



“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

电路分析基础 第5版

下

李瀚荪

高等教育出版社



“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材

电路分析基础

第5版

下

李瀚荪

高等教育出版社·北京

内容简介

《电路分析基础》第5版是普通高等教育“十二五”国家级规划教材。下册讲授动态电路的相量分析法和S域分析法。具体内容有:阻抗和导纳、正弦稳态功率和能量/三相电路、频率响应/多频正弦稳态电路、耦合电感和理想变压器、拉普拉斯变换在电路分析中的应用。

本书可供普通高等学校电子信息、通信工程、电子科学等专业作为教材使用,也可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

电路分析基础.下册/李瀚荪著. —5版. —北京:高等教育出版社, 2017. 3

ISBN 978 - 7 - 04 - 047014 - 7

I. ①电… II. ①李… III. ①电路分析 - 高等学校 - 教材
IV. ①TM133

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 301970 号

策划编辑 王勇莉 责任编辑 王勇莉 封面设计 李小璐 版式设计 徐艳妮
插图绘制 杜晓丹 责任校对 高歌 责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	网 址	http://www.hep.edu.cn
社 址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印 刷	天津新华二印刷有限公司		http://www.hepmall.com
开 本	787mm×960mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印 张	17.75	版 次	1978 年 11 月第 1 版
字 数	330 千字		2017 年 3 月第 5 版
购书热线	010-58581118	印 次	2017 年 3 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定 价	33.40 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 47014-00

目 录

下 册

第三篇 动态电路的相量分析法和 s 域分析法

第八章 交流动态电路 相量法	2
§ 8-1 正弦激励的过渡过程和稳态	2
§ 8-2 变换方法的概念	7
§ 8-3 复数	9
§ 8-4 振幅相量	12
§ 8-5 相量的线性性质和基尔霍夫定律的相量形式	16
§ 8-6 三种基本电路元件 VCR 的相量形式	20
§ 8-7 VCR 相量形式的统一——阻抗和导纳的引入	27
§ 8-8 正弦稳态电路与电阻电路分析方法的类比——相量模型的引入	29
§ 8-9 正弦稳态混联电路的分析	35
§ 8-10 相量模型的网孔分析和节点分析	39
§ 8-11 相量模型的等效	42
§ 8-12 有效值 有效值相量	47
§ 8-13 两类特殊问题 相量图法	50
习题	56
第九章 正弦稳态功率和能量 三相电路	67
§ 9-1 基本概念	67
§ 9-2 电阻的平均功率	69
§ 9-3 电感、电容的平均储能	72
§ 9-4 单口网络的平均功率	77
§ 9-5 单口网络的无功功率	84
§ 9-6 复功率 复功率守恒	88
§ 9-7 正弦稳态最大功率传递定理	92
§ 9-8 对称三相电路	95

*§ 9-9 不对称三相电路	106
习题	110
第十章 频率响应 多频正弦稳态电路	116
§ 10-1 基本概念	116
§ 10-2 再论阻抗和导纳	118
§ 10-3 正弦稳态网络函数	123
§ 10-4 正弦稳态的叠加	126
§ 10-5 平均功率的叠加	135
§ 10-6 <i>RLC</i> 电路的谐振	139
*§ 10-7 音响系统低音音量控制	148
习题	152
第十一章 耦合电感和理想变压器	158
§ 11-1 基本概念	158
§ 11-2 耦合电感的 VCR 耦合系数	162
§ 11-3 空心变压器电路的分析 反映阻抗	168
§ 11-4 耦合电感的去耦等效电路	174
§ 11-5 理想变压器的 VCR	177
§ 11-6 理想变压器的阻抗变换性质	179
§ 11-7 理想变压器的实现	183
*§ 11-8 铁心变压器的模型	184
习题	190
第十二章 拉普拉斯变换在电路分析中的应用	196
§ 12-1 拉普拉斯变换及其几个基本性质	196
§ 12-2 反拉普拉斯变换——赫维赛德展开定理	204
§ 12-3 零状态分析	209
§ 12-4 网络函数和冲激响应	212
§ 12-5 线性时不变电路的叠加公式	217
习题	221

