



装备科技译著出版基金

Optimal Control with Aerospace Applications

最优控制 在航天器中的应用

[美] James M. Longuski

José J. Guzmán 著

John E. Prussing

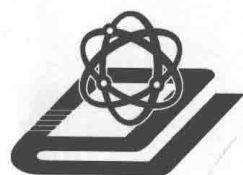
晋玉强 王丽英 译



国防工业出版社
National Defense Industry Press



Springer



装备科技译著出版基金

最优控制在航天器 中的应用

Optimal Control with Aerospace Applications

【美】James M. Longuski

José J. Guzmán

John E. Prussing 著

晋玉强 王丽英 译

国防工业出版社

• 北京 •

著作权合同登记 图字：军-2016-143 号

图书在版编目 (CIP) 数据

最优控制在航天器中的应用/(美)詹姆斯·罗吉斯特 (James M. Longuski), (美)约瑟·古斯曼 (José J. Guzmán), (美)约翰·普鲁斯 (John E. Prussing) 著; 晋玉强, 王丽英译. —北京: 国防工业出版社, 2017.4

书名原文: Optimal Control with Aerospace Applications

ISBN 978-7-118-11237-5

I. ①最… II. ①詹… ②约… ③约… ④晋… ⑤王…
III. ①最佳控制—应用—航天器 IV. ①V47

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 076028 号

Translation from English language edition:

Optimal control with Aerospace Applications

by James M. Longuski, José J. Guzmán, John E. Prussing

Copyright©Springer Science + Business Media New York 2014

All Rights Reserved

本书简体中文版由 Springer Science + Business Media 授权国防工业出版社独家出版发行。
版权所有, 侵权必究。

※
国防工业出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)
北京嘉恒彩色印刷有限责任公司
新华书店经售



*
开本 710×1000 1/16 印张 13 字数 245 千字
2017 年 4 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—2000 册 定价 75.00 元

(本书如有印装错误, 我社负责调换)

国防书店: (010) 88540777

发行邮购: (010) 88540776

发行传真: (010) 88540755

发行业务: (010) 88540717

译者序

最优控制理论已经成为航空航天工程中的一个重要领域，是高等院校自动化专业的学生及工程师必须掌握的一门理论。本书介绍如何从变分计算的基本理论开始，一步步得到必要条件的过程。同时，介绍最优控制中的基本计算方法。本书的最大优点是可读性强，只需要读者具备和了解相关的工程背景、数学基础知识——微积分、微分方程、数值解等，不需要提前知道变分是如何计算的、必要条件的意义及欧拉-拉格朗日定理、魏尔斯特拉斯条件和庞特里亚金最小值原理等相关理论。本书的目的是向读者提供充分的知识框架，使得读者不仅能够阅读相关文献、学习更深层次的教科书（如贝叶斯最优控制），而且能够应用相关理论来寻找实际问题中的最优解。

本书内容翔实、层次分明、特色突出，在内容安排上，除给出必要的定理证明框架，还列举大量的应用实例加深对定理的理解。例如，在介绍欧拉-拉格朗日定理时，给出伴随法和非伴随法：前者通过额外的拉格朗日算子将终端约束加入代价函数中，最终构成一个代数形式的横截条件；后者则相反，构成了一个微分形式的横截条件。同时，给出这两种方法在航空问题中的应用。此外，作者将时间最优卫星起飞进入轨道作为贯穿整本书的一个重要实例。同时，为读者提供了与之相关的参考文献及参考书籍，以促进读者做进一步的研究，具有较强的理论基础和应用指导价值。

全书共分为10章：第1章参数优化；第2章最优控制理论；第3章欧拉-拉格朗日定理；第4章欧拉-拉格朗日定理的应用；第5章魏尔斯特拉斯条件；第6章最小值原理；第7章最优控制的应用；第8章魏尔斯特拉斯-艾德曼拐角条件；第9章边界控制问题；第10章最优火箭轨迹的一般理论。

