

微推力和微冲量测量与 误差分析方法

洪延姬 金星 叶继飞 周伟静 ◎ 著



科学出版社

微推力和微冲量 测量与误差分析方法

洪延姬 金星 叶继飞 周伟静 著



科学出版社

北京

内 容 简 介

针对航天微推力器研制和开发中,微推力和微冲量测量具有很大的挑战性,在跟踪、消化、吸收和总结国内外相关研究成果基础上,本书作者结合多年的科研和教学实践经验,研究并提出微推力和微冲量测量与误差分析方法。

本书从介绍相关基本概念和基本原理入手,通过研究环境、位移传感器、推力和冲量加载等造成的测量噪声特点和规律,提出测量噪声的分析和抑制方法;通过研究冲量作用下系统响应特点和规律,提出冲量模型误差和冲量噪声误差分析方法,以及冲量误差的合成方法,并提出冲量测量系统的基本设计要求;通过研究推力作用下系统响应特点和规律,提出推力截断误差和推力噪声误差分析方法,以及推力反向计算的平滑降噪优化方法,并提出推力测量系统的基本设计要求。

本书内容丰富、结构合理、理论和实际结合紧密、通俗易懂、实用性强,可供从事微推力器研发、微推力和微冲量测量与评估的科研和教学人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

微推力和微冲量测量与误差分析方法 / 洪延姬等著. —北京:科学出版社,2017.5
ISBN 978-7-03-052892-6

I. ①微… II. ①洪… III. ①航天推进-微推力-分析方法②航天推进-冲量-分析方法 IV. ①V43

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 109439 号

责任编辑:张艳芬 / 责任校对:桂伟利

责任印制:张 伟 / 封面设计:熙 望

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京数图印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017 年 5 月第 一 版 开本:720×1000 B5

2017 年 5 月第一次印刷 印张:13

字数:249 000

定价:88.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

航天推进系统是航天器的重要组成部分,提供航天器轨道机动和姿态控制所需的力和力矩。微小卫星技术的发展和精确姿轨控的需求,要求星载推力器能够提供微推力和微冲量。

能够产生微推力和微冲量的推力器称为微推力器。为满足不同航天任务的推进需求,目前国际上已研制和开发出多种新概念微推力器,具体包括冷气、离子、霍尔、场发射电推进、胶体、脉冲等离子体、激光烧蚀等微推力器,它们的基本特点是推重比、产生的推力和冲量都很小。研究微推力和微冲量测量与误差分析方法,对微推力器推力性能进行测量和评价是微推力器研究和应用的基础性工作。

微推力和微冲量测量主要面临以下技术挑战:

(1) 推重比很小,产生的推力和冲量很小。由于推重比很小,与所产生的推力和冲量比较,推力器重量很大,如场发射电推进微推力器推重比小至 10^{-7} ,激光烧蚀微推力器推重比小至 10^{-5} ,因此,在微推力和微冲量作用下,测量系统仅能产生微小位移。

(2) 测量噪声强且影响复杂。环境的位移激励和外力激励、位移传感器、标定力、微推力和微冲量加载等都会造成测量噪声。例如,大气环境下或抽真空过程中空气流动、周围人员或车辆移动等干扰产生的测量噪声,都可能淹没微小位移。

(3) 强测量噪声下测量微小位移。要求采用有效的抑制测量噪声方法、高精度测量微小位移方法、高精度微小标定力标定系统参数方法,进一步通过强测量噪声下微小位移测量,计算微推力和微冲量,评估测量误差,难度更大。

(4) 真空环境下测量。为了模拟真实的空间环境,微推力器在真空舱中测量推力性能。例如,在承受高温和低温的热冲击条件下,在真空舱中完成各种操作和测量,对测量系统结构、测量方法、测量数据传递和舱外控制等提出了很高的要求。

