北大燕园

2018年 李正元·范培华

考研数学②

数学 历年试题解析

数学二

主编 北京大学 李正元
北京大学 尤承业

中国政法大学出版社

北大燕园

2018年李正元[illegible]②

数学

数学二

历年试题解析

主编　北京大学　李正元
　　　北京大学　尤承业

中国政法大学出版社

2017 · 北京

图书在版编目（CIP）数据

2018年李正元·范培华考研数学数学历年试题解析. 数学二/李正元，尤承业主编. —北京：中国政法大学出版社，2017.1

ISBN 978-7-5620-7235-5

Ⅰ.①2… Ⅱ.①李… ②尤… Ⅲ.①高等数学－研究生－入学考试－题解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第312787号

出版者　中国政法大学出版社

地　址　北京市海淀区西土城路25号

邮寄地址　北京100088信箱8034分箱　邮编100088

网　址　http://www.cuplpress.com（网络实名：中国政法大学出版社）

电　话　010-58908285(总编室)　58908433（编辑部）58908334(邮购部)

承　印　保定市中画美凯印刷有限公司

开　本　787mm×1092mm　1/16

印　张　19.75

字　数　480千字

版　次　2017年1月第1版

印　次　2017年1月第1次印刷

定　价　45.00元

前　言

（一）

对于数学考试而言，试卷本身就是一份量表，它是《数学考试大纲》规定的考试内容和考试要求的具体体现。全国硕士研究生数学招生考试统考试题是广大数学教师及参加命题的专家、教授智慧和劳动的结晶，是一份宝贵的资料。每一道试题，既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求，又蕴涵着命题的指导思想、基本原则和趋势，因此，对照《数学考试大纲》分析、研究这些试题不仅可以展示出统考以来数学考试的全貌，便于广大考生了解有关试题和信息，从中发现规律，归纳出每部分内容的重点、难点及常考的题型，进一步把握考试的特点及命题的思路和规律，而且通过反复做历年试题，发现问题，找出差距，以便广大考生能及时查漏补缺，通过研究历年试题，也便于广大考生明确复习方向，从而从容应考，轻取高分。

（二）

本书汇集了 2003 年 ~2017 年全国硕士研究生招生统考数学二试题，而且对所有试题均给出了详细解答，并尽量做到一题多解。有很多试题的解法是我们几位编者从事教学和考研辅导研究总结出来的，具有独到之处。其中有些试题的解法比标准答案的解法更简捷、更省时省力。本书在对历年考研数学试题逐题解答的基础上，每题都给出了分析或评注，不仅对每题所考知识点或难点进行了分析，而且对各种题型的解法进行了归纳总结，使考生能举一反三，触类旁通；同时通过具体试题，指出了考生在解题过程中出现的有关问题和典型错误，并点评错因，提醒考生引以为戒。

本书把历年考研数学二试题依据考试大纲的顺序，按试题考查内容分章，这样与考生复习数学的顺序保持一致，便于考生系统复习使用。每章按以下内容编写：

编者按——总体说明历年试题在本章所考查的重要知识点、常考题型及所占总分比例，便于考生在宏观上把握重点。

题型分类解析——将历年同一内容的试题归纳在一起，并进行详细解答。这样便于考生复习该部分内容时了解到：该内容考过什么样的题目，是从哪个角度来命制题的，并常与哪些知识点联系起来命题等等，从而能让广大考生掌握考研数学试题的广度和深度，并

在复习时能明确目标,做到心中有数。同时把历年同一内容的试题放在一起,能让广大考生抓住近几年考题与往年考题的某种特殊联系(类似或雷同),并且能清楚地查出哪些知识点还未命题考查。另外,为了帮助考数学二的考生更全更好地了解相关内容的命题情况,**本书精选了数学一、三以及原数学四相关内容的典型考题(含解答),同时也精选了2001年(含)以前数学二相关内容的典型考题(含解答)**,供将要备考数学二的考生参考并复习之用。因此本书这种独特编排体例有助于广大考生科学备考。

综述——每种题型后都归纳总结该题型解题思路、方法和技巧,并举例说明。

(三)