本书的出版得到了装备科技译著出版基金、海军航空工程学院“2110”工程的资助，在此表示衷心感谢！

译者

目 录

第 1 章 参数优化	1
1.1 引言	1
1.2 带约束的参数优化	2
1.2.1 拉格朗日乘子	3
1.2.2 参数优化: 霍曼转移	4
1.2.3 霍曼转移的推广	7
1.2.4 双抛物线转移	9
习题	9
第 2 章 最优控制理论	13
2.1 卫星的最优入轨问题	13
2.2 问题的一般性描述	15
2.3 Bolza 型、Lagrange 型、Mayer 型性能指标问题	18
2.3.1 Lagrange 型性能指标到 Mayer 型性能指标的转换	19
2.3.2 Mayer 型问题到 Lagrange 型问题的转化	19
2.4 考虑容许函数的实例	19
2.5 小结	25
习题	25
第 3 章 欧拉 - 拉格朗日定理	26
3.1 变分	26
3.2 欧拉 - 拉格朗日方程和最速下降问题	27
3.3 欧拉 - 拉格朗日定理	30
3.3.1 欧拉 - 拉格朗日定理的证明	31
3.3.2 欧拉 - 拉格朗日定理小结	36
3.3.3 横截条件的变换形式	36
3.4 小结	39
习题	40
第 4 章 欧拉 - 拉格朗日定理的应用	42
4.1 引言	42
4.2 两点边值问题	42

4.3	终端约束的两种处理方法	44
4.4	横截条件	45
4.4.1	情形 1: 终端时刻固定	46
4.4.2	情形 2: 终端状态固定	47
4.4.3	情形 3: 终端端点固定	48
4.5	提供必要边界条件的一般情形	48
4.5.1	伴随方法	48
4.5.2	非伴随方法	49
4.6	例子	49
4.7	优化问题的“教科书”	58
4.8	常哈密顿函数	63
4.9	小结	64
	习题	65
第 5 章	魏尔斯特拉斯条件	67
5.1	引言	67
5.2	魏尔斯特拉斯必要条件的阐述	67
5.3	魏尔斯特拉斯必要条件的证明	68
5.4	小结	72
	习题	72
第 6 章	最小值原理	74
6.1	最小值原理的阐述	74
6.1.1	问题描述	74
6.1.2	庞特里亚金最小值原理	75
6.1.3	例子	76
6.2	Legendre – Clebsch 必要条件	79
6.3	充分必要条件的注释	79
6.4	强极值和弱极值	80
6.5	非最小弱极值的例子	82
6.6	二阶充分必要条件	86
6.7	小结	90
	习题	90
第 7 章	最优控制的应用	92
7.1	飞行器性能优化	92
7.2	火箭射程最大化	98
7.2.1	f 为常数时运动方程的积分	101

7.2.2	最优轨迹	102
7.2.3	最大射程方程	103
7.3	时间最优卫星入轨	104
7.3.1	运动方程的积分形式	105
7.3.2	两点边值问题	110
7.3.3	考虑大气阻力的平坦地球起飞问题	110
7.4	小结	115
	习题	115
第 8 章	魏尔斯特拉斯 - 艾德曼拐角条件	118
8.1	魏尔斯特拉斯 - 艾德曼拐角条件阐述	118
8.2	魏尔斯特拉斯 - 艾德曼拐角条件的证明	118
8.3	小结	123
第 9 章	边界控制问题	124
9.1	带约束的最优控制问题	124
9.2	有界控制问题的例子	125
9.3	奇异弧	132
9.4	小结	135
	习题	135
第 10 章	最优火箭轨迹的一般理论	136
10.1	引言	136
10.2	运动方程	136
10.3	大推力和小推力发动机	137
10.4	火箭发动机的代价函数	137
10.5	一阶必要条件	140
10.5.1	常冲量比最优轨迹	140
10.5.2	最优脉冲轨迹	143
10.5.3	变比冲最优轨迹	145
10.6	均匀重力场下的最优轨迹	147
10.7	小结	148
	习题	149
附录 A	时间最优月球爬升	151
A.1	基于 MATLAB 的两点边值求解器	151
A.2	求解方法	151
A.3	MATLAB 代码	153

附录 B	“泰坦”二号火箭发射的时间最优	159
B.1	两点边值问题的标量化	159
B.2	求解方法	162
B.3	结论	162
B.4	MATLAB 代码	163
附录 C	最优小推力轨道间转移问题	172
C.1	优化问题	172
C.2	标量化的运动方程	173
C.3	欧拉 - 拉格朗日定理的应用	174
C.4	边界条件和两点边值问题	175
C.5	结论	176
C.6	MATLAB 代码	178
参考文献		184

