式继续学习附录中的内容。

本书出版第三版的主要目的在于:

1. 使本书(特别是前面的章节)更适合一年级的研究生使用。以第3章所做的改动为例,将所有有关数学背景的内容、收缩映射定理、存在性及唯一性定理的证明都归入附录,而其他内容与第二版相比可读性更强。
2. 重新组织内容结构,使构造非线性系统或其控制过程更容易。从结构上看,本书可以分为四部分,如下页图所示。第一部分、第二部分和第三部分主要是非线性系统的分析过程,而第一部分、第二部分和第四部分的内容主要是非线性控制过程。
3. 更新第二版的内容,包括了一些近年来在非线性控制中证明是有用的观点或成果。第三版的新意在于:扩充了无源和基于无源的控制、滑模控制和高增益观测器的内容,此外还在二阶系统中引入了分岔。在学术方面,读者会看到在第10章和第11章中 Kurzweil 的逆李雅普诺夫定理,以及有关积分控制和增益定序法的新成果。
4. 更新了习题。第三版新增了170多道习题。

^① 采用本书作为教材的授课教师,可联系 te_service@phei.com.cn 获得本书的习题解答。——编者注



在本书的写作过程中,我得到了许多同事、学生和读者的支持。他们通过讨论、建议、更正以及一些建设性的意见和对前两版的反馈为我提供了极大的帮助。要答谢的人实在太多,想把他们的名字一一列出,又恐挂一漏万,谨在此向曾帮助过我的每一个人表示深深的谢意。

我还要特别感谢为我提供写作环境的密歇根州立大学,以及支持我研究非线性反馈控制的美国国家科学基金。

书中的所有计算,包括微分方程的数值解,都是用 MATLAB 和 Simulink 完成的,插图用 MATLAB 或 LATEX 绘图工具生成。

我很希望本书尽善尽美,但错误之处在所难免,如发现错误请发邮件给 khalil@msu.edu,本人将不胜感激。

本书配套网站为

www.prenhall.com/khalil/

其中包括本书最新勘误表^①、补充的习题以及其他一些相关内容。

Hassan K. Khalil

^① 已根据作者于 2017 年 2 月更新过的勘误表对译文做了相应的修改。——编者注

目 录

第1章 绪论	1
1.1 非线性模型和非线性现象	1
1.2 示例	3
1.2.1 单摆方程	3
1.2.2 隧道二极管电路	4
1.2.3 质量-弹簧系统	5
1.2.4 负阻振荡器	7
1.2.5 人工神经网络	9
1.2.6 自适应控制	10
1.2.7 一般非线性问题	12
1.3 习题	15
第2章 二阶系统	23
2.1 线性系统的特性	24
2.2 多重平衡点	30
2.3 平衡点附近的特性	33
2.4 极限环	35
2.5 相图的数值构造	38
2.6 周期轨道的存在	39
2.7 分岔	45
2.8 习题	50
第3章 基本性质	56
3.1 存在性和唯一性	56
3.2 连续性与初始条件和参数的关系	61
3.3 解的可微性和灵敏度方程	64
3.4 比较原理	66
3.5 习题	68
第4章 李雅普诺夫稳定性	73
4.1 自治系统	73
4.2 不变原理	83
4.3 线性系统和线性化	88
4.4 比较函数	96
4.5 非自治系统	98
4.6 线性时变系统和线性化	104

4.7	逆定理	108
4.8	有界性和毕竟有界性	112
4.9	输入-状态稳定性	116
4.10	习题	121
第5章	输入-输出稳定性	131
5.1	$\mathcal{L}$ 稳定性	131
5.2	状态模型的 $\mathcal{L}$ 稳定性	135
5.3	$\mathcal{L}_2$ 增益	141
5.4	反馈系统:小增益定理	147
5.5	习题	150
第6章	无源性	154
6.1	无记忆函数	154
6.2	状态模型	158
6.3	正实传递函数	161
6.4	$\mathcal{L}_2$ 稳定性和李雅普诺夫稳定性	164
6.5	反馈系统:无源性定理	167
6.6	习题	176
第7章	反馈系统的频域分析	179
7.1	绝对稳定性	179
7.1.1	圆判据	180
7.1.2	Popov 判据	187
7.2	描述函数法	190
7.3	习题	201
第8章	现代稳定性分析	205
8.1	中心流形定理	205
8.2	吸引区	211
8.3	类不变定理	218
8.4	周期解的稳定性	223
8.5	习题	226
第9章	扰动系统的稳定性	230
9.1	零扰动	230
9.2	非零扰动	235
9.3	比较法	237
9.4	无限区间上解的连续性	241
9.5	互联系统	243
9.6	慢变系统	248
9.7	习题	253

