海天教育
HAITIAN EDUCATION

刮开涂层 查询真伪 无防伪标 均为盗版

新版

考研数学
基础点点通

杨 超 方 浩 姜晓千 / 主 编
王立鹏 代晋军 徐 鑫 / 副主编
胡金德 / 主 审

原命题专家、辅导专家联合编写

听课网址：www.xuebat.com

购书即得

880元80课时配套数学基础名师精讲课程+1000元课程代金券+同步视频

中央广播电视大学出版社

考研数学
基础点点通

杨　超　方　浩　姜晓千／主　编
王立鹏　代晋军　徐　鑫／副主编
胡金德／主　审

中央广播电视大学出版社・北京

图书在版编目(CIP)数据

考研数学基础点点通 / 杨超,方浩,姜晓千主编 .
—北京:中央广播电视大学出版社,2016.10
ISBN 978-7-304-08143-0

Ⅰ.①考… Ⅱ.①杨… ②方… ③姜… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 253812 号

考研数学基础点点通
KAOYAN SHUXUE JICHU DIANDIANTONG
杨 超 方 浩 姜晓千 主 编
王立鹏 代晋军 徐 鑫 副主编
胡金德 主 审

出版·发行:中央广播电视大学出版社
电话:营销中心 010-66490011 总编室 010-68182524
网址:http://www.crtvup.com.cn
地址:北京市海淀区西四环中路45号 **邮编**:100039
经销:新华书店北京发行所

策划编辑:米 雪 **版式设计**:赵 洋
责任编辑:许 岚 **责任印制**:赵连生

印刷:北京集会有限责任公司
版本:2016年10月第1版 2016年10月第1次印刷
开本:787mm×1092mm 1/16 **印张**:32.5 **字数**:727千字

书号:ISBN 978-7-304-08143-0
定价:75.00元

(如有缺页或倒装,本社负责退换)

Preface 前言

考研数学的复习可以分为三个阶段:第一阶段是基础阶段,第二阶段是强化阶段,第三阶段是冲刺阶段。

考生在基础阶段应根据考试大纲的要求选定教材(目前比较通用的版本为同济大学版的《高等数学》和浙江大学版的《线性代数》《概率论与数理统计》)。利用教材对所学的基本知识进行全面、系统的复习,重点是掌握基本概念、基本理论、基本方法。对概念、理论和方法不能只停留在记忆层面,而是要理解和消化。基础阶段需要做一定的练习题,通过做题加深对基本概念和基本理论的理解,进一步掌握解题的基本方法。在强化阶段,考生应通过进一步的练习,形成学科的知识体系,对基本概念和基本理论的理解达到更深层次。进入冲刺阶段,考生应注重查漏补缺,进行实战模拟,调整心态,提高应试水平和答题能力,全面进入考前状态。

为了考生能够更好地复习考研数学,取得良好的学习效果,达到考研应试水平,海天鲲鹏研究院考试命题组联合原命题专家编写了此书,供广大考生在基础阶段及强化阶段使用。本书具有以下特点:

1. 本书所选习题,全面覆盖大纲考查的知识点,旨在帮助考生加强对基础知识点的理解和运用,并在此基础上达到举一反三、触类旁通的目的。

2. 对大纲要求的基本概念、公式、定理进行剖析,增强考生对知识的理解和记忆,避免犯混淆基础概念、误用公式和对定理理解错误。

3. 本书注重一题多解,以开阔考生的解题思路,使所学知识融会贯通,能综合、灵活地解决问题。

4. 本书精选了适量的自测题,并附有参考答案和详细的解题过程。所选题目具有典型性、针对性、全面性等特点,能够满足考生巩固知识所需,增强解题技巧,提高应试能力。

此外,本书配有完整的视频课程,希望能给广大考生带来更多帮助。

最后,衷心预祝各位考生可以借助本书掌握考研数学的基本知识,最终获得成功!