第1章 参数优化

1.1 引言

参数优化和最优控制理论是最优化问题的两大分支。在有限维的参数优化问题（参数不是时间的函数）中，目标是使具有有限维参数的函数达到最小值。由于本书主要介绍最优控制理论，因此本章仅简单介绍参数优化理论。最优控制（参数是时间的函数的一个无限维问题）是指寻找 n 维状态变量 $\mathbf{x}(t)$ ，使得某种形式的泛函（见第2章）达到最小化。

参数优化（普通形式的最大化和最小化理论）是以变分法为基础的。通常情况下，无约束条件问题可描述为寻找 $\mathbf{x}$ 最小化：

$$J = f(\mathbf{x}) \quad (1.1)$$

式中： J 为标量形式的代价函数或性能指标； $\mathbf{x}$ 为 n 维常向量。

若 x_i 独立， f 关于 x_i 的所有偏导数连续，则下式定义了一个稳定解 $\mathbf{x}^*$ ：

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (1.2)$$

式 (1.2) 是极值（最大值或最小值）存在的必要条件，注意到，可以通过使 $-f$ 最小化，达到 f 的最大化。

若函数 f 在稳定点 $\mathbf{x}^*$ 处的所有二阶偏导数 $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ 所构成的矩阵是一个正定矩阵，则稳定点 $\mathbf{x}^*$ 是局部最小值点。为保证此矩阵的存在性，函数 f 的所有二阶偏导数必须连续。

在图 1.1 中， $\mathbf{x}$ 是一个二维向量。在这个例子中，使得 $f(x_1, x_2)$ 最小化的充分必要条件为

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \quad (1.4)$$

和

$$[\delta x_1 \ \delta x_2] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} > 0 \quad (1.5)$$

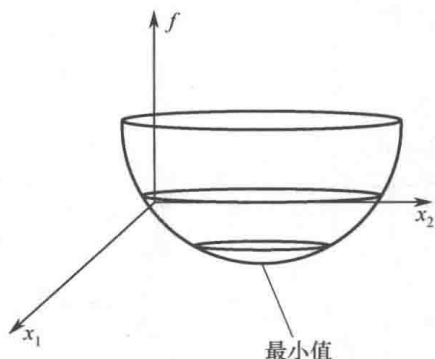


图 1.1 函数的最小值

式中: δx_1 、 δx_2 为 x_1^* 与 x_2^* 之间相差的任意无穷小量, 且对于所有的 δx_1 , $\delta x_2 \neq 0$, 式 (1.5) 均成立。对于一个 2×2 的矩阵:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} > 0 \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \right]^2 > 0 \quad (1.7)$$

当由式 (1.6) 和式 (1.7) 表示的两个主子式均大于 0 时, 式 (1.5) 才成立。可以看出, 式 (1.7) 的左侧是式 (1.5) 中矩阵所对应的行列式。

定义如下形式的变分:

$$\delta J = \frac{\partial f}{\partial x_1} \delta x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \delta x_n \quad (1.8)$$

对于任意的无穷小位移 δx , 在式 (1.2) 的稳定点处, $\delta J = 0$ 。通常情况下, 对于 n 维向量 x , 当所有的 n 阶主子式均大于 0 时, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ 所确定的矩阵正定。

1.2 带约束的参数优化

为了概括带约束的参数优化问题, 必须用代数方法描述它们。例如, 可以用下式描述以原点为中心、半径为 R 的圆内一点 (x_1, x_2) :

$$x_1^2 + x_2^2 - R^2 = 0 \quad (1.9)$$

上面的叙述按如下方式进行推广, 下式可表示由 n 个独立变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 所构成的约束:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ \varphi_m(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (m < n) \quad (1.10)$$

故式 (1.10) 存在 $n - m$ 个相互独立的变量。显然, 当 $n = m$ 时最多只能有一个可行解, 不存在优化问题。

1.2.1 拉格朗日乘子

对于 n 个相互独立的变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 通过引入 m 个拉格朗日算子 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ 可将 m 个约束方程引入代价函数中, 构成一个增广函数 F :

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = J + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \dots + \lambda_m \varphi_m \quad (1.11)$$