第 10 章	扰动理论和平均化	259
10.1	扰动法	259
10.2	无限区间上的扰动	268
10.3	自治系统的周期扰动	270
10.4	平均化法	273
10.5	弱非线性二阶振荡器	280
10.6	一般平均化法	281
10.7	习题	285
第 11 章	奇异扰动	288
11.1	标准奇异扰动模型	288
11.2	标准模型的时间尺度特性	293
11.3	无限区间上的奇异扰动	299
11.4	慢流形和快流形	301
11.5	稳定性分析	306
11.6	习题	313
第 12 章	反馈控制	319
12.1	控制概述	319
12.2	通过线性化实现稳定	323
12.3	积分控制	325
12.4	线性化积分控制	327
12.5	增益分配	329
12.6	习题	340
第 13 章	反馈线性化	344
13.1	引言	344
13.2	输入-输出线性化	347
13.3	全状态线性化	355
13.4	状态反馈控制	362
13.4.1	稳定性	362
13.4.2	跟踪	369
13.5	习题	372
第 14 章	非线性设计工具	377
14.1	滑模控制	377
14.1.1	引例	377
14.1.2	稳定性	385
14.1.3	跟踪	391
14.1.4	积分控制调节	393
14.2	李雅普诺夫再设计	397
14.2.1	稳定性	397

14.2.2 非线性阻尼 403

14.3 反步设计法 404

14.4 基于无源的控制 414

14.5 高增益观测器 419

14.5.1 启发性例子 420

14.5.2 稳定性 425

14.5.3 通过积分控制的调节 429

14.6 习题 430

附录 A 数学知识复习 445

附录 B 压缩映射 450

附录 C 证明 453

参考文献说明 498

参考文献 502

符号表 514

术语表 515

第1章 绪 论

工程技术人员在分析和设计电路、机械系统、控制系统和其他工程学科中的非线性动力学系统时,需要吸收和消化大量的非线性分析工具。本书引入了一些这样的工具,特别是强调了用李雅普诺夫(Lyapunov)方法进行非线性系统稳定性分析,并从输入-输出和无源透视方面对反馈系统的稳定性给予特别关注。我们还提出了用于检测和分析“自由”振荡的工具,包括描述函数法。此外还引入了扰动理论的渐近工具,包括一般扰动和奇异扰动。最后,我们介绍了一些非线性反馈控制工具,包括线性化、增益定序法、积分控制、反馈线性化、滑模控制、李雅普诺夫再设计、反步法(backstepping)、基于无源性的控制和高增益观测器。

1.1 非线性模型和非线性现象

我们将处理由有限个耦合一阶常微分方程

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p)\end{aligned}$$

建模的动力学系统,其中, $\dot{x}_i$ 表示 x_i 对时间变量 t 的导数, $u_1, u_2, \dots, u_p$ 指输入变量。 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 称为状态变量,表示动力学系统对其过去状态的记忆。通常用向量符号以紧凑的形式写出这组方程。定义

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}, \quad f(t, x, u) = \begin{bmatrix} f_1(t, x, u) \\ f_2(t, x, u) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n(t, x, u) \end{bmatrix}$$

把 n 个一阶微分方程重写为一个 n 维一阶向量微分方程:

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad (1.1)$$

式(1.1)称为状态方程, x 称为状态, u 称为输入。有时,把另一个方程

$$y = h(t, x, u) \quad (1.2)$$

与式(1.1)联立,定义一个 q 维输出向量 y ,该向量包含了与动力学系统分析有关的变量,如一些物理上可测量的变量或一些需要以特殊方式表现的变量。我们把式(1.2)称为输出方程,

把方程(1.1)和方程(1.2)统称为状态空间模型,或简称为状态模型。有限维物理系统的数学模型并不总是以状态模型的形式出现,但我们总可以通过仔细选择状态变量,以这种方式建立物理系统的模型。本章后面给出的例题和习题将说明状态模型的多种功能。