编者

本书使用说明

本书依据 2017 年《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》编写而成，考生可以结合具体大纲要求学习本书。数学一：考生需要学习全书内容。数学二：考生需要学习第一章至第七章、第十章至第十六章。数学三：考生需要学习第一章至第七章、第九章至第二十四章。

目　　录

第一章　函数 极限 连续

大纲要求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,会建立应用问题的函数关系.

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.

5. 理解极限的概念,理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.

6. 掌握极限的性质及四则运算法则.

7. 掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法.

8. 理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的比较方法,会用等价无穷小量求极限.

9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.

10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

第一节　函　　数

一、基本概念

1. 函数的定义

定义　设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的数集,如果对于给定的 $x\in D$,变量 y 按照一定法则总有唯一确定的数值和它对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y=f(x)$,数集 D 叫作这个函数的定义域,x 叫作自变量,y 叫作因变量. y 的取值范围称为函数的值域.

若函数用解析式表示,使运算有意义的实数自变量值的集合即为函数的定义域.

2. 反函数

定义　设函数的定义域为 D_f,值域为 V_f. 对于任意的 $y\in V_f$,在 D_f 上可以确定一个 x 与 y 对应,且满足 $y=f(x)$. 这时,如果把 y 看作自变量,x 看作因变量,就可以得到一个新的函数:$x=f^{-1}(y)$. 我们称这个新的函数 $x=f^{-1}(y)$ 为函数 $y=f(x)$ 的反函数,而把函数 $y=f(x)$ 称为直接函数.

注：(1)只有一一对应的函数才有反函数．

(2)直接函数与反函数的图像关于 $y=x$ 直线对称．

3. 基本初等函数

基本初等函数共有 6 个：常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数，其性质和图形必须牢记．

(1)常数函数 $y=c$(c 为常数)

定义域为$(-\infty,+\infty)$，函数的图像是一条水平的直线．

(2)幂函数 $y=x^a(a\in R)$

常见的幂函数的图像如图 1－1 所示．

(3)指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$

它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,+\infty)$．指数函数的图像如图 1－2 所示．

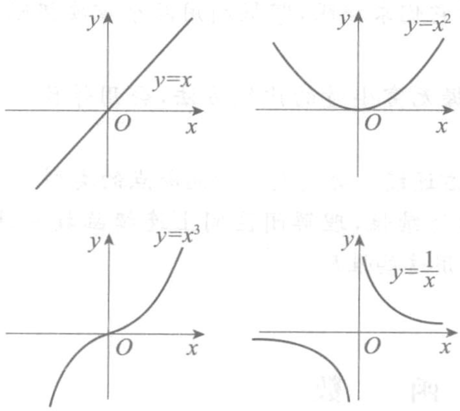


图 1－1

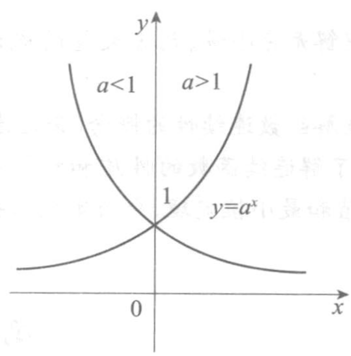


图 1－2

(4)对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$

它的定义域为$(0,+\infty)$，值域为$(-\infty,+\infty)$．对数函数 $y=\log_a x$ 是指数函数$y=a^x$ 的反函数．其图像如图 1－3 所示．

在工程中，常以无理数 $e=2.718\ 281\ 828\cdots$ 作为指数函数和对数函数的底，并且记$e^x=\exp x$，$\log_e x=\ln x$，后者称为自然对数函数．