在撰写本书过程中,得到了中国人民解放军装备学院各级领导的大力支持,在此表示衷心感谢。同时,激光推进及其应用国家重点实验室的赵文涛、文明、王广

宇、李倩、吴洁、李南雷、常浩等老师和沈双晏、王大鹏等博士生也付出了大量劳动，在此一并表示感谢。

限于作者水平，书中难免存在不足之处，希望广大读者批评指正。

作 者

2017 年 1 月

目 录

前言

第 1 章 基本概念和基本原理	1
1.1 推力和总冲	1
1.1.1 推力曲线	1
1.1.2 推力、比冲和总冲	2
1.2 测量系统的工作原理	3
1.2.1 单摆测量系统	3
1.2.2 扭摆测量系统	4
1.2.3 悬臂梁测量系统	5
1.2.4 推力床测量系统	6
1.2.5 工作原理	7
1.3 试验数据的功率谱密度分析	8
1.3.1 离散傅里叶变换	8
1.3.2 功率谱密度分析	8
1.4 试验数据的平滑方法	11
1.4.1 试验数据的测量噪声	11
1.4.2 最小二乘拟合方法	14
1.4.3 正交多项式局部滑动拟合方法	16
1.4.4 应用举例	16
1.5 测量误差分析方法	19
1.5.1 系统误差和随机误差	19
1.5.2 参数估计和区间估计	20
1.5.3 误差传递和随机误差合成	25
1.6 小结	27
参考文献	29
第 2 章 环境干扰造成的测量噪声	32
2.1 测量系统的环境干扰	32
2.2 函数的傅里叶级数展开	33
2.2.1 傅里叶级数	33
2.2.2 应用举例	34

2.3	周期性位移激励和外力激励的影响	39
2.3.1	周期性位移激励的影响	39
2.3.2	周期性外力激励的影响	45
2.4	随机性位移激励和外力激励的影响	50
2.4.1	线性系统与平稳随机过程	51
2.4.2	随机性位移激励的影响	52
2.4.3	随机性外力激励的影响	56
2.5	脉冲力激励的影响	60
2.5.1	弯曲振动方程	60
2.5.2	脉冲力作用下的方程解	61
2.6	环境干扰造成的测量噪声表示	61
2.6.1	环境测量噪声和抑制方法	61
2.6.2	环境测量噪声表示	62
	参考文献	63
第3章	系统参数测量原理和方法	64
3.1	系统参数的测量原理	64
3.1.1	扭摆振动方程	64
3.1.2	系统参数测量	65
3.2	位移传感器造成的测量噪声	67
3.2.1	位移传感器的测量误差	67
3.2.2	扭转角的测量噪声	68
3.2.3	位移传感器的安装误差	71
3.3	标定力造成的测量噪声	74
3.3.1	标定力	74
3.3.2	标定力的系统误差	75
3.3.3	标定力的随机误差	76
3.3.4	标定力的安装误差	77
3.3.5	标定力的漂移	78
3.4	系统参数标定的测量噪声	80
3.5	系统参数标定中测量噪声的影响	82
3.5.1	对稳态扭转角的影响	83
3.5.2	对稳态点对应时间的影响	83
3.5.3	对极值点对应时间的影响	84
3.5.4	对极值点对应扭转角的影响	88
3.6	系统参数的标定方法	89

3.6.1 实际测量数据	89
3.6.2 统计计算方法	90
3.6.3 比例回归方法	92
3.6.4 系统参数的验校	95
3.7 阶跃响应方法的若干问题	101
3.7.1 扭转角和加载时间的转换	101
3.7.2 多次逐级阶跃加载的系统响应	105
参考文献	106
第4章 冲量测量和误差分析方法	108
4.1 脉冲力作用下系统响应	108
4.1.1 脉冲力作用下系统响应分析	108
4.1.2 脉冲力作用下系统响应特点	109
4.2 冲量瞬间作用模型的误差分析	115
4.2.1 冲量模型误差分析	116
4.2.2 应用举例	120
4.3 冲量测量的误差分析方法	121
4.3.1 冲量噪声误差分析	122
4.3.2 冲量模型误差与冲量噪声误差的合成	125
4.3.3 应用举例	126
4.4 测量系统的基本要求	132
4.4.1 振动频率	132
4.4.2 小扭转角条件	133
4.4.3 测量精度	133
4.4.4 测量系统的初步设计	134
4.4.5 应用举例	136
参考文献	139
第5章 推力测量和误差分析方法	140
5.1 推力积分方程反向计算问题	140
5.1.1 问题的提出	140
5.1.2 问题的难点	142
5.2 推力积分方程的数值积分离散化方法	143
5.2.1 推力积分方程和总冲积分方程	143
5.2.2 复化求积离散化方法	144
5.3 推力积分方程的反向计算方法	145
5.3.1 推力的复化梯形计算方法	145