本书给准备报考研究生的考生提供了锻炼自己解题能力和测验自己数学水平的机会。编者建议准备报考研究生的考生在阅读本书时,应先看《数学考试大纲》,以便明确考试的有关要求,接着去认真阅读有关教材和参考书(推荐考生认真阅读由中国政法大学出版社出版的**《考研数学复习全书(数学二)》**,该书对考试大纲中所要求的基本概念、基本公式、基本定理讲解详细,各类题型的解题思路、方法和技巧归纳到位,与考研命题思路较吻合),复习完后,再来看本书的试题,以检验自己的水平。在看本书试题时,应该先自己动手做题,然后将自己所得的结果与本书的解法加以比较,看哪些自己做对了,哪些自己做错了,为什么会做错,可以与你的同学、同事和老师研讨。建议考生把本书中的全部试题做2~3遍,直到对所有的题目一见到就能够熟练地、正确地解答出来的程度。

本书在编写、编辑和出版过程中,尽管我们抱着对广大考生认真负责的精神,高质量、严要求,但由于时间紧、任务重,加上我们水平有限,难免有许多不足、不尽人意之处。敬请广大读者和专家同行不吝赐教、批评指正。

祝广大考生复习顺利,考研成功!

编者

2017年1月

目　录

第一篇　2017 年考研数学二试题及答案与解析

第二篇　2003 ~ 2016 年考研数学二试题

第三篇　2003 ~ 2016 年考研数学二试题分类解析

第一篇　2017 年考研数学二试题及答案与解析

2017 年考研数学二试题

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0\\ b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则

(A) $ab=\dfrac{1}{2}$.　(B) $ab=-\dfrac{1}{2}$.　(C) $ab=0$.　(D) $ab=2$.　【　】

(2) 设二阶可导函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=f(-1)=1$, $f(0)=-1$ 且 $f''(x)>0$,则

(A) $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x>0$.　(B) $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x<0$.

(C) $\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x>\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x$.　(D) $\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x<\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x$.　【　】

(3) 设数列 $\{x_n\}$ 收敛,则

(A) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(B) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sqrt{|x_n|})=0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(C) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+x_n^2)=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(D) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+\sin x_n)=0$ 时, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.　【　】

(4) 微分方程 $y''-4y'+8y=e^{2x}(1+\cos 2x)$ 的特解可设为 $y^*=$

(A) $Ae^{2x}+e^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$.　(B) $Axe^{2x}+e^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$.

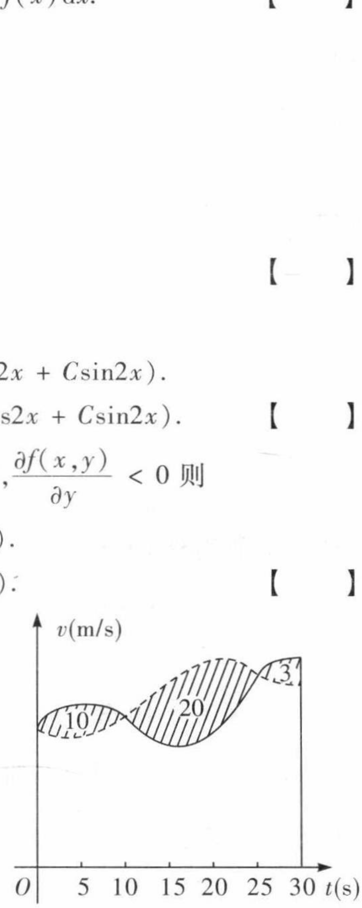
(C) $Ae^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$.　(D) $Axe^{2x}+xe^{2x}(B\cos 2x+C\sin 2x)$.　【　】

(5) 设 $f(x,y)$ 具有一阶偏导数,且对任意的 (x,y),都有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$, $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$ 则

(A) $f(0,0)>f(1,1)$.　(B) $f(0,0)<f(1,1)$.