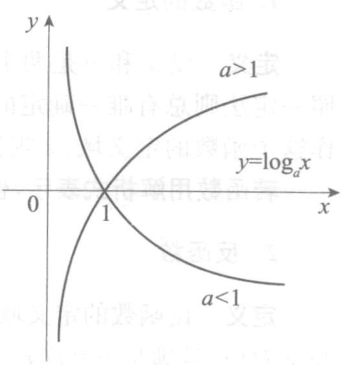


图 1－3

(5)三角函数

三角函数有正弦函数 $y=\sin x$、余弦函数 $y=\cos x$、正切函数 $y=\tan x$、余切函数 $y=\cot x$、正割函数 $y=\sec x$ 和余割函数 $y=\csc x$．其中，正弦、余弦、正切和余切函数的图像如图 1－4 所示．

(6)反三角函数

反三角函数有反正弦函数 $y=\arcsin x$，反余弦函数 $y=\arccos x$，反正切函数 $y=\arctan x$，反余切函数 $y=\mathrm{arccot}\,x$ 等．它们的图像如图 1－5 所示．注意其定义域和值域．

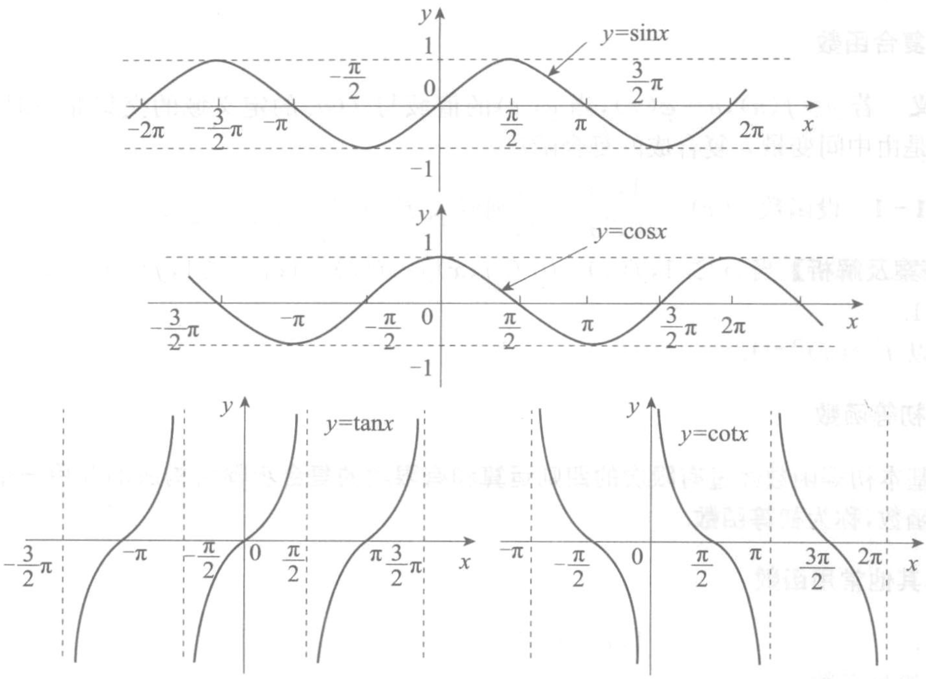

y=sinx
y=cosx
y=tanx
y=cotx

图 1-4

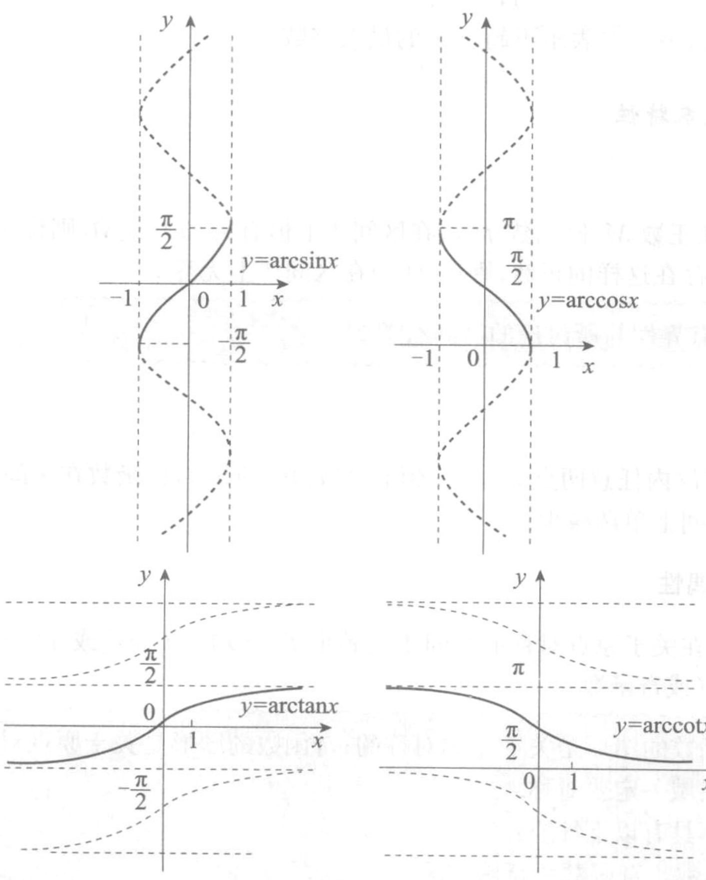

y=arcsinx
y=arccosx
y=arctanx
y=arccotx

图 1-5

4. 复合函数

定义 若 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，当 $\varphi(x)$ 的值域与 $f(u)$ 的定义域的交集非空时，称 $y=[\varphi(x)]$ 是由中间变量 u 复合成的复合函数.

例 1-1 设函数 $f(x)=\begin{cases}1,|x|\leqslant 1,\\0,|x|>1,\end{cases}$ 则函数 $f[f(x)]=$________.

【答案及解析】 当 $|x|>1$，$f(x)=0$，$f[f(x)]=f(0)=1$；$|x|\leqslant 1$，$f(x)=1$，$f[f(x)]=f(1)=1$.

所以 $f[f(x)]=1$.

5. 初等函数

由基本初等函数经过**有限次的四则运算和有限次的复合**步骤所构成的并**用一个解析式**表达的函数，称为**初等函数**.