本书大部分分析是处理状态方程,无须输入 u 的显式表示,即所谓的无激励状态方程

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (1.3)$$

无激励状态方程并不一定意味着系统的输入为零。可以把输入指定为一个给定时间的函数 $u = \gamma(t)$, 一个给定状态的反馈函数 $u = \gamma(x)$, 或同时是时间和状态的函数 $u = \gamma(t, x)$ 。把 $u = \gamma$ 代入方程(1.1)中消去 u 就会产生无激励状态方程。

当函数 f 与 t 没有明显关系时,会出现一个特例,即

$$\dot{x} = f(x) \quad (1.4)$$

这种情况下的系统称为自治系统或时不变系统。自治系统的特点是不随时间原点的移动而改变,因为时间变量从 t 变化到 $\tau = t - a$ 时不会改变状态方程的右边。如果系统不是自治的,就称为非自治系统或时变系统。

处理状态方程的一个重要概念是平衡点的概念。对于状态空间中的点 $x = x^*$, 只要系统状态从 x^* 点开始,在将来任何时刻都将保持在 x^* 点不变,那么这一点就称为方程(1.3)的平衡点。对于方程(1.4)的自治系统,平衡点是方程

$$f(x) = 0$$

的实根。平衡点可以是孤立的,也就是说在其邻域内不会有另一个平衡点,否则可能有一个平衡点的连续统(a continuum of equilibrium points)。

对于线性系统,状态模型(1.1) ~ (1.2) 具有如下特殊形式:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u \\ y &= C(t)x + D(t)u \end{aligned}$$

我们假设读者熟悉线性系统中基于叠加原理的分析方法。由于我们是从线性系统进入到非线性系统,因此将面对更难的情形。叠加原理不再成立,分析方法将包含更高深的数学理论。因为我们已知线性系统的有力分析方法,所以分析非线性系统的第一步通常是将其在某些特定点上线性化,并分析得到的线性模型。这是工程惯例,也是常用的方法。毫无疑问,只要允许,就应该尽可能通过线性化来分析非线性系统的特性。然而,仅仅线性化是不够的,我们还必须开发用于分析非线性系统的方法。线性化有两个基本限制。第一,由于线性化是在工作点附近的近似,因此仅能预测出这一点邻域内非线性系统的“局部”特性,而不能预测出远离工作点的“非局部”特性,当然也就不能预测整个状态空间的“全局”特性。第二,非线性系统动力学远比线性系统动力学丰富,有一些“本质上的非线性”只有在非线性条件下才能发生,因此不能由线性模型描述或预测。下面是几个本质上是非线性现象的例子:

- **有限逃逸时间** 非稳定线性系统的状态只有当时间趋于无穷时才会达到无穷,而非线性系统的状态可以在有限时间内达到无穷。
- **多孤立平衡点** 线性系统只有一个孤立平衡点,这样它就只有一个吸引系统状态的稳态工作点,而与初始状态无关。非线性系统可以有多个孤立平衡点,其状态可能收敛于几个稳态工作点之一,收敛于哪个工作点取决于系统的初始状态。

- **极限环** 对于振荡的线性时不变系统,必须在虚轴上有一对特征值,这是在有扰动的条件下几乎不可能保持的非鲁棒条件。即使我们能做到,振荡幅度也将取决于初始状态。在现实生活中,只有非线性系统才能产生稳定振荡,有些非线性系统可以产生频率和幅度都固定的振荡,而与初始状态无关。这类振荡就是一个极限环。
- **分频振荡、倍频振荡或殆周期振荡** 稳定线性系统的输出信号频率与输入信号频率相同。而非线性系统在周期信号激励下,可以产生具有输入信号频率的分频或倍频振荡,甚至可以产生殆周期振荡,其中一个例子就是周期振荡频率之和,而不是每个振荡频率的倍频。
- **混沌** 非线性系统的稳态特性可能更为复杂,它既不是平衡点,也不是周期振荡或殆周期振荡,这种特性通常称为混沌。有些混沌运动显示出随机性,尽管系统是确定的。
- **特性的多模式** 同一非线性系统显示出两种或多种模式是很正常的。无激励系统可能有不止一个极限环。具有周期激励的系统可能会显示倍频、分频或更复杂的稳态特性,这取决于输入信号的幅度和频率。甚至可能当激励幅度和频率平滑变化时,也会显示出不连续的跳跃性能模式。