如果 x_i 满足约束条件 ($\varphi_j = 0$), 那么 J 的驻点等价于 F 的驻点。对于无约束的优化问题来说, $\delta F = 0$ 。其中

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = \varphi_1 = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_m} = \varphi_m = 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

因此, 存在着 $n + m$ 个方程和 $n + m$ 个未知量。看起来, 引入 m 个未知量 (λ_j) 起了相反的作用。理论上, 能够通过 $\varphi_j = 0$ 求解 m 个 x_i , 留下了 $n - m$ 个 x_i 需要进一步求解。然而, 剩下的 $n - m$ 个方程实际上比式 (1.12) 和式 (1.13) 复杂得多, 因此, 求解这 $n + m$ 个方程相对来说比较简单。

例 1.1 拉格朗日乘子的应用。

寻找单位圆中具有最大边长的矩形。设单位圆的圆心位于 $(x, y) = (0, 0)$, 矩形的顶角位于 $(\pm x, \pm y)$ 。相应的问题可如下描述:

最小化

$$J = f(x, y) = -4(x + y) \quad (1.14)$$

满足

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (1.15)$$

下面用拉格朗日乘子求解上述问题。

定义增广函数:

$$\begin{aligned} F(x, y, \lambda) &= f(x, y) + \lambda \varphi(x, y) \\ &= -4(x + y) + \lambda(x^2 + y^2 - 1) \end{aligned} \quad (1.16)$$

一阶必要条件:

$$F_x = \frac{\partial F}{\partial x} = -4 + 2\lambda x = 0 \quad (1.17)$$

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y} = -4 + 2\lambda y = 0 \quad (1.18)$$

约束:

$$F_\lambda = \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (1.19)$$

求解式 (1.17) ~ 式(1.19) 可得

$$x^* = y^* = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (1.20)$$

$$\lambda = 2\sqrt{2} \quad (1.21)$$

而式 (1.20) 表明具有最大边长的矩形是正方形。

为检验得到的驻点 $(x^*, y^*) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 是否为极小值点, 可以验证其二阶导数的正、负号。由于整个过程具有两个变量、一个约束条件, 因此具有一个自由变量。任意选取 y 作为自由变量, 对函数 f 求二阶导数 (Bryson, Ho [1975]):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{\varphi=0} &= F_{yy} - F_{yx}\varphi_x^{-1}\varphi_y - F_{xy}\varphi_x^{-1}\varphi_y + \varphi_y\varphi_x^{-1}F_{xx}\varphi_x^{-1}\varphi_y \\ &= 4\sqrt{2} - 0 - 0 + 4\sqrt{2} \\ &= 8\sqrt{2} > 0 \end{aligned} \quad (1.22)$$

式 (1.22) 表明, 二阶导数大于 0, 满足 J 取极小值的充分条件。因此, 最大矩形边长为 $4\sqrt{2}$ 。

1.2.2 参数优化: 霍曼转移

参数优化问题中的一个重要的例子是霍曼转移。1925 年, 霍曼通过引入一个两脉冲体系将飞行器从低轨道转移到高轨道。(1960 年, 美国国家航空航天局 (NASA)) 依据霍曼的原始工作推出了一项转换技术: NASA TT F-44, “天体到达” 参见 Hohmann [1960] 在苏联的文献中, 这种转移有时称为 Hohmann - Vetchinkin 转移 (早在 19 世纪 20 年代, 俄罗斯的数学家就给出了关于转移技术的相关演讲, 参见 Ulivi, Harland [2007])。

霍曼转移的假设条件如下:

(1) 存在一个遵循牛顿定律的重力场, $F = G(Mm)/r^2$, 式中, F 为重力, G 为牛顿常数, M 为地球质量, m 为飞行器质量, r 为飞行器到地球质心的距离。

(2) 推力无约束, 速度可以瞬时变化。假设存在脉冲速度 ΔV 。仅允许有两个脉冲机动; 轨道转移期间, 消耗的推力最小化。

(3) 初始轨道和终端轨道是共面圆。

图 1.2 描述了两个脉冲 ΔV ：初始脉冲 ΔV_0 ，到中心距离为 r_0 ；终端脉冲 ΔV_f ，到中心距离为 r_f 。注意，图 1.2 描述的是通常情形的转移而不是霍曼转移。