6. 其他常用函数

① 符号函数：$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1,x>0,\\0,x=0,\\-1,x<0.\end{cases}$

② 取整函数：$y=[x]$（表示不超过 x 的最大整数）.

二、函数的基本特性

1. 有界性

定义 若存在正数 M，使函数 $f(x)$ 在区间 I 上恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上是有界函数；若不存在这样的正数，则称 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

注：函数的有界性与所讨论的区间有关.

2. 单调性

对于区间 $I\subset D$ 内任意两点 $x_1<x_2$，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，称函数在区间 I 上是单调增加的，反之称为在区间上单调减少.

3. 函数的奇偶性

若函数 $f(x)$ 在关于原点对称的区间 I 上满足 $f(-x)=f(x)$ [或 $f(-x)=-f(x)$] 则称 $f(x)$ 为偶函数（或奇函数）.

注：(1)偶函数的图形是关于 y 轴对称的；奇函数的图形是关于原点对称的.

(2)定义域一定要对称.

(3)运算具有以下性质：

① 奇函数 $\pm$ 奇函数 $=$ 奇函数.

② 偶函数±偶函数=偶函数.
③ 奇函数×(÷)奇函数=偶函数.
④ 偶函数×(÷)偶函数=偶函数.
⑤ 奇函数×(÷)偶函数=奇函数.

4. 周期性

对于函数 $y=f(x)$，如果存在**一个非零常数** T，对定义域内的任意 x 均有 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $f(x)$ 为周期函数，T 为函数 $f(x)$ 的周期.