(C) $f(0,1)>f(1,0)$.　(D) $f(0,1)<f(1,0)$.　【　】

(6) 甲、乙两人赛跑,计时开始时,甲在乙前方 10(单位:m) 处,图中,实线表示甲的速度曲线 $v=v_1(t)$(单位:m/s),虚线表示乙的速度曲线 $v=v_2(t)$,三块阴影部分面积的数值依次为 10,20,3. 计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0(单位:s),则



(A) $t_0=10$.

(B) $15<t_0<20$.

(C) $t_0=25$.

(D) $t_0>25$.　【　】

(7) 设$\boldsymbol{A}$为三阶矩阵,$\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$为可逆矩阵,使得$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,则$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3)$
=

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$.　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$.　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2$.　　【　　】

(8) 已知矩阵$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,则

(A) $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{C}$相似,$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{C}$相似.

(B) $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{C}$相似,$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{C}$不相似.

(C) $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{C}$不相似,$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{C}$相似.

(D) $\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{C}$不相似,$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{C}$不相似.　　【　　】

二、填空题:9 ~ 14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 曲线$y = x\left(1 + \arcsin\dfrac{2}{x}\right)$的斜渐近线方程为 = ________.

(10) 设函数$y = y(x)$由参数方程$\begin{cases} x = t + e^t \\ y = \sin t \end{cases}$确定,则$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}$ = ________.

(11) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}dx$ = ________.

(12) 设函数$f(x,y)$具有一阶连续偏导数,且$df(x,y) = ye^y dy + x(1+y)e^y dy$,$f(0,0) = 0$,则$f(x,y)$ = ________.

(13) $\displaystyle\int_0^1 dy\int_y^1 \frac{\tan x}{x}dx$ = ________.

(14) 设矩阵$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & a \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$的一个特征向量为$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$,则$a$ = ________.

三、解答题:15 ~ 23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(**本题满分 10 分**)

求$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^x \sqrt{x-t}\,e^t dt}{\sqrt{x^3}}$.

(16)(**本题满分 10 分**)

设函数$f(u,v)$具有 2 阶连续偏导数,$y = f(e^x, \cos x)$,求$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$,$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$.

(17)(**本题满分 10 分**)

求$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\ln\left(1 + \frac{k}{n}\right)$.

(18)(**本题满分 10 分**)

已知函数$y(x)$由方程$x^3 + y^3 - 3x + 3y - 2 = 0$确定,求$y(x)$的极值.

(19)(**本题满分 10 分**)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有 2 阶导数,且 $f(1)>0$,$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$,证明:

(Ⅰ)方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根;

(Ⅱ)方程 $f(x)f''(x)+(f'(x))^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同实根.

(20)(**本题满分 11 分**)

已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2y\}$,计算二重积分 $\iint\limits_D (x+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(21)(**本题满分 11 分**)

设 $y(x)$ 是区间 $\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$ 内的可导函数,且 $y(1)=0$,点 P 是曲线 $L:y=y(x)$ 上的任意一点,L 在点 P 处的切线与 y 轴相交于点 $(0,Y_P)$,法线与 x 轴相交于点 $(X_P,0)$,若 $X_P=Y_P$,求 L 上点的坐标 (x,y) 满足的方程.

(22)(**本题满分 11 分**)

设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 有 3 个不同的特征值,且 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

(Ⅰ)证明 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$;

(Ⅱ)若 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$,求方程组 $\boldsymbol{A}x=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

(23)(**本题满分 11 分**)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$,求 a 的值及一个正交矩阵 Q.

2017 年考研数学二试题答案与解析

一、选择题

(1)【分析】 按连续性的定义,归结为求 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

方法一 用等价无穷小因子替换 $\left(x\to 0 \text{ 时 } 1-\cos\sqrt{x}\sim\dfrac{1}{2}(\sqrt{x})^2\right)$,得

$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2}{ax}=\frac{1}{2a}.$$

方法二 用洛必达法则,得

$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\lim_{x\to 0+}\frac{(\sin\sqrt{x})\,\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}}{a}=\frac{1}{2a}.$$

因 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续,得

$$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0-}f(x)=f(0)$$

即 $$\frac{1}{2a}=b,\quad ab=\frac{1}{2}$$

因此选(A).