附篇 分布参数电路分析简介

第十三章 均匀传输线	226
§ 13-1 分布参数电路模型	226
§ 13-2 均匀传输线的正弦稳态响应	228
§ 13-3 无限长线	232
§ 13-4 有限长线	235

§ 13-5 无损耗线.....	239
习题.....	243
附录 A 复习、检查用题.....	244
附录 B 复习大纲.....	250
部分习题答案(下册).....	263
索引.....	271
结束语.....	277

第三篇

动态电路的相量分析法和 s 域分析法

“穷则变，变则通，通则久。”

——《周易·系辞下》

在第二篇，你见识了动态电路分析问题，原来需要求解微分方程哦！真是麻烦！况且我们还只是遇到一阶电路、二阶电路而已， n 阶电路怎么办？令人心焦。回忆当初学习线性电阻电路时，不管电路的结构、激励有多复杂，求解代数方程而已，中学生也能办到！学习动态电路分析，能否避开求解微分方程？

人们遇到麻烦，便会想法解决，方法好，就会长久存在。

正弦稳态是动态电路分析的重要对象，涉及微分方程的正弦稳态解。1894 年史坦因梅芝 (C. P. Steinmetz) 应用复数来求解正弦稳态问题，随后发展为今天广泛使用的“相量法”。相量模型的运用，免于求解微分方程。过渡过程也是动态电路分析的重要对象，涉及微分方程的完全解。1779 年拉普拉斯 (P. S. Laplace) 提出求解微分方程的拉氏变换法，其后，在电路分析中发展为复频率域 (s 域) 分析法。相量模型和 s 域模型的引入，目的虽不相同，却都能使分析动态电路如同分析电阻电路一般。

当然，要得到方便，就需付出代价！欲知详情，请读本篇，便知分晓。

第八章

交流动态电路 相量法

如果电路中所含的电源都是交流电源,则称该电路为交流电路(ac circuits)。交流电压源的电压以及交流电流源的电流都是随时间做周期性的变化的,如果这一变化方式是按正弦规律变化的,则称为正弦交流电源。通常,交流电路都系指正弦交流电路而言,本书所称的交流电路也具有这样的含义,也常称为正弦电路。

如果交流电路中除电源外所含的元件都是电阻元件则称该电路为交流电阻电路。从分析方法上说,交流电阻电路与直流电阻电路并无不同之处,如 § 1-5 中所述,不必再专门讨论。如果交流电路中除电源外所含的元件至少有一个是动态元件,则称该电路为交流动态电路。本章讨论交流动态电路的分析方法。

在工程技术上,交流动态电路也是很重要的一类电路。电力供电系统可用交流动态电路作为模型。通信电路及自动控制电路中的周期信号一般虽然不是按正弦方式变化的,但通过傅里叶级数可把信号分解为无限多项与频率成整数倍的正弦信号之和,在一定条件下仍可设法按交流动态电路处理。

本章在分析交流动态电路的过渡过程和稳态后,进入本章的主题——分析正弦稳态的相量(phasor)法。开启电路分析的变换(域)方法这扇大门。变换(域)方法题材广泛,内容丰富。本书只涉及其中的相量法和s域(复频率域)法。在“信号与系统”和其他有关课程中将会学到更多变换方法。

§ 8-1 正弦激励的过渡过程和稳态

本节讨论正弦交流电路的过渡过程和稳态。

随时间按正弦规律变化的电压和电流称为正弦(sinusoidal)交流电压和电流,它们都属正弦波。正弦波是周期波形的基本形式,在电路理论中和实际工作中都占有极其重要的地位。正弦电压可由发电机、电子振荡器产生。正弦电压如图 8-1 所示。所谓正弦规律即简谐规律,既可用时间的 sin 函数表示,也可用