5.3.2	推力的复化辛普森计算方法	146
5.3.3	计算分析	149
5.4	总冲积分方程的反向计算方法	152
5.4.1	总冲的复化梯形计算方法	152
5.4.2	总冲的复化辛普森计算方法	153
5.4.3	计算分析	156
5.5	推力离散化线性方程组的矩阵表示	160
5.5.1	离散化线性方程组的矩阵表示	160
5.5.2	下三角矩阵的求逆方法	161
5.6	推力离散化线性方程组的病态特性	162
5.6.1	病态方程组的概念	162
5.6.2	推力离散化线性方程组为严重病态	163
5.7	推力反向计算的截断误差分析方法	164
5.7.1	推力截断误差的影响因素	164
5.7.2	推力截断误差的分析方法	165
5.7.3	计算分析	166
5.8	推力反向计算的噪声误差分析方法	170
5.8.1	推力噪声误差的分析方法	170
5.8.2	计算分析	172
5.9	推力反向计算的平滑降噪优化方法	174
5.9.1	平滑降噪优化的思路	174
5.9.2	平滑降噪优化的技术路线	176
5.9.3	平滑降噪优化方法	178
5.9.4	应用举例	184
5.10	推力测量系统的基本设计要求	194
5.10.1	振动频率	194
5.10.2	小扭转角条件	195
5.10.3	测量系统的初步设计	195
5.10.4	应用举例	196
	参考文献	198

第 1 章 基本概念和基本原理

微推力和微冲量测量的基本特点是:强测量噪声下,根据测量系统的微小系统响应,分析和计算微推力和微冲量,并且评估测量误差。本书专门研究和讨论微推力和微冲量测量与误差分析方法,为了语言叙述方便,在以后章节中将微推力和微冲量简称为推力和冲量。

为了便于讨论推力和冲量测量问题,首先分析和讨论相关的基本概念和基本原理,包括推力和冲量的概念、测量系统的工作原理、离散傅里叶变换和功率谱密度分析、试验数据的平滑方法、测量误差分析方法等,为后续章节相关问题分析和讨论提供基础。

1.1 推力和总冲

推力器的推力性能测量主要涉及推力和冲量的测量,为了便于讨论推力和冲量测量问题,下面简要介绍推力曲线、推力、比冲和总冲的概念。

1.1.1 推力曲线

推力器典型的推力随着时间变化的曲线称为推力曲线,其分为点火、工作和熄火三个阶段。点火阶段推力随着时间逐渐增大,工作阶段推力随着时间变化不大,熄火阶段推力随着时间逐渐降低(图 1-1)。

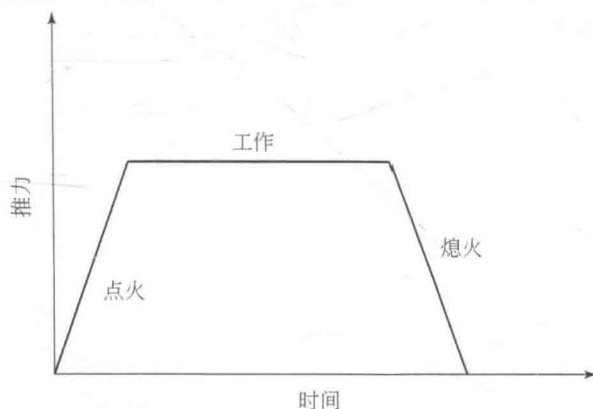


图 1-1 推力随着时间变化的曲线

通常关注的重点在于工作阶段推力随着时间变化,并且三个阶段中任何一个阶段总是可用一定的函数形式近似表示。

1.1.2 推力、比冲和总冲

描述推力器推力性能的基本参数有推力、比冲和总冲,下面以火箭发动机为例介绍推力、比冲和总冲的概念。

1. 推力

设火箭发动机推力室(包括燃烧室和喷管)喷管出口处的燃气质量流量为 $\dot{m}$ (单位时间内消耗质量,单位:kg/s),喷气速度为 v_e (单位:m/s),喷管出口处的燃气压强为 p_e (单位:Pa 或 N/m²),外界大气环境压强为 p_a ,喷管出口处的截面积为 A_e (单位:m²)。