---

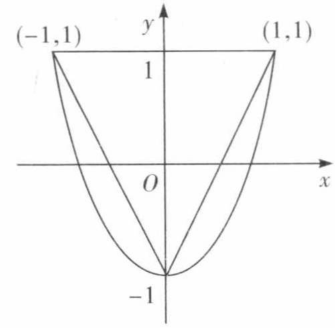
(2)【分析一】 由题设条件 $y=f(x)$ 在 $[-1,1]$ 为凹函数.

连接 $(0,-1)$,$(1,1)$ 点的线段方程为

$$y=2x-1\,(0\leqslant x\leqslant 1)$$

连接 $(0,-1)$,$(-1,1)$ 点的线段方程为

$$y = -2x - 1(-1 \leqslant x \leqslant 0)$$



令 $g(x) = \begin{cases} 2x - 1 & (0 \leqslant x \leqslant 1) \\ -2x - 1 & (-1 \leqslant x \leqslant 0) \end{cases}$

按凹函数的性质,

$$g(x) > f(x)(x \in [-1,1], x \neq -1,0,1)$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \int_{-1}^{1} g(x)\mathrm{d}x > \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x$$

其中 $\int_{-1}^{1} g(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0}(-2x-1)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}(2x-1)\mathrm{d}x = 0$

选(B).

【分析二】 特殊选取法.

满足条件的 $[-1,1]$ 上凹函数的最简单情形是

$$f(x) = 2x^2 - 1$$

对此 $f(x)$.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}(2x^2 - 1)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1}(2x^2-1)\mathrm{d}x$$

$$= 2\left(\frac{2}{3} - 1\right) = -\frac{2}{3} < 0$$

且 $$\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$$

因此,对此 $f(x)$,(A),(C),(D) 不正确,(B) 正确,故选(B).

---

(3)【分析一】 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,则

$$\lim_{n\to\infty} \sin x_n = \sin a = 0, \sin a = 0 \text{ 有无穷多个解.}$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + \sqrt{|x_n|}) = a + \sqrt{|a|} = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ 或 } a = -1$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + x_n^2) = a + a^2 = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ 或 } a = -1$$

于是(A),(B),(C) 被排除.因此选(D).

【分析二】 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,则

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + \sin x_n) = a + \sin a = 0$$

因 $x + \sin x$ 是单调上升的,故只有唯一零点即 $x = 0$,因此 $a = 0$.

选(D).

---

(4)【分析】 考察特征方程 $\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$,得特征根 $\lambda_{1,2} = 2 \pm 2i$.

现分别考察方程

$$y'' - 4y' + 8y = \mathrm{e}^{2x}$$

$$y'' - 4y' + 8y = \mathrm{e}^{2x}\cos 2x$$

前者,$\mathrm{e}^{\alpha x}$,$\alpha = 2$ 不是特征根,它有特解

$$y^* = A\mathrm{e}^{2x}$$

后者 $\alpha \pm i\beta = 2 \pm 2i$ 是特征根,它有特解

$$y^* = x\mathrm{e}^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$$

由解的叠加原理,原方程的特解可设为

$$y^* = A\mathrm{e}^{2x} + x\mathrm{e}^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$$

选(C).

---

(5)【分析】 偏导数实质上就是一元函数的导数.

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y)>0\Rightarrow f(x,y)\text{ 对 }x\text{ 单调上升.}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(x,y)<0\Rightarrow f(x,y)\text{ 对 }y\text{ 单调下降.}$$

于是 $f(0,0)<f(1,0)$

$$f(0,0)>f(0,1)$$

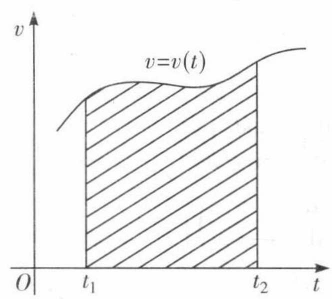
因此 $f(0,1)<f(1,0)$

选(D).