时间的 \cos 函数表示,本书采用 \cos 函数,仍可称为正弦波^①。以图 8-1 所示正弦电压为例,其瞬时值可表示为

$$u(t) = U_m \cos \omega t \quad (8-1)$$

其中 U_m 为电压的振幅(amplitude)或最大值,它是一个常量, ωt 是一个随时间变化的角度, ω 则是一个与频率 f 有关的常量,

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (8-2)$$

T 为周期,单位为秒(s),频率 f 的单位为赫(Hz), ω 称为角频率,单位为弧度/秒(rad/s)。我国电力系统提供的正弦电压, f 为 50 Hz, ω 为 100π rad/s。应该指出,在进行理论分析时,常把角频率简称为频率,因此,在进行实际计算时,必须注意到两者的实际区别,考虑 2π 这一乘数。在以后的讨论中,也常把 ω 径称为频率。

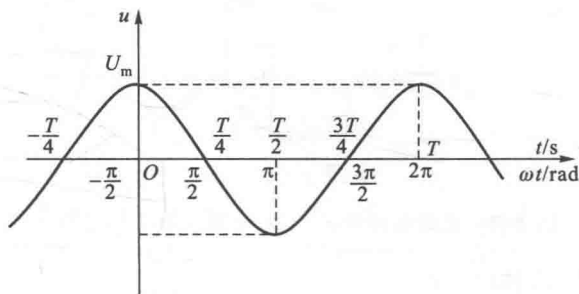


图 8-1 正弦电压波形

在一般情况下,时间的起点不一定恰好选在正弦波为正最大值的瞬间。例如,图 8-2 所示正弦电压,以角度来计量,时间起点选在离正弦波正最大值瞬间之后角 ψ 处,也就是说,当 $\omega t = -\psi$ 时,才有 $u = U_m$ 。因此,该正弦电压应表示为

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \psi) \quad (8-3)$$

ψ 称为初相角,简称初相(initial phase)。它反映了正弦波初始值的大小,即

$$u(0) = U_m \cos \psi \quad (8-4)$$

显然,根据(8-3)式,仍以电压为例,正弦波还可写为

$$\begin{aligned} u(t) &= U_m \cos(2\pi f t + \psi) \\ &= U_m \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + \psi\right) \end{aligned} \quad (8-5)$$

^① 《中华人民共和国国家标准有关电路和磁路的基本规定》(GB8445—1987)3.1,中国标准出版社,1989。

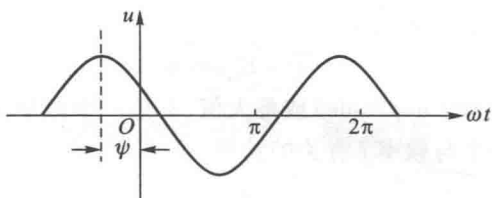
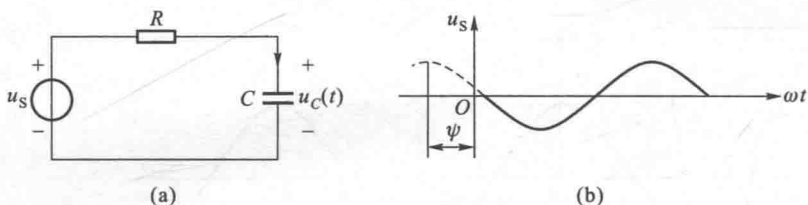


图 8-2 初相角

由此可见,一个正弦波可由三个参数完全确定,这三个参数是:振幅、频率(或角频率或周期)以及初相,这三者称为正弦波的三特征。

下面求解图 8-3(a) 所示 RC 电路于 $t=0$ 时与正弦电压源接通的正弦响应 $u_C(t)$ 。


 图 8-3 正弦电压作用于 RC 电路, $t=0$ 时开关闭合

设输入到 RC 电路的正弦电压为

$$u_s(t) = U_{sm} \cos(\omega t + \psi) \quad t \geq 0 \quad (8-6)$$

波形如图 8-3(b) 所示, ψ 为初相角, 取决于开关闭合瞬间 u_s 的数值与方向。电路的微分方程和(6-7)式是一样的, 只是输入改为正弦时间函数, 即

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_{sm} \cos(\omega t + \psi) \quad (8-7)$$