三、典型例题

例 1-2 判别下列函数的奇偶性：$f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

【答案及解析】 记 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，则

$$f(-x)+f(x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})+\ln(x+\sqrt{1+x^2})$$
$$=\ln 1=0$$

所以 $f(-x)=-f(x)$，故 $f(x)$ 为奇函数.

例 1-3 设 $f(x)=\begin{cases} e^x, x<1, \\ x, x\geqslant 1, \end{cases}$ $\varphi(x)=\begin{cases} x+2, x<0, \\ x^2-1, x\geqslant 0, \end{cases}$ 求 $f[\varphi(x)]$.

【答案及解析】 $\varphi(x)<1 \Rightarrow x\in(-\infty,-1)\cup[0,\sqrt{2})$；$\varphi(x)\geqslant 1 \Rightarrow x\in[-1,0)\cup[\sqrt{2},+\infty)$ 所以

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases} e^{\varphi(x)}, x\in(-\infty,-1)\cup[0,\sqrt{2}), \\ \varphi(x), x\in[-1,0)\cup[\sqrt{2},+\infty). \end{cases}$$
$$=\begin{cases} e^{x+2}, x\in(-\infty,-1), \\ x+2, x\in[-1,0), \\ e^{x^2-1}, x\in[0,\sqrt{2}), \\ x^2-1, x\in[\sqrt{2},+\infty). \end{cases}$$

第二节 极　　限

一、概念、性质、定理

1. 数列的极限

定义 如果数列 x_n 与常数 a 有下列关系：对于任意给定的正数 ε(不论它多么小)，总存在正整数 N，使得对于 $n>N$ 时的一切 x_n，不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 都成立，则称常数 a 是数列 x_n 的极限，或者称数列 x_n 收敛于 a，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 或 $x_n\to a(n\to\infty)$.

注：极限存在与前有限项的取值无关，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+k}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$(其中 k 为自然数).

性质1(唯一性) 数列$\{x_n\}$不能收敛于两个不同的极限.

性质2(有界性) 如果数列$\{x_n\}$收敛,那么数列$\{x_n\}$一定有界.

> **注:**收敛数列一定有界,有界是数列收敛的必要非充分条件,即有界的数列不一定收敛,如$\{1,-1,1,-1,\cdots,1,-1,\cdots\}$.

性质3(保号性) 如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,且$a>0$(或$a<0$),那么存在正整数$N>0$,当$n>N$时,都有$x_n>0$(或$x_n<0$).

性质4(收敛数列与其子数列间的关系) 如果数列$\{x_n\}$收敛于a,那么它的任意一个子数列也收敛,且极限也是a.

> **注:**如果数列有两个子列收敛到不同的极限,那么该数列就是发散的.

2. 数列极限存在准则

准则I 如果数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$及$\{z_n\}$满足下列条件:

① $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n(n=1,2,3,\cdots)$

② $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$

那么数列$\{x_n\}$的极限存在,且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

例1-4 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{1}{n^2+2}+\cdots\dfrac{1}{n^2+n}\right)$.

【答案及解析】由于$\dfrac{n}{n^2+n}\leqslant\dfrac{1}{n^2+1}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n}\leqslant\dfrac{n}{n^2+1}$,得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=0,\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+n}=0$$

因此,由夹逼准则有$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{1}{n^2+2}+\cdots\dfrac{1}{n^2+n}\right)=0$.

准则II 单调有界数列必有极限.

例1-5 设数列$\{x_n\}$满足$0<x_1<\pi,x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,并求该极限.

【答案及解析】由数学归纳法易证$x_n>x_{n+1}>0,(n=1,2,3,\cdots)$,因此由单调有界原理可知:

$$\lim_{n\to\infty}x_n\text{ 存在. 设}\lim_{n\to\infty}x_n=a$$

则$a=\sin a$,从而$a=0$.