---

(6)【分析】 某人行走速度 $v=v(t)$,则从 $t=t_1$ 到 $t=t_2(t_1<t_2)$ 行走的距离为 $S=\int_{t_1}^{t_2}v(t)\,\mathrm{d}t$.

若时间 t 轴为横轴,速度 v 为纵轴,在坐标系中画出曲线 $v=v(t)$,按定积分的几何意义,$\int_{t_1}^{t_2}v(t)\,\mathrm{d}t$ 是曲线 $v=v(t)$ 在区间 $[t_1,t_2]$ 上的曲边梯形的面积(如图中阴影部分).



现按题意,从计时开始($t=0$)到乙追上甲的时刻 $t=t_0$,乙与甲分别行走的距离

$$S_{乙}=\int_0^{t_0}v_2(t)\,\mathrm{d}t,\quad S_{甲}=\int_0^{t_0}v_1(t)\,\mathrm{d}t$$

满足 $S_{乙}-S_{甲}=10.$

从图中看到

$$\int_0^{10}v_1(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^{10}v_2(t)\,\mathrm{d}t=10$$

$$\int_{10}^{25}v_2(t)\,\mathrm{d}t-\int_{10}^{25}v_1(t)\,\mathrm{d}t=20$$

后式减前式得

$$\int_0^{25}v_2(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^{25}v_1(t)\,\mathrm{d}t=10$$

即满足 $S_{乙}-S_{甲}=10$

因此选(C).

---

(7)【解析】 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$,说明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量,特征值依次为 0,1,2. 于是

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)=\boldsymbol{A\alpha}_1+\boldsymbol{A\alpha}_2+\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$$

---

(8)【解析】 A 和 B 都是上三角矩阵,特征值是对角线上的元素,都是 1,2,2. 它们是否与 C 相似只用看是否可相似对角化.

对二重特征值 2,$n-r(A-2E)=3-1=2$(等于重数),于是 A 可相似对角化,A 相似于 C.

对二重特征值 2,$n-r(B-2E)=3-2=1$(小于重数),于是 B 不可相似对角化,B 不相似于 C.

二、填空题

(9)【分析】 先求斜率 k

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\left(1 + \arcsin\dfrac{2}{x}\right)}{x} = 1$$

再求截距 b,

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left[x\left(1 + \arcsin\frac{2}{x}\right) - x\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[x\arcsin\frac{2}{x}\right] = 2$$

其中 $\arcsin\dfrac{2}{x} \sim \dfrac{2}{x}(x\to\pm\infty)$.

因此斜渐近线方程为 $y = x + 2$.

---

(10)【分析】 这是参数式求导问题.

$$x_t' = 1 + e^t,\ y_t' = \cos t$$

由参数求导法得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{\cos t}{1 + e^t}$$

再求

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos t}{1 + e^t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\cos t}{1 + e^t}\right)\frac{dt}{dx}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0} = \left.\left[0 + \cos t\,\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1 + e^t}\right)\right]\frac{1}{x_t'}\right|_{t=0}$$

$$= -\left.\frac{e^t}{(1 + e^t)^3}\right|_{t=0} = -\frac{1}{8}$$

---

(11)【分析】 $$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1 + x)}{(1 + x)^2}dx = -\int_0^{+\infty}\ln(1 + x)\,d\frac{1}{1 + x}$$

$$= -\left.\frac{\ln(1 + x)}{1 + x}\right|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{1}{(1 + x)^2}dx = -\left.\frac{1}{1 + x}\right|_0^{+\infty}$$

$$= 1$$

---

(12)【分析一】 观察法(凑微分法)

$$df(x,y) = ye^y dx + x d(ye^y)$$
$$= d(xye^y)$$

其中 $(1 + y)e^y dy = e^y dy + y de^y = d(ye^y)$.

于是 $f(x,y) = xye^y + C$

由 $f(0,0) = 0 \Rightarrow C = 0$. 因此 $f(x,y) = xye^y$.