火箭发动机推力(单位:N)为

$$P = \dot{m}v_e + (p_e - p_a)A_e \quad (1.1)$$

式中, $\dot{m}v_e$ 为动推力,表示单位时间内的动量变化量,约占推力的 90% 以上,是推力的主要部分; $(p_e - p_a)A_e$ 为静推力,与喷管出口处的压强差有关。

2. 比冲

比冲是指单位时间内消耗单位质量推进剂所获得的推力,或消耗单位质量推进剂所获得的冲量。比冲(单位:m/s)表示为

$$I_e = \frac{P}{\dot{m}} \quad (1.2)$$

比冲反映了推进剂质量消耗量与所产生推力的关系或反映推进剂质量的利用效率。给定推力条件下,比冲越大,推进剂质量消耗量越小;给定推进剂质量流量条件下,比冲越大,所产生推力越大。

在工程应用中,通常利用单位时间内消耗单位重量推进剂所获得的推力表示比冲,此时重量为 $G = mg$ ($\dot{G} = \dot{m}g$),比冲(单位:s)为

$$I_\infty = \frac{P}{\dot{G}} = \frac{P}{\dot{m}g} \quad (1.3)$$

式中, g 为重力加速度。

比冲 I_e 和 I_∞ 两者之比近似为 10。

不考虑静推力条件下,有

$$I_e = \frac{\dot{m}v_e}{\dot{m}} = v_e, \quad I_\infty = \frac{\dot{m}v_e}{\dot{m}g} = \frac{v_e}{g} \quad (1.4)$$

说明燃气的喷气速度 v_e 越大,比冲越大。

3. 总冲

总冲是指火箭发动机可获得的总冲。设火箭发动机的推力为 P , 发动机全部工作时间为 t_a , 总冲为

$$I = \int_0^{t_a} P dt \quad (1.5)$$

也可采用平均推力 $\bar{P}$ 来表示, 即 $I = \bar{P}t_a$ 。总冲反映了推力和工作时间的综合影响。例如, 给定推力条件下, 总冲越大, 工作时间越大(火箭射程越大); 给定工作时间条件下, 总冲越大, 火箭推力越大(所能发射的有效载荷越大)。

火箭飞行的加速性能采用推质比表示, 推质比是火箭推力与质量的比值(即推力产生的加速度), 其表达式为

$$a = \frac{P}{m} = \frac{\dot{m}}{m} I_e \quad (1.6)$$

显然, 火箭飞行的加速性能主要受以下两方面因素影响:

- (1) 比冲越大, 火箭加速性能越好;
- (2) 推进剂质量流量越大, 火箭加速性能越好, 但是会增大燃料消耗。

推力器由于工作原理不同, 产生推力的方式也不同, 但是可用推力、比冲和总冲描述推力性能。

1.2 测量系统的工作原理

对于推力和冲量测量系统, 尽管结构形式各不相同^[1-24], 但其基本工作原理类似, 都是通过测量推力和冲量作用下, 测量系统的位移响应而计算获得的。

1.2.1 单摆测量系统

如图 1-2 所示, 设单摆系统的阻尼系数为 c , 阻尼产生的力矩为 $-c\dot{\theta}$, 重力产生的阻力矩为 $M = -mgl\sin\theta$ (l 为质心位置), 转动惯量为 J , 推力的力矩为 $f(t)L_f$, L_f 为力臂, 由动量矩定理可知, 单摆系统振动方程为

$$J\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + mgl\sin\theta = f(t)L_f \quad (1.7)$$

该方程是非线性方程, 当转角 θ 很小时 $\sin\theta \approx \theta$, 此时其可简化为线性方程

$$J\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + mgl\theta = f(t)L_f \quad (1.8)$$

单摆测量系统的主要特点为:

- (1) 单摆振动方程简单。单摆振动方程为二阶微分方程, 具有单一振动频率和周期, 系统响应分析容易, 系统参数标定简单, 便于测量精度分析和评估。
- (2) 要求振动转动角很小。振动转动角较大时, 振动方程为非线性微分方程, 这给系统响应分析、参数标定和精度分析带来困难。