本书仅讨论前三种现象^①,多平衡点和极限环将在下一章讲到二阶自治系统时介绍,有限逃逸时间现象将在第3章中介绍。

1.2 示例

1.2.1 单摆方程

考虑图1.1所示的单摆, l 表示摆杆的长度, m 表示摆锤的质量,假设杆是硬质的且质量为零。用 θ 表示杆与通过中心点的竖直轴间的夹角。单摆在竖直平面内自由摆动,摆锤以半径为 l 的圆运动。为了写出单摆的运动方程,先来确定作用在摆锤上的力。有一个向下的重力 mg , g 为重力加速度。还有一个阻碍运动的摩擦力,假设与摆锤的速度成正比,摩擦系数为 k 。运用牛顿第二运动定律,可写出沿切线方向的运动方程

$$ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - kl\dot{\theta}$$

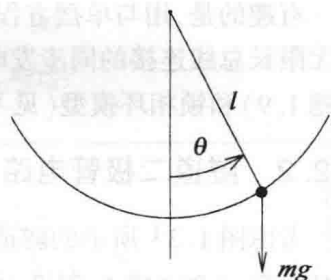


图1.1 单摆

写沿切线方向的运动方程的好处是方程中不出现杆的张力,因为它在法线方向上。写中心点的运动方程也可得到与上式相同的方程。为得到单摆的状态模型,我们取状态变量 $x_1 = \theta$, $x_2 = \dot{\theta}$,状态方程为

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (1.5)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{k}{m}x_2 \quad (1.6)$$

为求平衡点,设 $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ 并解方程求 x_1 和 x_2 :

$$\begin{aligned} 0 &= x_2 \\ 0 &= -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{k}{m}x_2 \end{aligned}$$

^① 要阅读有关激励振荡、混沌、分岔及其他重要内容,请参阅文献[70],文献[74],文献[187]和文献[207]。

平衡点位于 $(n\pi, 0)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。从单摆的物理描述看,很显然单摆仅有两个平衡点,对应于 $(0, 0)$ 和 $(\pi, 0)$,其他平衡点与这两个平衡点重合,平衡点数对应于单摆停在两个平衡点之一前所进行的全摆动的次数。例如,如果单摆在停于垂直向下的位置之前进行了 m 次完全 360° 循环,那么从数学意义上讲,可以说单摆的平衡点为 $(2m\pi, 0)$ 。我们在研究单摆时,将只关心两个“非平凡的”平衡点 $(0, 0)$ 和 $(\pi, 0)$,在物理上可看出这两个平衡位置彼此差异很大。单摆确实可以停留在平衡点 $(0, 0)$ 上,但在平衡点 $(\pi, 0)$ 上几乎不可能保持静止,因为来自平衡点的一个无穷小的干扰就会使单摆偏离该平衡点。这两个平衡点的区别在于其稳定性,这一点我们将进行深入研究。

有时忽略摩擦阻力有助于研究单摆方程,即设 $k = 0$,得到的系统

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (1.7)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 \quad (1.8)$$

在某种意义上说是保守系统,即如果给单摆一个初始推力,它就会永远保持无衰减振荡,能量在动能和势能之间相互转换而无耗散。当然这是不现实的,但给出了单摆特性,也有助于求出当摩擦系数 k 很小时单摆方程的近似解。如果能运用单摆的力矩 T ,就可以得到另一种形式的单摆方程,力矩可看成如下方程的控制输入:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (1.9)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2 + \frac{1}{ml^2} T \quad (1.10)$$

有趣的是,用与单摆方程相似的方程可对几个毫无关系的物理系统建模。这样的例子有与无限长总线连接的同步发电机的模型(见习题 1.8),约瑟夫森(Josephson)结电路模型(见习题 1.9)和锁相环模型(见习题 1.11),因而单摆方程非常重要。