设电容的初始电压 $u_C(0) = 0$ 。微分方程的解答 $u_C(t)$ 由稳态解 $u_{Cp}(t)$ 和瞬态解 $u_{Ch}(t)$ 组成。由稳态解即得稳态响应, 即电路完全由外施电源主宰时的响应, 可设为同一频率的正弦时间函数^①, 即

$$u_{Cp} = U_{cm} \cos(\omega t + \psi_u) \quad (8-8)$$

其中 U_{cm} 和 ψ_u 为待定的常数。为确定这两个常数, 可把(8-8)式代入(8-7)式, 由于正弦函数的导数仍为同频率的正弦函数, 可得

$$\begin{aligned} -RCU_{cm}\omega \sin(\omega t + \psi_u) + U_{cm} \cos(\omega t + \psi_u) \\ = U_{sm} \cos(\omega t + \psi) \end{aligned} \quad (8-9)$$

① 参看表 6-4。

将上式左端的两项相加后^①,得

$$\begin{aligned} & \sqrt{R^2 U_{Cm}^2 \omega^2 C^2 + U_{Cm}^2} \cos[\omega t + \psi_u + \arctan(\omega CR)] \\ & = U_{Sm} \cos(\omega t + \psi) \end{aligned} \quad (8-10)$$

上式对所有 t 都应成立,由待定系数法得

$$\sqrt{R^2 U_{Cm}^2 \omega^2 C^2 + U_{Cm}^2} = U_{Sm} \quad (8-11a)$$

即

$$U_{Cm} = \frac{U_{Sm}}{\sqrt{1+R^2 \omega^2 C^2}} \quad (8-11b)$$

以及

$$\psi_u + \arctan(\omega CR) = \psi \quad (8-12a)$$

即

$$\psi_u = \psi - \arctan(\omega CR) \quad (8-12b)$$

由(8-11b)及(8-12b)两式可分别得出(8-8)式所示稳态响应中的待定常数 U_{Cm} 和 ψ_u ,其中 $\arctan(\omega CR)$ 是一个介于 0 与 90° 之间的角度,其正切为 ωCR 。稳态响应波形图如图 8-4(b)所示,输入电压的波形也绘于图 8-4(a)以资比较。在绘稳态响应波形时,所假定的初相 ψ_u 为负值。[设 $\psi = 60^\circ$, $\arctan(\omega CR) = 75^\circ$, $\psi_u = -15^\circ$ 。]

如同 § 6-7 所述,在电源接入电路的瞬间,电路中将产生瞬态响应 $Ke^{-\frac{t}{\tau}}$,以满足初始条件的需要,即保持电容电压的连续性。本电路中,遵循外接电压源要求的、如(8-8)式所示的稳态响应,在 $t=0$ 时其值为 $u_{cp}(0) = U_{Cm} \cos \psi_u$,而初始条件 $u_c(0) = 0$,两者并不一致。由瞬态响应初始值 K 的一般表示式

$$K = u_c(0) - U_{Cm} \cos \psi_u \quad (8-13)$$

可知当 $u_c(0) = 0$ 时, $K = -U_{Cm} \cos \psi_u$ 。 τ 则为 RC 。

至此,图 8-3(a)所示 RC 电路于 $t=0$ 时与正弦电压源接通的全响应,即正弦响应 u_c 已经解得,如下式所示:

$$u_c(t) = U_{Cm} \cos(\omega t + \psi_u) - U_{Cm} \cos \psi_u \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \quad t \geq 0 \quad (8-14)$$

式中 U_{Cm} 与 ψ_u 分别如(8-11b)式、(8-12b)式所示。其波形如图 8-5 所示。

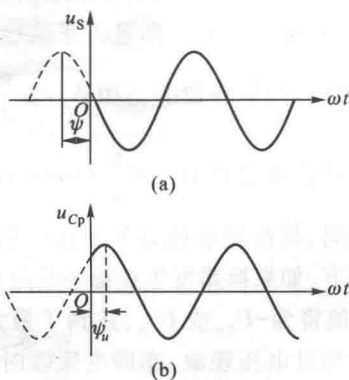


图 8-4 图 8-3 RC 电路的输入电压及稳态电容电压的波形

^① 这里需用到中学三角学中 $A \sin \theta + B \cos \theta$ 问题的解法。

在 $t=(4\sim 5)\tau$ 期间,电路处于过渡过程,在此期间响应不是按正弦方式变化的,如图 8-5 中实线所示。当电路进入稳态后,响应将以与外施激励频率一致的正弦方式变化,这一响应特称为正弦稳态响应 (sinusoidal steady state、简称 SSS),本章将用更简便的方法、即相量法来分析这一响应。