【分析二】 $df(x,y) = ye^y dx + x(1 + y)e^y dy$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{\partial f}{\partial x} = ye^y, \dfrac{\partial f}{\partial y} = x(1 + y)e^y$

将第一式对 x 积分得

$$f(x,y) = xye^y + C(y)$$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = x(1 + y)e^y + C'(y) = x(1 + y)e^y$

$\Rightarrow C'(y) = 0, C(y) = C \Rightarrow f(x,y) = xye^y + C$

由 $f(0,0) = 0 \Rightarrow C = 0$. 因此 $f(x,y) = xye^y$.

---

(13)【分析一】 用分部积分法.

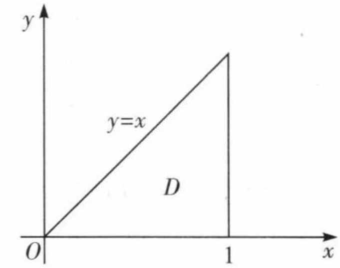
$$I \xlongequal{\text{记}} \int_0^1\left(\int_y^1 \frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \left(y\int_y^1 \frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 y\mathrm{d}\left(\int_y^1 \frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x\right)$$

$$= \int_0^1 y\cdot\frac{\tan y}{y}\mathrm{d}y = -\int_0^1\frac{\mathrm{d}\cos y}{\cos y} = -\ln\cos y\Big|_0^1$$

$$= -\ln(\cos 1)$$

【分析二】 交换积分次序.

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x = \iint_D \frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



$D: 0 \leqslant y \leqslant 1, y \leqslant x \leqslant 1$

现交换积分次序得

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \frac{\tan x}{x}\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{\tan x}{x}\cdot x\mathrm{d}x$$

$$= -\ln(\cos 1)$$

---

(14)【解析】 $\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量,于是 $\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$线性相关.

$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\3+2a\\2\end{bmatrix},$$

得 $3+2a=1, a=-1$.

三、解答题

(15)【分析与求解】 用洛必达法则求此$\frac{0}{0}$型极限时,要将变限积分求导,但因被积函数含参变量 x,作变量替换转化为纯变限积分的情形,

$$\int_0^x \sqrt{x-t}\,\mathrm{e}^t\mathrm{d}t \xlongequal{x-t=u} -\int_x^0 \sqrt{u}\,\mathrm{e}^{x-u}du = \mathrm{e}^x\int_0^x \sqrt{u}\,\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$$

代入得 $$\lim_{x\to0+}\frac{\int_0^x\sqrt{x-t}\,\mathrm{e}^t\mathrm{d}t}{\sqrt{x^3}} = \lim_{x\to0+}\frac{\mathrm{e}^x\int_0^x\sqrt{u}\,\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{x^3}}$$

$$= \lim_{x\to0+}\frac{\int_0^x\sqrt{u}\,\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{x^3}} = \lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-x}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}} = \frac{2}{3}$$

---

(16)【分析与求解】 这是二元函数 $f(u,v)$ 与一元函数 $u=\mathrm{e}^x, v=\cos x$ 的复合函数 $y=f(\mathrm{e}^x,\cos x)$ 求 $x=0$ 处的一阶与二阶的导数.

$$u(0)=1, v(0)=1.$$

先求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'_u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + f'_v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = f'_u\mathrm{e}^x - f'_v\sin x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0} = f'_u(1,1).$$

再求$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=0}$:

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=\left.\left[\frac{d}{dx}(f'_u)e^x+f'_ue^x\right]\right|_{x=0}-\left.\left[\frac{d}{dx}(f'_v)\sin x+f'_v\cos x\right]\right|_{x=0}$$
$$=\left[f''_{uu}e^x-f''_{uv}\sin x\right]_{x=0}+f'_u(1,1)-f'_v(1,1)$$
$$=f''_{uu}(1,1)+f'_u(1,1)-f'_v(1,1).$$

---

(17)【分析与求解】 $I_n \xlongequal{\text{记}} \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$

这是$f(x)=x\ln(1+x)$在$[0,1]$区间上的一个积分和$\left(\text{区间 }n\text{ 等分,每个小区间长为}\frac{1}{n}\right)$,于是

$$\lim_{n\to\infty}I_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1 x\ln(1+x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+x)dx^2=\left.\frac{x^2}{2}\ln(1+x)\right|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2-1+1}{1+x}dx$$
$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}\ln 2-\left.\frac{1}{4}(x-1)^2\right|_0^1-\left.\frac{1}{2}\ln(1+x)\right|_0^1$$
$$=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln 2=\frac{1}{4}.$$

---

(18)【分析与求解】 先求隐函数$y(x)$的驻点.