1.2.2 隧道二极管电路

考虑图 1.2^①所示的隧道二极管电路,隧道二极管的特性为 $i_R = h(v_R)$,电路中的储能元件是电容 C 和电感 L ,假设它们是线性时不变的,可由方程

$$i_C = C \frac{dv_C}{dt} \quad \text{和} \quad v_L = L \frac{di_L}{dt}$$

对其建模,其中 i 是通过元件的电流, v 是其两端的电压,下标表示特指的元件。为写出系统的状态模型,取 $x_1 = v_C$, $x_2 = i_L$ 作为状态变量, $u = E$ 为常数输入。为写出 x_1 的状态方程,需要把 i_C 表示为状态变量 x_1, x_2 和输入 u 的函数,运用基尔霍夫电流定律,流过结点©的电流的代数和为零,可写出方程

$$i_C + i_R - i_L = 0$$

因此

$$i_C = -h(x_1) + x_2$$

同样,需要把 v_L 表示为状态变量 x_1, x_2 和输入 u 的函数,运用基尔霍夫电压定律,左边回路中各元件电压降的代数和为零,可写出方程

^① 本图以及图 1.3 和图 1.7 都取自文献[39]。

$$v_C - E + Ri_L + v_L = 0$$

因此

$$v_L = -x_1 - Rx_2 + u$$

$$\text{现在就可以写出电路的状态模型 } \dot{x}_1 = \frac{1}{C} [-h(x_1) + x_2] \quad (1.11)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{L} [-x_1 - Rx_2 + u] \quad (1.12)$$

设 $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$ 并解方程

$$0 = -h(x_1) + x_2$$

$$0 = -x_1 - Rx_2 + u$$

求解 x_1 和 x_2 , 即可确定系统的平衡点。因此方程

$$h(x_1) = \frac{E}{R} - \frac{1}{R}x_1$$

的根即为平衡点。

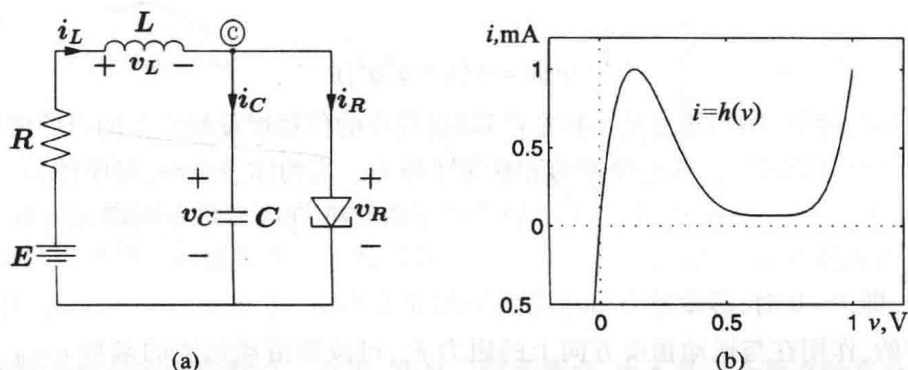


图 1.2 (a)隧道二极管;(b)隧道二极管 v_R - i_R 特性

图 1.3 形象地显示,对于 E 和 R 的某个值,方程有三个孤立的根,对应于系统的三个孤立平衡点。平衡点的数目会随 E 和 R 值的变化而变化。例如,如果 R 不变而增大 E ,只会得到一个平衡点,只有 Q_3 存在。另一方面,如果保持 R 不变而减小 E ,最后就只有平衡点 Q_1 。假设我们讨论多平衡点的情况,在电路的实验装置中可以观察这些平衡点中的哪一个呢? 答案取决于平衡点的稳定性质,第 2 章将再讨论这个问题,并给出答案。

1.2.3 质量-弹簧系统

在图 1.4 所示的质量-弹簧机械系统中,在水平面上滑动并通过弹簧连接到竖直表面的物体 m 受到一个外力 F 的作用。定义物体距参考点的位移为 y ,根据牛顿运动定律,有

$$m\ddot{y} + F_f + F_{sp} = F$$

其中 F_f 是摩擦阻力, F_{sp} 是弹簧的回复力。设 F_{sp} 只是位移 y 的函数,即 $F_{sp} = g(y)$,同时假设参考点位于 $g(0) = 0$ 处,外力 F 由我们设定。对于不同的 F, F_f 和 g ,会出现几个有趣的自治和非自治二阶系统模型。