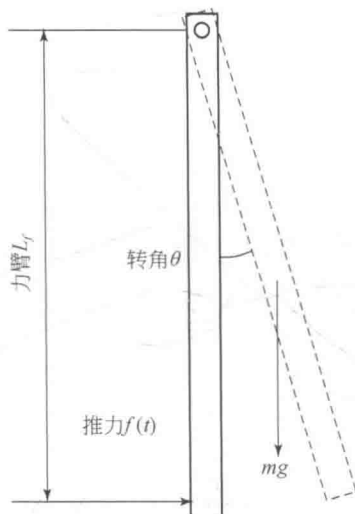


图 1-2 单摆系统的示意图

(3) 需要确定质心位置。实际测量系统的单摆,由于附加各种辅助装置,易造成单摆形状不规则,需要确定质心位置和测量转动惯量。

1.2.2 扭摆测量系统

如图 1-3 所示,设扭摆的阻尼系数为 c ,阻尼产生的力矩为 $-c\dot{\theta}$,扭转角 θ 所产生的扭矩为 $M = -k\theta$ (k 为扭转刚度系数),扭摆系统的转动惯量为 J ,由动量矩定理可知,扭摆系统振动方程为

$$J\ddot{\theta} + c\dot{\theta} + k\theta = f(t)L_f \quad (1.9)$$

式中, L_f 为力臂。

推力 $f(t)$ 具有两种作用:一种是产生围绕扭转轴的力矩 $M(t) = f(t)L_f$,造成扭转振动,该振动是测量推力所需要的运动;另一种是对扭转轴产生垂直作用力,造成扭转轴的高频弯曲振动,产生测量的附加干扰噪声。

扭摆振动是在水平平面内,对基座的垂直方向位移和外力干扰不敏感,可减小垂直方向的振动干扰,从而提高测量精度。

扭摆测量系统的主要特点为:

(1) 扭摆振动方程简单。扭摆振动方程为二阶微分方程,具有单一振动频率和周期,系统响应分析容易,系统参数标定简单,便于分析和评估测量精度。

(2) 对垂直基座方向振动干扰不敏感。扭摆振动在平行基座的水平平面内,对垂直基座的位移或外力振动干扰不敏感。

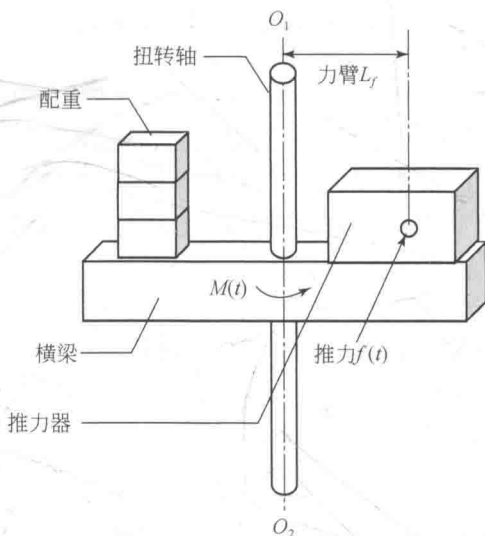


图 1-3 扭摆系统的示意图

(3) 存在扭转轴的附加弯曲振动。这是推力产生的附加干扰影响,可通过设计扭转轴的结构抑制其影响。

1.2.3 悬臂梁测量系统

如图 1-4 所示,悬臂梁截面为矩形截面,长度为 h ,密度为 ρ_h ,弹性模量为 E ,抗弯刚度为 EI ,单位长度质量为 ρ_l , c 为单位长度的阻尼系数,在单位长度的外力 $g(x,t)$ 和单位长度的外力矩 $m(x,t)$ 作用下,弯曲振动方程为

$$EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + c \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + \rho_l \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = g(x,t) - \frac{\partial m(x,t)}{\partial x} \quad (1.10)$$

式(1.10)适用于细长悬臂梁。

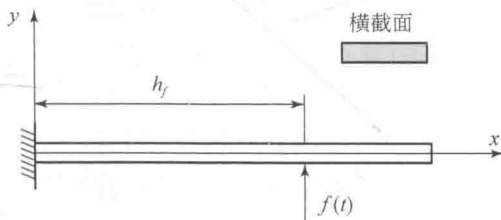


图 1-4 悬臂梁的弯曲振动

悬臂梁在 $z=h_f$ (力臂) 处有持续力作用 $g(x,t) = f(t)\delta(x-h_f)$, 悬臂梁的系统响应(振动方程的解)为

$$y(x, t) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(x) \frac{\phi_i(h_f)}{\omega_{di}} \int_0^t f(\tau) e^{-\zeta_i \omega_i (t-\tau)} \sin[\omega_{di}(t-\tau)] d\tau \quad (1.11)$$

