21世纪高等学校规划教材

XIAN XING DAI SHU ——XUE XI FU DAO YU DIAN XING WEN TI JIE DA

线性代数

——学习辅导与典型问题解答

（第2版）

主编◎曾金平 张忠志

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

21世纪高等学校规划教材

线性代数

——学习辅导与典型问题解答

(第2版)

主　编　曾金平　张忠志

副主编　关　力　刘能东

余晋昌　王学锋

北京邮电大学出版社

·北京·

内 容 简 介

本书是编者所编的《线性代数》(第 2 版)的配套学习指导书，可作为大学理工科学生学习线性代数课程的辅导教材.

本书的内容与教材《线性代数》的内容平行，虽紧扣原教材但又具有相对的独立性。本书共分四章，包含矩阵、线性方程组、二次型、线性空间与线性变换. 每章由主要内容、基本要求与疑难解析、典型例题、习题解答等四个部分组成. 书中还增设一个附录，收集了 2000 年至 2015 年硕士研究生入学考试数学试题线性代数部分试题及其解答.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数:学习辅导与典型问题解答/曾金平，张忠志主编. —2 版. -- 北京:北京邮电大学出版社，2016. 1
ISBN 978-7-5635-4626-8

Ⅰ. ①线…　Ⅱ. ①曾…　②张…　Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教学参考资料　Ⅳ. ①O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 316697 号

书　　名　线性代数——学习辅导与典型问题解答(第 2 版)
主　　编　曾金平　张忠志
责任编辑　张保林
出版发行　北京邮电大学出版社
社　　址　北京市海淀区西土城路 10 号(100876)
电话传真　010-82333010　62282185(发行部)　010-82333009　62283578(传真)
网　　址　www3. buptpress. com
电子信箱　ctrd@buptpress. com
经　　销　各地新华书店
印　　刷　北京泽宇印刷有限公司
开　　本　787 mm×960 mm　1/16
印　　张　16
字　　数　378 千字
版　　次　2016 年 1 月第 2 版　2016 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-4626-8　　定价：29. 00 元

前　言

“线性代数”是研究离散量理论的一门重要的基础学科，是高等学校理工、经济和管理类各专业的必修课程. 其内容具有逻辑推理严密、思维抽象跳跃等特点，加之授课学时少，使得在学习过程中，觉得很抽象，不易理解和掌握. 为了便于学生掌握线性代数课程的基本概念、基本理论和基本方法，提高其综合分析和灵活运用所学知识的能力，我们编写了本书.

本书由曾金平、张忠志担任主编，并有关力、刘能东、余晋昌、王学锋等多位老师参加编写. 全书共 4 章，包括矩阵、线性方程组、二次型、线性空间与线性变换等内容. 每章分为主要内容、基本要求与疑难解析、典型例题和习题解答四部分. 其中，主要内容是对每章基本内容的总结和归纳，以便于读者系统掌握各章的知识点；基本要求与疑难解析是对每章的学习指导，同时对于一些常见错误进行分析和纠错；本书还将通过典型例题的分析，进一步加深对各章内容的消化；习题解答则通过解题方法和要领的介绍，解答读者在解题过程中遇到的问题. 这部分的习题选自编者所编的《线性代数》.

在本书的编写过程中参阅了许多书籍和文献，在此向这些作者表示最诚挚的感谢！限于作者水平，书中疏漏之处在所难免，恳请广大读者和专家批评指正！

编　者

2015.12.22 于松山湖

目　　录

第1章　矩　　阵

一、主要内容

本章主要讨论矩阵的运算及其性质，方阵的行列式及其性质，矩阵的初等变换与矩阵的秩，逆矩阵，分块矩阵的运算等.

(一) 矩阵的运算

矩阵的运算主要包括矩阵的线性运算(加法与数乘)、矩阵的乘法运算和矩阵的转置运算. 关于矩阵的运算，应注意以下几点.

(1) 矩阵运算的可行性. 例如，两个同型矩阵才能相加. 又如，只有当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等时，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 才能相乘. 值得注意的是，对于同阶方阵而言，矩阵的加法、数乘、乘法等运算都是可行的.

(2) 矩阵运算的性质是简化矩阵运算的基础. 一般而言，运算规律包含交换律、结合律、分配律等. 和数的运算不同，对于矩阵运算，有些规律不再成立. 例如，矩阵的乘法具有结合律，即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$，但它不具有交换律，即一般情况下 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$. 正因为如此，矩阵运算的分配律包含如下两种形式：$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$，和 $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$. 值得注意的是，对于矩阵乘法而言，消去律同样不再成立. 换句话说，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 并不意味着 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

另外，有些特殊规律，如 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$，$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，需特别关注.