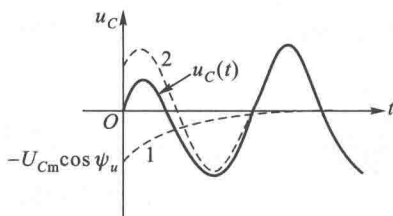


图 8-5 图 8-3RC 电路的响应

$$u_C(t), u_C(0) = 0$$

曲线 1——瞬态响应分量;

曲线 2——稳态响应分量

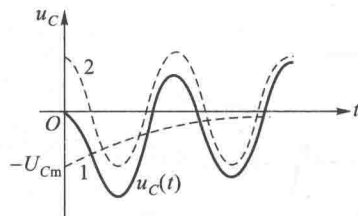


图 8-6 RC 电路的响应

$$u_C(t), u_C(0) = 0$$

$\psi_u = 0$ 、即 $\psi = \arctan(\omega CR)$ 时

由(8-13)式可知,如果 $u_C(0)$ 恰与 $U_{Cm} \cos \psi_u$ 相等,电路中将无瞬态响应分量,换路后电路立即进入正弦稳态。在零状态条件下, K 值为零的情况显然发生在稳态响应分量的初相 $\psi_u = \pm \frac{\pi}{2}$ 时。由(8-12a)式可知,如 $\psi_u = \pm \frac{\pi}{2}$,则正弦输入的初相 ψ 必须等于 $\pm \frac{\pi}{2} + \arctan(\omega CR)$,也就是说,如果在正弦输入与电路接通的瞬间,其初相 ψ 刚好等于这一数值,电路将立即进入稳态。反过来,在零状态条件下,如果换路发生在稳态响应分量的初相 $\psi_u = 0$ 或 π 时,则根据 $K = -U_{Cm} \cos \psi_u$, K 值将为 $-U_{Cm}$ 或 U_{Cm} ,达到了最大的可能值。在这种情况下,过渡过程中将出现过电压现象,亦即电压瞬时值超过稳态电压最大值的现象,如图 8-6 所示。

该图系 $u_C(0) = 0, \psi_u = 0$,即 $\psi = \arctan(\omega CR)$ 时的情况。由图可以看到,过电压发生在靠近半周期末一带,其值还与电路的时间常数 τ 有关。由(8-12a)式可知,当 $\psi_u = 0$ 或 π 时,则正弦输入的初相应为 $\arctan(\omega CR)$ 或 $\pi + \arctan(\omega CR)$ 。

以上内容虽只是在零状态条件下来讨论的,但对非零初始状态,也只是影响到(8-13)式中 K 值的大小,一切定性的结论均是适用的。

(8-14)式是在 $u_C(0) = 0$ 的条件下得到的,属图 8-3(a)所示 RC 电路的零状态响应。如果 $u_C(0) \neq 0$,则在(8-14)式中,尚需增加零输入响应 $u_C(0)e^{-\frac{t}{RC}}$ 项。亦即,当 $u_C(0) \neq 0$ 时,

$$u_C(t) = \underbrace{u_C(0)e^{-\frac{t}{RC}}}_{\text{零输入响应}} + \underbrace{\left[-U_{Cm} \cos \psi_u \cdot e^{-\frac{t}{RC}} + U_{Cm} \cos(\omega t + \psi_u) \right]}_{\text{零状态响应}} \quad t \geq 0 \quad (8-15)$$

$\underbrace{\hspace{150px}}_{\text{瞬态响应}}$
 $\underbrace{\hspace{150px}}_{\text{稳态响应}}$

无论从哪一角度看,当 $t = (4 \sim 5)\tau$ 时,电路进入稳态, $u_c(t)$ 将如(8-8)式所示。

思考题

8-1 $u_c(0)$ 值对正弦稳态响应有影响吗? 能从物理意义下加以解释吗?