将方程两边对x求导(注意$y=y(x)$),由复合函数求导法得

$$3x^2+3y^2y'-3+3y'=0 \qquad (*)$$

解得
$$y'=\frac{1-x^2}{y^2+1} \qquad (**)$$

由$y'=0$得$x=\pm1$,即$y(x)$只有两个驻点$x=\pm1$.

在方程中分别令$x=\pm1$求$y(\pm1)$.

当$x=1$时得

$$y^3+3y-4=0$$

解得$y=1$($(y^3+3y-4)'=3y^2+3>0$,y^3+3y-4单调上升,只能有一个零点),即$y(1)=1$.

当$x=-1$时得

$$y^3+3y=0$$

解得$y=0$,即$y(-1)=0$.

现判断这两驻点是否极值点.

方法一 由($**$)式易知

$$y'(x)\begin{cases}>0 & (1-\delta<x<1)\\ =0 & (x=0)\\ <0 & (1<x<1+\delta)\end{cases}\qquad(0<\delta<1)$$

因此$x=1$时$y(x)$取极大值$y(1)=1$.

$$y'(x)\begin{cases}<0 & (-1-\delta<x<-1)\\ =0 & \\ >0 & (-1<x<-1+\delta)\end{cases}\qquad(0<\delta<1)$$

因此$x=-1$时$y(x)$取极小值$y(-1)=0$

方法二 求$y''(\pm1)$.

将($**$)对x求导得

$$y'' = \frac{-2x(y^2+1)-2yy'(1-x^2)}{(y^2+1)^2}$$

令 $x=1, y=1, y'=0$ 得

$$y''(1) = \frac{-4}{4} = -1 < 0$$

于是 $x=1$ 时 $y(x)$ 取极大值 $y(1)=1$.

令 $x=-1, y=0, y'=0$ 得

$$y''(-1) = 2 > 0$$

于是 $x=-1$ 时 $y(x)$ 取极小值 $y(-1)=0$.

评注 我们也可对 y' 满足的方程 $(*)$ 两边对 x 求导来求得 $y''(\pm 1)$.

(19)【分析与求解】 (Ⅰ) 方程 $f(x)=0$ 的根即函数 $f(x)$ 的零点.

为了用连续函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 存在零点,只须找一点 $\delta \in (0,1)$,使 $f(\delta) < 0$.

由 $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f(x)}{x} < 0$ 及极限的保号性,$\exists \delta \in (0,1)$,使 $\dfrac{f(\delta)}{\delta} < 0$,即 $f(\delta) < 0$. 又 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续,$f(1) > 0$,因此 $\exists c \in (\delta,1) \subset (0,1)$ 使得 $f(c)=0$ 即 $f(x)=0$ 在 $(0,1)$ 至少 $\exists$ 一个实根.

(Ⅱ) 即证 $f(x)f''(x)+(f'(x))^2$ 在 $(0,1)$ 至少 $\exists$ 两个零. 注意

$$f(x)f''(x)+(f'(x))^2 = (f(x)f'(x))'$$

于是引入 $F(x)=f(x)f'(x)$,即证 $F'(x)$ 在 $(0,1)$ 至少 $\exists$ 两个零点.

为了对 $F(x)$ 用罗尔定理,只须对 $F(x)=f(x)f'(x)$ 在 $(0,1)$ 区间找三个函数值相等的点,特别是三个零点($f(x)$ 与 $f'(x)$ 的零点均是 $F(x)$ 的零点.)

由于 $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f(x)}{x}\ \exists$ 及 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续 $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = f(0) = 0,$$

又由题(Ⅰ),$c \in (0,1)$,$f(c)=0$,再对 $f(x)$ 在 $[0,c]$ 上用罗尔定理,$\exists \xi \in (0,c)$,$f'(\xi)=0$.