(3) 将矩阵分块的目的是为了简化矩阵的计算. 分块矩阵的运算就其运算性质而言，与矩阵的运算性质相仿. 为了更有效地进行计算，应根据问题的目的，对有关矩阵适当地分块. 例如，为了计算下面的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

的逆矩阵和相应矩阵的行列式，可令

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix}.$$

则

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{C}^{-1}\end{pmatrix},$$

$$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}||\boldsymbol{C}|.$$

这样便将四阶方阵求逆问题转化为二阶方阵的求逆问题，求四阶行列式的值转化为求二阶行列式的值，从而达到简化计算的目的.

（二）行列式

行列式是方阵的重要数值特征之一，它反映了方阵的某些内在性质. 例如，方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}|=\det(\boldsymbol{A})\neq 0$. 行列式的计算是本章的重要内容之一. 二阶、三阶行列式的计算可以采用对角线法则，高阶行列式的计算则不再成立对角线法则. 一般情况下，行列式的计算有如下两个基本方法：

（1）利用拉普拉斯展开定理求行列式. 这是一种降阶求解的方法，其运算量较大. 采用这种方法计算行列式时，首先应分析行列式元素的特点，并利用行列式的性质将行列式的某行或某列的元素尽可能多地变为零，然后应用展开定理计算.

（2）利用上（下）三角行列式的值计算行列式. 首先应用行列式的三条变换性质将给定的行列式变成上（下）三角行列式，然后再计算.

（三）矩阵的初等变换、矩阵的秩

矩阵的初等变换是研究线性代数内容的重要工具，它具有性质：矩阵的初等变换不改变矩阵的秩，如

$$\text{若 } \boldsymbol{A}\xrightarrow{r}\boldsymbol{B}\text{，则 } R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B}).$$

矩阵的初等变换与行列式的变换性质就其变换内容而言是相似的，但其结果是完全不

同的，因此，它们本质上是两个截然不同的概念. 矩阵的初等变换将一个矩阵变成了另一个矩阵，二者是不相等的；行列式的变换尽管将一个行列式变成另一个行列式，但它们的值之间有着紧密的关系，例如，若 $\boldsymbol{D}_1 \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} \boldsymbol{D}_2$，则 $\boldsymbol{D}_1 = -\boldsymbol{D}_2$.

矩阵的秩是矩阵的另一个重要数值特征，它反映了矩阵的某些重要性质. 例如，n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A}) = n$. 因而，求矩阵的秩是一个典型问题，其具体求法如下.

设给定矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

第一步　利用矩阵的初等行变换将 $\boldsymbol{A}$ 化为行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$；

第二步　求 $R(\boldsymbol{B})$，即行阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的非零行；

第三步　根据矩阵秩的定义，得 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B})$.

(四) 逆矩阵及其计算

逆矩阵是矩阵理论中的一个重要概念，其定义为：令 $\boldsymbol{A}$ 是给定的 n 阶方阵，若存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，使得

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E},$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 是一个可逆矩阵，而 $\boldsymbol{B}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

根据逆矩阵的性质和矩阵行列式的性质：$|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$，可得矩阵逆矩阵的等价定义：令 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，若存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，使得

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E},$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 是一个可逆矩阵，而 $\boldsymbol{B}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

一般而言，判定一个方阵可逆的准则有两个：一个是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件为 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$；另一个是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A}) = n$.

对于二阶的方阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，当 $ad - bc \neq 0$ 时，则 $\boldsymbol{A}$ 可逆且 $\boldsymbol{A}^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

当方阵的阶数大于 2 时，可以运用矩阵的初等行变换求逆矩阵. 设给定方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

其逆矩阵的具体求法如下.

第一步　构造矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{E})$；

第二步　对矩阵 $\boldsymbol{B}$ 运用矩阵的初等行变换，将 $\boldsymbol{B}$ 的子块 $\boldsymbol{A}$ 化成单位矩阵 $\boldsymbol{E}$，同时将 $\boldsymbol{B}$ 的子块 $\boldsymbol{E}$ 化成了某个矩阵 $\boldsymbol{C}$，也就是说，化 $\boldsymbol{B}$ 为行标准形矩阵，即

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{E}) \xrightarrow{r} (\boldsymbol{E} \mid \boldsymbol{C})；$$

第三步　根据逆矩阵的性质得 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{C}$.

(五) 矩阵的应用

1. 求矩阵方程

矩阵方程就是含有未知矩阵的等式，它在自动控制、电学、力学等领域有着广泛的应用. 一般而言，求矩阵方程的解并非易事，而当某些已知矩阵可逆时，求解矩阵方程便变得容易了. 例如，设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{B}$ 为已知矩阵，$\boldsymbol{X}$ 为未知矩阵，于是有下面结论：

(1) 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$；

(2) 若 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{BA}^{-1}$；

(3) 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{AB}$（或 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{BA}$），则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$.