8-2 求解线性时不变动态电路的某一正弦稳态响应,实际上需求解的未知量只有一个,还是两个,还是三个? 你是否感到正文中求解这一响应并非轻松之事,是否渴望有更简便的方法?

练习题

8-1 问图 8-7 所示各电路电源接通后要过多长时间,电路才能进入正弦稳态?

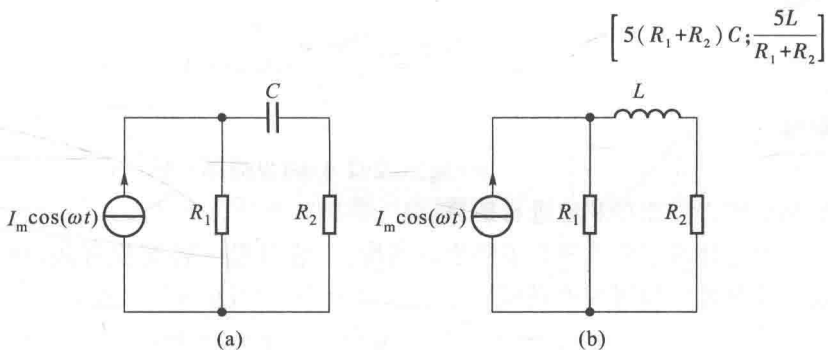


图 8-7 练习题 8-1

8-2 试由(8-9)式导出(8-10)式。

§ 8-2 变换方法的概念

科学技术领域常使用变换方法,虽然有些方法在提出之初并未意识到它也属这一范畴。所有变换方法的基本思路都如图 8-8 所示,均可分为三个步骤,即:

- (1) 把原来的问题变换为一个较容易处理的问题。
- (2) 在变换域中求解问题。
- (3) 把变换域中求得的解答反变换为原来问题的解答。

图 8-8 中,三个实线箭头依次表明了这三个步骤。

读者实际上早已遇到过运用变换思路来求解问题的例子。例如,求解满足方程式

$$x^{2.35} = 5 \quad (8-16)$$

的实数 x 问题。直接求解是很困难的,如果对(8-16)式的两端取对数后再做,求解就很容易。取对数后,得

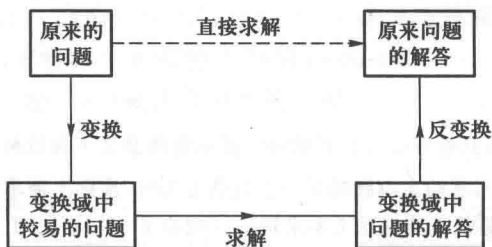


图 8-8 变换方法的思路

$$2.35 \lg x = \lg 5 \quad (8-17)$$

因此

$$\lg x = \frac{\lg 5}{2.35} \approx \frac{0.6989}{2.35} \approx 0.2974 \quad (8-18)$$

解得

$$x = \lg^{-1} 0.2974 \approx 1.983 \quad (8-19)$$

借助对数表就能顺利地进行解算。

上述计算过程大家并不陌生。实际上,它就是一种变换方法,对照图 8-7,这一计算过程如图 8-9 所示。

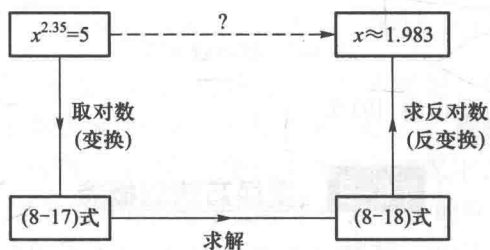


图 8-9 运用对数求解问题

(8-17)式可看作是(8-16)式的变换式,变换不仅改变了数值($\lg 5$ 当然与5不同)还改变了数值间的运算方式。(8-16)式左端的指数运算变换成(8-17)式左端的乘法运算。求解(8-17)式并不困难。借助对数表,其结果如(8-18)式所示。但这一结果还是“变换域中的解答”,并非就是我们所要的结果。为得到这一结果,还需进行反变换,即对(8-18)式两端取反对数,最后得出解答。

由正实数域变换而来的对数域是一个“虚拟世界”,使用“对数语言”。在那里,相乘“叫作”相加,乘方“叫作”相乘等。在正实数域中,“2”可以是指两本书、两只苹果等,在它那里, $\lg 2$ 是什么意思?对数表是现实世界语言和这“虚拟世界”语言间的“字典”!查查“字典”就解决。

下面需要复习一下复数,准备进入另一“虚拟世界”!