3. 函数的极限

(1)函数当$x\to\infty$时的极限

定义 设函数$f(x)$当$|x|$大于某一正数时有定义,如果对于任意给定的正数ε(不论它多么小),总存在着正数X,使得对于适合不等式$|x|>X$的一切x,对应的函数值$f(x)$都满足不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$,那么常数A就叫做函数$f(x)$当$x\to\infty$时的极限,记作$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$或$f(x)\to A$(当$x\to\infty$).

注：① $x\to\infty$ 既表示趋于 $+\infty$，也表示趋于 $-\infty$.

② $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

(2)函数当 $x\to x_0$ 时的极限

定义 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义，如果对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正数 δ，使得对于适合不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 x，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$，那么常数 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A$（当 $x\to x_0$）.

注：① $x\to x_0$ 表示从 x_0 的左右两侧同时趋于 x_0.

② 极限 l 的存在与 $f(x)$ 在 x_0 有无定义或定义的值无关.

③ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$.

4. 函数极限的性质

性质1（唯一性） 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，那么此极限是唯一的.

性质2（局部有界性） 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，而且 $A>0$（或 $A<0$），那么就存在常数 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

性质3（局部保号性） 如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，而且 $A>0$（或 $A<0$），那么就存在着点 x_0 的某一去心邻域，当 x 在该邻域内时，有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

性质4（函数极限与数列极限的关系） 如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，$\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列，且满足 $x_n\neq x_0(n\in N^+)$，那么相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

5. 极限的四则运算

若 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$.

那么，$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$；$\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$；$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq0)$.

6. 无穷小与无穷大

我们用 $x\to\square$ 表示下面 7 种的某一种趋近方式，即

$$\square\in\{n\to\infty\quad x\to\infty\quad x\to+\infty\quad x\to-\infty\quad x\to x_0\quad x\to x_0^+\quad x\to x_0^-\}$$

定义1 当在给定的 $x\to\square$ 下，$f(x)$ 以零为极限，则称 $f(x)$ 是 $x\to\square$ 下的无穷小量.

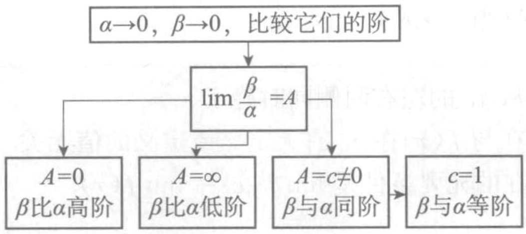
定义2 当在给定的 $x\to\square$ 下，$f(x)$ 以 ∞ 为极限，则称 $f(x)$ 是 $x\to\square$ 下的无穷大量.

定理2 在自变量的同一变化过程 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）中，函数 $f(x)$ 具有极限 A 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$，其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

定理 3 在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小；反之，如果 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

7. 无穷小的比较

定义 设 α,β 是自变量在同一变化过程中的无穷小量，$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}$ 也是这一过程中的极限.



性质 1 若 $|f(x)|<M$，$g(x)\to 0$，则 $f(x)g(x)\to 0$.

性质 2（等价无穷小重要定理） 若 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$ 存在，则 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

证：$\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\left(\dfrac{\beta'}{\beta}\cdot\dfrac{\alpha'}{\beta'}\cdot\dfrac{\alpha}{\alpha'}\right)=\lim\dfrac{\beta'}{\beta}\cdot\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}\cdot\lim\dfrac{\alpha}{\alpha'}=\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

常见等价无穷小

当 $x\to 0$ 时，有

$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1$；

$a^x-1\sim x\ln a$，$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$.

例 1－6 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$________.

【答案及解析】 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2$.

8. 极限的基本计算方法

（1）利用两个重要极限

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}\text{ 或 }\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}}$$

推广：$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$，$\lim\limits_{x\to x_0}[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}$，$\lim\limits_{x\to x_0}[1+\varphi(x)]^{\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}^A$，其中，$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)=A$.

（2）利用洛比达法则

① $\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$. 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 满足条件：