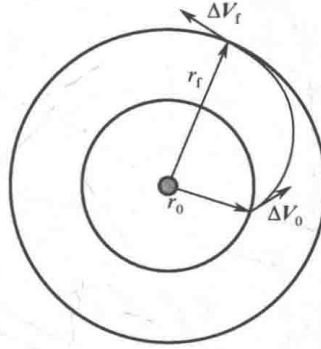


图 1.2 广义两脉冲转移

脉冲速度 ΔV 可以是空间中的任意方向。更为一般的问题通常需要多个 ΔV ，脉冲数量的增多能够近似一个连续的推力问题。

通过固定脉冲的数量，原始的问题相应地变为一个单参数优化问题。霍曼转移是一个在共面圆形轨道间的两脉冲、时间自由的转移问题。因此，这个问题可描述如下：

最小化

$$J = |\Delta V_0| + |\Delta V_f| \quad (1.23)$$

满足

$$\varphi_1(\Delta V_{x0}, \Delta V_{y0}, \Delta V_{xf}, \Delta V_{yf}) = V_{xf} = 0 \quad (1.24)$$

$$\varphi_2(\Delta V_{x0}, \Delta V_{y0}, \Delta V_{xf}, \Delta V_{yf}) = V_{yf} - V_{cf} = 0 \quad (1.25)$$

式中： ΔV_{x0} 、 ΔV_{y0} 分别为脉冲 ΔV 沿半径和切线方向的起始分量。同样，下标 f 表示末端分量，类似地，速度的分量也可用 V_{x0} 、 V_{y0} 、 V_{xf} 、 V_{yf} 表示。 V_{c0} 、 V_{cf} 表示在 r_0 和 r_f 处的圆周速度。式 (1.24) 和式 (1.25) 仅表示终端轨道必须是圆周。注意到，脉冲大小的总和达到最小化，相应地提供了一个最小推力代价（参见 Prussing, Conway [2013]）。

由参数优化可知，当下式成立时（参见 Prussing, Conway [2013]）， J 达到最小化：

$$\Delta V_{x0} = \Delta V_{xf} = 0 \quad (1.26)$$

如图 1.3 所示，所有的脉冲都是切向的。

为了计算 ΔV_{y0} 和 ΔV_{yf} ，从半径为 r_0 的初始轨道开始。

圆周速度为

$$V_{c0} = V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} \quad (1.27)$$

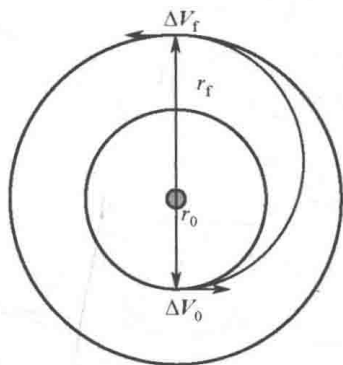


图 1.3 霍曼转移

式中: $\mu = GM$, 忽略飞行器的质量。

在半径为 r_f 的终端圆形轨道结束, 其速度为

$$V_{cf} = V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_f}} \quad (1.28)$$

通过 r_0 处的一个推力通过速度的改变 ΔV_0 来实现霍曼转移。此机动让飞行器位于椭圆轨道上, 其速度表达式为

$$V_p = V_0 + \Delta V_0 \quad (1.29)$$

半径 r_f 处的速度为

$$V_a = V_f \quad (1.30)$$

V_p 和 V_a 未知。终端速度 V_{cf} 为

$$V_{cf} = V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_f}} = V_f + \Delta V_f \quad (1.31)$$

由于 V_f 和 ΔV_f 未知, 因此问题变为寻找 ΔV_0 和 ΔV_f 。注意到, 两个未知量需要两个方程来求解。

通过定义转移轨道求解相应的问题。定义该问题需要角动量守恒方程和机械能守恒方程。

由角动量守恒方程可得

$$r_0(V_0 + \Delta V_0) = r_f V_f \quad (1.32)$$

于是

$$V_f = \left(\frac{r_0}{r_f}\right)(V_0 + \Delta V_0) \quad (1.33)$$

由能量守恒定律可得

$$\frac{1}{2}(V_0 + \Delta V_0)^2 - \frac{\mu}{r_0} = \frac{1}{2}V_f^2 - \frac{\mu}{r_f} \quad (1.34)$$