§ 8-3 复数

在相量分析法中,需运用复数。为此,需对复数及其四则运算加以复习。

设 A 为一复数, a_1 及 a_2 分别为其实部及虚部,则

$$A = a_1 + ja_2 \quad (8-20)$$

其中 $j = \sqrt{-1}$, 为虚数单位。(8-20)式的右端称为复数 A 的直角坐标形式。在实际应用中,有时只要保留复数的实部或虚部而不计另一部,遇到这种情况时,可采用 Re 和 Im 两种记号^①。如果把 Re 写于一复数的左边就表示只取这复数的实部,即

$$\text{Re } A = \text{Re}(a_1 + ja_2) = a_1$$

同理

$$\text{Im } A = \text{Im}(a_1 + ja_2) = a_2$$

Re 和 Im 可以理解为一种“算子”,复数受到它们的运算后即分别得出该复数的实部和虚部。应该注意,所谓虚部是指 a_2 而不是指 ja_2 。

复数 A 在复平面上可以用有方向的线段来表示。在原点 O 与点 A 之间连一直线。把这直线的长度记作 a , 称为复数 A 的模,模总是取正值。在这直线 A 端加上箭头,把它和实轴正方向的夹角记为 θ , 称为复数 A 的辐角。这样,复数 A 在复平面上就可以用有向线段来表示,也就是说用模 a 和辐角 θ 来表示,如图 8-10 所示。根据这一表示方式,可以得到复数的另一形式

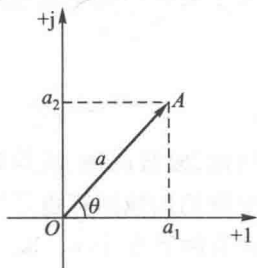


图 8-10 复数 A 的模和辐角

$$\begin{aligned} A &= a \cos \theta + ja \sin \theta \\ &= a(\cos \theta + j \sin \theta) \end{aligned} \quad (8-21)$$

又根据欧拉(Euler)恒等式

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

(8-21)式可进一步写为

$$A = ae^{j\theta} \quad (8-22)$$

上式的右端是复数的另一种形式,称为复数 A 的极坐标形式。它也是用模 a 和辐角 θ 来表示一个复数的。在工程上,常把(8-22)式简写为

$$A = a \angle \theta \quad (8-23)$$

可读为“ a 在一个角度 θ ”。

^① Re 是 real part(实部)的头两个字母; Im 是 imaginary part(虚部)的头两个字母。

运用复数计算正弦交流电路时,常常需要进行直角坐标形式和极坐标形式之间的相互转换。某些型号的电子计算器即可直接进行两种形式的互换运算。

有关复数的四则运算分别叙述如下:

1. 相等

若两复数的实部和虚部分别相等,则这两复数相等。例如:若 $a_1 = \operatorname{Re} A$ 、 $b_1 = \operatorname{Re} B$ 、 $a_2 = \operatorname{Im} A$ 、 $b_2 = \operatorname{Im} B$,且

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2$$

则

$$A = B$$

当复数表示为极坐标形式,若它们的模相等,辐角相等,则这两复数相等。

2. 加减运算

几个复数的相加或相减就是把它们的实部和虚部分别相加或相减。例如:

若

$$A = a_1 + ja_2 \quad B = b_1 + jb_2$$

则

$$A \pm B = (a_1 + ja_2) \pm (b_1 + jb_2)$$

$$= (a_1 \pm b_1) + j(a_2 \pm b_2)$$

因此,复数的加、减运算必须用直角坐标形式进行。

复数的加减运算也可以在复平面上用图形来表示(几何意义)。

设有两复数 $A = a_1 + ja_2$ 和 $B = b_1 + jb_2$,在复平面上复数 A 可以用点 A 或有向线段 \overline{OA} 来表示,复数 B 也可作类似的表示,如图 8-11(a) 所示。设 \overline{OC} 为以 \overline{OA} 及 \overline{OB} 为边的平行四边形的对角线,并设点 C 所代表的复数为 C ,则由图显然可见:复数 C 的实部为 $a_1 + b_1$,虚部为 $a_2 + b_2$ 。即