式中, $m = h\rho_l$ 为悬臂梁的质量; ω_i 、 ζ_i 和 ω_{di} 分别对应各阶谐波的固有频率、阻尼比和振动频率, 且 $\omega_{di} = \sqrt{1 - \zeta_i^2} \omega_i$; $\phi_i(\cdot)$ 为各阶振形函数。

悬臂梁测量系统的主要特点为:

(1) 悬臂梁振动方程复杂。悬臂梁振动方程为四阶偏微分方程, 系统响应由各阶谐波构成, 各阶谐波具有各自振动频率、周期和振型函数, 系统参数众多, 系统响应分析和系统参数标定困难, 测量精度分析和评估困难。

(2) 悬臂梁振动频率较高。单摆和扭摆系统振动是转动运动, 振动频率较低, 悬臂梁振动是弯曲振动, 振动频率较高, 可测量推力作用时间较短的推力曲线。

类似的测量系统还有膜片测量系统, 如图 1-5 所示。

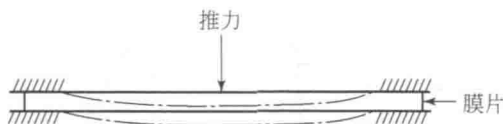


图 1-5 膜片的弯曲振动

1.2.4 推力床测量系统

如图 1-6 所示, 推力器搭载在推力床上, 推力器和推力床的总质量为 m , 弹簧刚度系数为 k , 阻尼系数为 c (包括推力床导轨的摩擦阻尼), 振动方程为

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \quad (1.12)$$

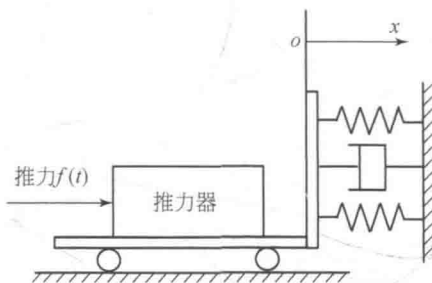


图 1-6 推力床测量系统的示意图

推力床测量系统的主要特点为:

(1) 推力床振动方程简单。振动方程为二阶微分方程, 具有单一振动频率和周期, 系统响应分析容易, 系统参数标定简单, 便于分析和评估测量精度。

(2) 对弹性器件要求较高。需要根据推力器的推力范围确定时间响应快、耐

久性好的弹簧器件。

(3) 摩擦力影响大。对于产生推力和冲量很小、推重比很小的推力器,如何尽量减小推力床与基座之间的摩擦力,使其产生足够的微小位移,难度很大。

总之,测量系统振动方程尽量简单,测量系统固有频率尽量高,抗外界干扰(位移或外力激励的干扰)的能力强,是测量系统的基本要求。

1.2.5 工作原理

通过前面分析和讨论可知测量系统的工作过程(图1-7)。

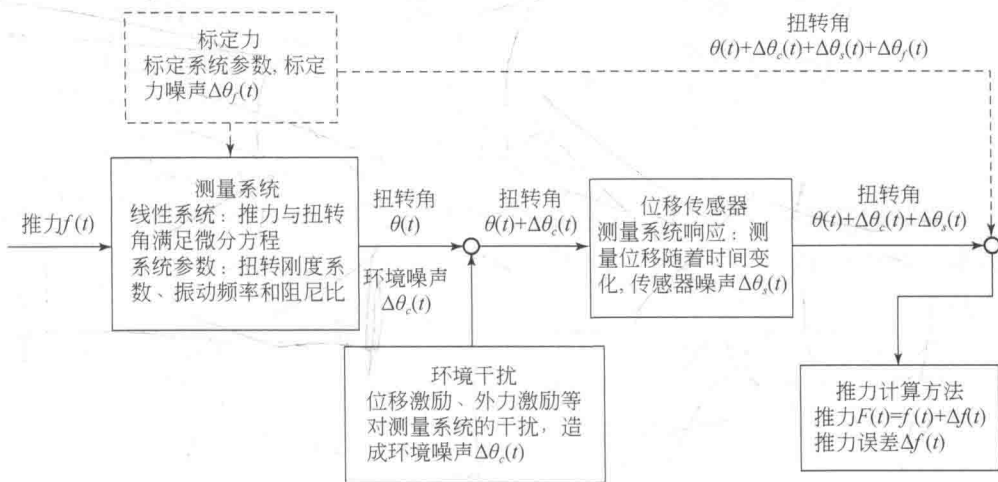


图 1-7 测量系统的工作过程

上述工作过程中需要注意以下几点:

(1) 测量系统可表示为微分方程。测量系统的输入为推力,输出为位移(线位移或角位移),微分方程的系数可用系统参数表示,例如,扭摆测量系统为二阶微分方程,系统参数包括扭转刚度系数、振动频率和阻尼比。二阶测量系统是最典型、最简单的测量系统,具有单一的振动频率和周期,所包含的系统参数最少为3个,高阶测量系统具有多个振动频率、周期和振型函数,系统参数多于3个。

(2) 环境干扰会造成环境噪声,需要抑制。环境的位移激励、外力激励等对测量系统的干扰造成了环境噪声。环境噪声的抑制方法为采用隔振平台、防护罩、测量系统抗干扰设计等。

(3) 位移传感器会造成传感器噪声,需要抑制。测量位移的传感器总是存在分辨力限制和重复性误差,造成传感器噪声。传感器噪声的抑制方法为提高分辨力和减小重复性误差,即采用高精度位移传感器。

(4) 通过待测推力作用下系统响应,采用一定的推力计算方法,评估推力和误

差。由于实际系统响应总是包含环境噪声、传感器噪声等测量噪声,因此根据实际系统响应,采用推力计算方法,计算推力时易造成推力误差。造成推力误差的根本原因是测量噪声,另外推力计算方法也会造成计算方法误差。

(5) 测量系统参数是未知的,采用标定力进行标定。标定力是恒定阶跃力,通过测量标定力作用下的系统响应,标定扭转刚度系数、振动频率和阻尼比等系统参数。标定力的随机性误差造成标定力噪声。标定力噪声抑制方法为补偿与修正标定力系统误差、减小随机误差,即采用高精度标定力。

因此,为了提高推力计算精度,对测量系统的基本要求是:①采用最简单的二阶测量系统,简化线性系统;②测量系统结构采用抗干扰设计;③抑制测量噪声,并减小推力计算的方法误差。

1.3 试验数据的功率谱密度分析

实际测量得到的系统响应数据总是存在各种测量噪声^[25-39],这种测量噪声可能是周期性的,也可能是随机性的,需要通过系统响应的试验数据分析获得测量噪声的特点。

测量噪声是否包含周期性噪声,一般采用试验数据的离散傅里叶变换和功率谱密度分析,该方法可分析出周期性噪声(频率或周期),剩下的是随机性噪声。下面讨论离散傅里叶变换方法和功率谱密度分析方法。

1.3.1 离散傅里叶变换

已知函数 $f(t)$ 在区间 $[0, T]$ 内采样值 $f_j = f(j\Delta t)$ ($j=0, 1, 2, \dots, N-1$), 采样时间步长为 $\Delta t = T/N$, 采样点时间为 $t_j = j\Delta t$ 。

已知采样值 f_j ($j=0, 1, 2, \dots, N-1$), 其离散傅里叶变换为

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-ik\frac{2\pi}{N}j}, \quad k=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (1.13)$$

c_k 的离散傅里叶反变换为

$$f_j = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{ij\frac{2\pi}{N}k}, \quad j=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (1.14)$$

式中, $i=\sqrt{-1}$ 。 $\{c_k\}$ 对应的线频率为 k/T , 角频率为 $2\pi k/T$; $\{f_j\}$ 对应的时间为 $j\Delta t$ 。

1.3.2 功率谱密度分析

已知系统响应 $\theta(t)$ 在区间 $[0, T]$ 内的采样值 $\theta_j = \theta(j\Delta t)$, 采样间隔 $\Delta t = T/N$, 采样点时间 $t_j = j\Delta t$ ($j=0, 1, 2, \dots, N-1$)。试验数据序列 $\{\theta_j\}$ 的有限离散傅里叶变换为