式 (1.34) 的左端表示近处的能量, 右端表示远处的能量。将式 (1.33) 代入式 (1.34) 可得

$$\frac{1}{2}(V_0 + \Delta V_0)^2 - \frac{\mu}{r_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{r_0}{r_f}\right)^2(V_0 + \Delta V_0)^2 - \frac{\mu}{r_f} \quad (1.35)$$

化简可得

$$\frac{1}{2} (V_0 + \Delta V_0)^2 \left(1 - \frac{r_0^2}{r_f^2}\right) = \frac{\mu}{r_0} - \frac{\mu}{r_f} \quad (1.36)$$

即

$$V_0 + \Delta V_0 = \sqrt{2 \left(\frac{\mu}{r_0} - \frac{\mu}{r_f} \right) \left(\frac{r_f^2}{r_f^2 - r_0^2} \right)} \quad (1.37)$$

注意到

$$\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_f} \right) \left(\frac{r_f^2}{r_f^2 - r_0^2} \right) = \frac{r_f}{r_0} \frac{1}{r_f + r_0} \quad (1.38)$$

由式 (1.37) 可得

$$V_0 + \Delta V_0 = \sqrt{2\mu \frac{r_f}{r_0} \frac{1}{r_f + r_0}} \quad (1.39)$$

将式 (1.27) 代入式 (1.39) 可得

$$\begin{aligned} \Delta V_0 &= \sqrt{\frac{2\mu r_f}{r_0(r_0 + r_f)}} - \sqrt{\frac{\mu}{r_0}} \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{r_0} \left(\sqrt{\frac{2r_f}{r_0 + r_f}} - 1 \right)} \end{aligned} \quad (1.40)$$

由式 (1.33) 和式 (1.39) 可得

$$V_f = \frac{r_0}{r_f} (V_0 + \Delta V_0) = \frac{r_0}{r_f} \sqrt{2\mu \frac{r_f}{r_0} \frac{1}{r_0 + r_f}} \quad (1.41)$$

即

$$V_f = \sqrt{2\mu \frac{r_0}{r_f} \frac{1}{r_0 + r_f}} \quad (1.42)$$

故由式 (1.31) 和式 (1.42) 得

$$\begin{aligned} \Delta V_f &= \sqrt{\frac{\mu}{r_f}} - V_f \\ &= \sqrt{\frac{\mu}{r_f}} - \sqrt{2\mu \frac{r_0}{r_f} \frac{1}{r_f + r_0}} \end{aligned} \quad (1.43)$$

于是

$$\Delta V_f = \sqrt{\frac{\mu}{r_f}} \left(1 - \sqrt{\frac{2r_0}{r_f + r_0}} \right) \quad (1.44)$$

1.2.3 霍曼转移的推广

在霍曼转移中, 仅仅应用了两个脉冲, 那么整个的代价函数 ΔV 能否用更多的脉冲来减少呢? Edelbaum [1967] 讨论了霍曼转移的推广形式, 如双抛物

线转移、双椭圆转移和其他的最小推力、脉冲转移。1959 年, Edelbaum、Hoelker 和 Silber 对该问题进行了讨论。Shternfeld 认为, 只要 r_f/r_0 足够大, 便存在比霍曼转移需要更少能量的转移。

如图 1.4 所示, 转移是基于三个脉冲、双椭圆转移实现的。霍曼转移中除有两个脉冲 ΔV , 还存在一个在 r_i 处的中间脉冲。 r_i 的值通常比外侧远轨道大。可以想象, 当 $r_i \rightarrow \infty$ 时, $\Delta V \rightarrow 0$, 以达到任意期待的 r_f 。这种情形的转移称作双椭圆转移。

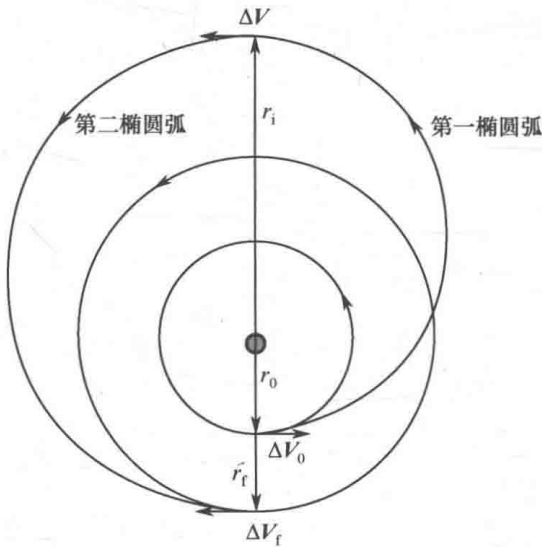


图 1.4 三脉冲、双椭圆转移

假设 $r_f > r_0$, 由图 1.4 可以得以下结论:

- (1) ΔV_0 沿切线向前 (增加速度);
- (2) ΔV 沿切线向前 (增加速度);
- (3) ΔV_f 沿切线向后 (减少速度)。

当从原始大轨道转移到小轨道时, $r_f < r_0$ 。图 1.4 可以解释为时间后退, 轨道顺时针运行。在这种情况下, 虽然三个脉冲 ΔV 值与以前一样, 但是现在将 r_f 看作初始半径, r_0 看作终端半径。可类似地解释霍曼转移中初始轨道是一个大轨道的情形。

现在对霍曼转移和双椭圆转移做出小结: 根据 $\alpha = r_f/r_0$ 的条件, 哪一种转移更为经济? 假设 $r_f > r_0$, 双椭圆转移和双抛物转移中都含有三个脉冲转移:

- (1) $1 < \alpha < 11.94$: 霍曼转移是最经济的。
- (2) $11.94 < \alpha < 15.58$: 如果 r_i 足够大, 则相对来说, 双椭圆转移是经济的, 双抛物转移能够使代价函数达到最小化, 但不切实际 (见 1.2.4 节)。
- (3) $15.58 < \alpha$: 如果 $r_f < r_i$, 则任意的双椭圆转移都比霍曼转移经济, 双抛物转移使得代价函数达到最小值。

对于非共面转移来说,双椭圆转移更具优势,它也是最小推力转移中一个有趣的例子,因为它比满足边界条件所需脉冲更多(参见 Prussing, Conway[2013])。

1.2.4 双抛物线转移

图 1.5 表示双抛物线转移,它是双椭圆转移在 $r_i \rightarrow \infty$ 时的极限情形。它包含两个有限脉冲 ΔV_0 和 ΔV_f , 及第三个无穷脉冲 ΔV , 第三个脉冲有利于从第一个抛物线转移到第二个抛物线。

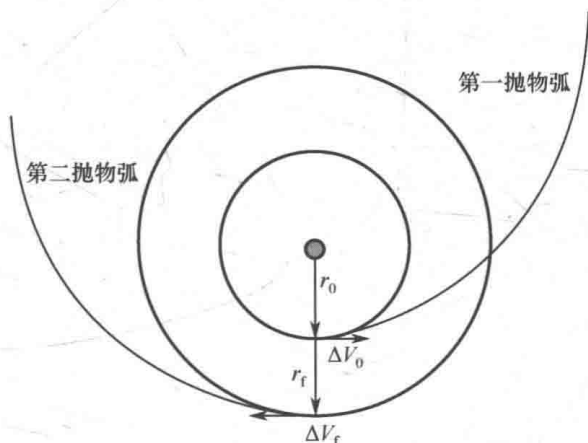


图 1.5 双抛物线转移的极限形式

由于转移时间无限,所以这种转移是没有意义的。然而,当 $11.94 < \alpha$, r_i 足够大时,就会发现一个比霍曼转移好、比双抛物线转移差的双椭圆转移。

习 题

1. 寻找函数 $f(x) = x^2$ 的最小值。
2. 设 $f(x) = x^4$, 那么 $f(0) = 0$ 是否为最小值? 取得最小值的二阶条件是否满足? 从其中可得到什么结论?
3. 火箭的方程为

$$\Delta V = c \ln \tilde{m}$$

式中: ΔV 为速度的改变量; c 为有效排气速度; $\tilde{m}$ 为初始质量与消耗质量之比, 即

$$\tilde{m} = m_0 / m_{t0}$$

注意到 c 与固定的脉冲有关, 即

$$c = I_{sp} g$$

式中: g 为重力加速度, $g = 9.80665 \text{ m/s}^2$ 。

假设消耗质量由结构质量 m_s 和有效载荷质量 P 构成, 即