这样我们得到

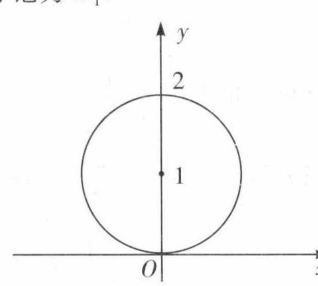
$$F(0) = f(0)f'(0) = 0,$$
$$F(\xi) = f(\xi)f'(\xi) = 0,$$
$$F(c) = f(c)f'(c) = 0$$

现在对 $F(x)$ 分别在 $[0,\xi]$,$[\xi,c]$ 上用罗尔定理,得 $\exists \xi_1 \in (0,\xi)$,$\xi_2 \in (\xi,c)$ 使得

$$F'(\xi_1) = 0, F'(\xi_2) = 0$$

因此方程 $f(x)f''(x)+(f'(x))^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 至少存在两个实根.

(20)【分析与求解】 积分区域 D 是圆域,关于 y 轴对称,D 的右半部分记为 D_1.



$D: x^2+y^2 \leqslant 2y$,即 $x^2+(y-1)^2 \leqslant 1$.

$$I \xlongequal{\text{记}} \iint_D (x+1)^2 \mathrm{d}\sigma = \iint_D x^2 \mathrm{d}\sigma + 2\iint_D x \mathrm{d}\sigma + \iint_D 1 \mathrm{d}\sigma$$

$$= 2\iint_{D_1} x^2 \mathrm{d}\sigma + \pi$$

其中 $\iint\limits_D x\mathrm{d}\sigma = 0$,$\iint\limits_D 1\mathrm{d}\sigma = \pi$(圆 D 的面积).

作极坐标变换 $x = r\cos\theta$,$y = r\sin\theta$,则

$D_1: 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}, 0 \leqslant r \leqslant 2\sin\theta$

$$\iint\limits_{D_1} x^2 d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} r^2 \cos^2\theta \cdot r dr$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \cdot \frac{1}{4} r^4 \Big|_0^{2\sin\theta} d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2\theta) \sin^4\theta d\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4\theta - \sin^6\theta) d\theta$$

$$= 4\left[\frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{\pi}{8}$$

因此 $I = 2 \times \frac{\pi}{8} + \pi = \frac{5}{4}\pi.$

---

(21)【分析与求解】 $y = y(x)$ 上 $\forall$ 点 $P(x,y)$ 处的切线方程是

$$Y = y(x) + y'(x)(X - x)$$

令 $X = 0$ 得 $Y_p = y(x) - xy'(x)$

法线方程是 $Y = y(x) - \frac{1}{y'(x)}(X - x).$

令 $Y = 0$ 得 $X_p = x + y(x)y'(x)$

按题意 $X_p = Y_p$ 得 $x + yy' = y - xy'$

即 $y' = \frac{y - x}{y + x}$. 又 $y(1) = 0.$

求 L 上点的坐标(x,y)满足的方程,即解初值问题 $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{y + x}. \\ y(1) = 0 \end{cases}$

这是齐次方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{y + x}, \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} - 1}{\frac{y}{x} + 1}$$

令 $u = \frac{y}{x}$(即 $y = ux$)得

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{u - 1}{u + 1}, \; x\frac{du}{dx} = -\frac{u^2 + 1}{u + 1}$$

分离变量得 $\frac{u + 1}{u^2 + 1} du = -\frac{dx}{x}$

积分得 $\int \frac{u + 1}{u^2 + 1} du = -\int \frac{dx}{x}$

$$\frac{1}{2}\int \frac{du^2}{u^2 + 1} + \int \frac{du}{u^2 + 1} = -\ln x + C$$

$$\frac{1}{2}\ln(1 + u^2) + \arctan u = -\ln x + C$$

由 $x = 1$ 时 $u = \frac{y}{x} = 0$ 得 $C = 0$,于是 L 的方程是