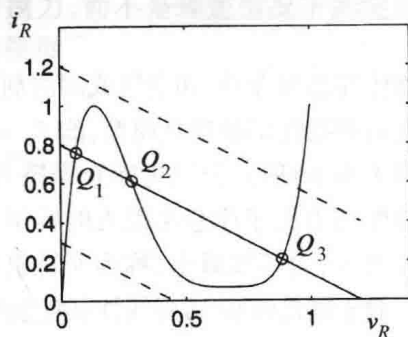


图 1.3 隧道二极管电路的平衡点

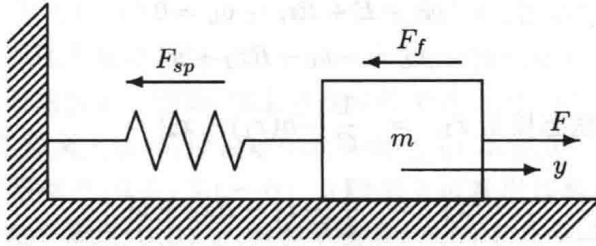


图 1.4 质量-弹簧机械系统

位移相对较小时,弹簧的回复力可用线性函数 $g(y) = ky$ 建模,其中 k 是弹性系数。但是当位移较大时,回复力与 y 是非线性关系。例如,函数

$$g(y) = k(1 - a^2 y^2)y, \quad |ay| < 1$$

的模型称为软化弹簧,即超过某一特定位移时,较大的位移增量所产生的力的增量较小。另一方面,函数

$$g(y) = k(1 + a^2 y^2)y$$

的模型称为硬化弹簧,即当超过某一特定位移时,较小的位移增量所产生的力的增量较大。

阻力 F_f 包括静摩擦力、库仑摩擦力和黏滞摩擦力。当物体静止时,静摩擦力 F_s 与水平面平行,其大小限制在 $\pm \mu_s mg$, $0 < \mu_s < 1$ 是静摩擦系数。 F_s 在其取值范围内无论取何值都保持物体静止。当物体开始运动时,一定有一个作用在物体上的力克服由静摩擦引起的运动阻力。在没有外力,即 $F = 0$ 时,静摩擦力将与弹簧的回复力平衡,并当 $|g(y)| \leq \mu_s mg$ 时保持平衡。一旦运动开始,作用在与运动相反方向上的阻力 F_f ,可按照滑动速度的函数 $v = \dot{y}$ 建立模型。由库仑摩擦引起的阻力 F_c ,其大小为常数 $\mu_k mg$, μ_k 是动摩擦系数,即

$$F_c = \begin{cases} -\mu_k mg, & \text{当 } v < 0 \\ \mu_k mg, & \text{当 } v > 0 \end{cases}$$

当物体在黏滞介质,如空气或润滑剂中运动时,会有由于黏滞性引起的摩擦力。这个力通常按照速度的非线性函数建立模型,即 $F_v = h(v)$, $h(0) = 0$ 。当速度较小时,可假设 $F_v = cv$ 。图 1.5(a)和图 1.5(b)所示分别为库仑摩擦力和库仑摩擦力加线性黏滞摩擦力的例子,图 1.5(c)所示为静摩擦力大于库仑摩擦力时的例子,而图 1.5(d)所示的是与图 1.5(c)相似的情况,但随着速度增大,力连续减小,称为斯特里贝克(Stribeck)效应。

对于硬化弹簧,考虑线性黏滞摩擦力和一个周期外力 $F = A \cos \omega t$,可得到达芬(Duffing)方程

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky + ka^2 y^3 = A \cos \omega t \quad (1.13)$$

这是研究具有周期激励的非线性系统的经典例子。

对于线性弹簧,考虑静态摩擦力、库仑摩擦力和线性黏滞摩擦力,当外力为零时可得到

$$m\ddot{y} + ky + c\dot{y} + \eta(y, \dot{y}) = 0$$

$$\text{其中 } \eta(y, \dot{y}) = \begin{cases} \mu_k mg \operatorname{sign}(\dot{y}), & \text{当 } |\dot{y}| > 0 \\ -ky, & \text{当 } \dot{y} = 0 \text{ 且 } |y| \leq \mu_s mg/k \\ -\mu_s mg \operatorname{sign}(y), & \text{当 } \dot{y} = 0 \text{ 且 } |y| > \mu_s mg/k \end{cases}$$

当 $\dot{y} = 0$ 且 $|y| \leq \mu_s mg/k$ 时,可由平衡条件 $\ddot{y} = \dot{y} = 0$ 得到 $\eta(y, \dot{y})$ 的值。取 $x_1 = y, x_2 = \dot{y}$, 状态模型为