$$C = (a_1 + b_1) + j(a_2 + b_2)$$

而根据复数相加的法则可知

$$A + B = a_1 + ja_2 + b_1 + jb_2 = (a_1 + b_1) + j(a_2 + b_2) = C$$

因此,求两复数之和的运算在复平面上是符合平行四边形求和法则的。这是表明复数之和的一种很方便的方法,以后经常用到。图(b)表明两复数相减在复平面上的图示。

图 8-11 所示的复数相加和相减的运算法则和 xy 平面上向量相加、减的运算法则完全相同,但乘除运算却并非如此,向量代数和复数代数之间的相似性只限于相加法则。

3. 乘法运算

设复数 $A = a_1 + ja_2$, $B = b_1 + jb_2$,则

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (a_1 + ja_2)(b_1 + jb_2) \\ &= a_1 b_1 + ja_2 b_1 + ja_1 b_2 + j^2 a_2 b_2 \\ &= (a_1 b_1 - a_2 b_2) + j(a_2 b_1 + a_1 b_2) \end{aligned}$$

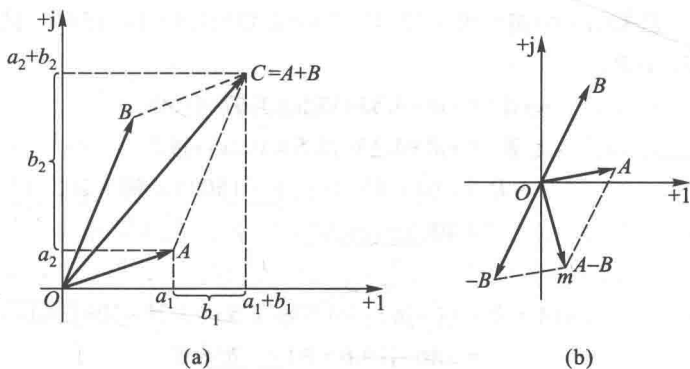


图 8-11 复数加减的图示

这里用到了 $j^2 = -1$ 这一关系。在复数的乘法运算中,有时还需用到 $j^3 = -j, j^4 = 1$ 等关系。

如果复数用极坐标形式表示,例如 $A = a \angle \theta_a, B = b \angle \theta_b$, 则

$$\begin{aligned} A \cdot B &= a e^{j\theta_a} \cdot b e^{j\theta_b} = a \cdot b e^{j\theta_a} \cdot e^{j\theta_b} \\ &= a b e^{j(\theta_a + \theta_b)} = a b \angle \theta_a + \theta_b \end{aligned}$$

即复数相乘时,其模相乘,其辐角相加。

4. 除法运算

设复数 $A = a_1 + j a_2, B = b_1 + j b_2$ 则

$$\frac{A}{B} = \frac{a_1 + j a_2}{b_1 + j b_2}$$

为使分母有理化,必须把分子和分母同乘以分母的共轭复数。若两个复数实部相等,虚部的数值相等,但符号相反,则这两个复数就称为共轭 (conjugate) 复数。因此得

$$\begin{aligned} \frac{A}{B} &= \frac{(a_1 + j a_2)(b_1 - j b_2)}{(b_1 + j b_2)(b_1 - j b_2)} = \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2) + j(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{b_1^2 + b_2^2} \\ &= \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{b_1^2 + b_2^2} + j \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{b_1^2 + b_2^2} \end{aligned}$$

如果复数用极坐标形式表示,例如 $A = a \angle \theta_a, B = b \angle \theta_b$, 则

$$\frac{A}{B} = \frac{a e^{j\theta_a}}{b e^{j\theta_b}} = \frac{a}{b} e^{j(\theta_a - \theta_b)} = \frac{a}{b} \angle \theta_a - \theta_b$$

即复数相除时,其模相除,其辐角相减。

一般来说,复数的乘、除运算用极坐标形式进行较为简便,在进行理论分析、