2. 克拉默法则

如果含有 n 个方程的 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

的系数矩阵的行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则上述线性方程组有唯一解. 当 $D \neq 0$ 时,其解可表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \cdots, \quad x_n = \frac{D_n}{D},$$

其中 $D_j (j = 1,2,\cdots,n)$ 是用常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 代替系数矩阵 D 中第 j 列对应元素得到的 n 阶行列式,即

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad j = 1,2,\cdots,n.$$

克拉默法则是线性方程组中重要的基本理论,应熟练掌握其内容. 克拉默法则将 n 元线性方程组的求解问题化成 $n+1$ 个 n 阶行列式的计算问题. 然而,在用克拉默法则求解线性方程组时,存在以下局限性.

(1) 要求线性方程组中方程的个数与未知元的个数相等;

(2) 要求系数矩阵的行列式非零;

(3) 当未知元个数很大时,求解的运算量很大.

因此,在具体求解线性方程组时,不采用克拉默法则,而是采用高斯消去法. 在下一章,将针对更一般的线性方程组,讨论它的可解性、解的结构和求解方法.

二、基本要求与疑难解析

(一) 基本要求

(1) 熟悉矩阵概念. 理解单位矩阵、对角矩阵、对称矩阵.

(2) 熟练掌握矩阵的线性运算、乘法运算、转置运算及其运算规律.

(3) 掌握分块矩阵及其运算.

(4) 掌握行列式的定义和性质. 熟练掌握行列式的计算方法.

(5) 熟悉矩阵的初等变换、矩阵秩的概念. 熟练掌握矩阵的秩的求法.

(6) 熟悉逆矩阵的概念. 熟练掌握逆矩阵存在的条件与矩阵求逆的方法.

(7) 掌握克拉默法则.

(二)疑难解析

(1) 矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-3&0\\1&0&0\\1&3&6\end{pmatrix}$ 与行列式 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2&-3&0\\1&0&0\\1&3&6\end{vmatrix}$ 有什么区别与联系?

答:矩阵与行列式是两个截然不同的概念.

① 矩阵仅仅只是一个长方形的数表. 例如,在上面的例子中,虽然矩阵和行列式都由相同的排成 3 行 3 列的 9 个数组成,但矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-3&0\\1&0&0\\1&3&6\end{pmatrix}$ 表示一个数表,而行列式 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2&-3&0\\1&0&0\\1&3&6\end{vmatrix}=18$,它是一个确定的数值.

② 一般情况下,矩阵的行数和列数可以不相等,而行列式的行数必等于列数,所以只有方阵才有行列式. 值得注意的是,矩阵通常用“()”或“[]”表示,而行列式则用“| |”表示.

③ 矩阵在进行行变换时,变换前后的矩阵之间用箭头“→”连接,切记不要用等号“=”,这也是和行列式计算的不同之处. 例如,

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-3&0\\1&0&0\\1&3&6\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-3&0\\1&3&6\end{pmatrix},$$

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2&-3&0\\1&0&0\\1&3&6\end{vmatrix}\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2}-\begin{vmatrix}1&0&0\\2&-3&0\\1&3&6\end{vmatrix}.$$

(2) 如何理解交换律在矩阵乘法中不一定成立?

答:可从三个方面理解. 其一,在矩阵乘法中,当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 乘以矩阵 $\boldsymbol{B}$ 时,要求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等,$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 才能相乘. 即使 $\boldsymbol{AB}$ 有意义,但 $\boldsymbol{BA}$ 不一定有意义.

例如,令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$,则有 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$,但是,$\boldsymbol{BA}$ 不存在,所以,$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

其二，即使 AB、BA 都有意义，但不能保证 AB 与 BA 是同型矩阵，即它们的行数与列数并不对应相等.

例如，若令 $A=(1,0)$，$B=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，则有 $AB=(1,0)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=(0)$，然而 $BA=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(1,0)=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$，显然，$AB\neq BA$.

其三，即使 AB 与 BA 都有意义，且它们的行数与列数也相等，但也不能保证 AB 与 BA 相等.

例如，若令 $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，则有

$$AB=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix},$$

$$BA=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\0&0\end{pmatrix},$$

显然，$AB\neq BA$.

(3) 为什么矩阵乘法不满足消去律？

答：这是因为如果有 $AB=O$，不一定有 $A=O$ 或 $B=O$.

例如，令 $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$. 易知 $AB=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=O$，但 $A\neq O$ 且 $B\neq O$.

因此，即使等式 $AB=AC$ 成立，即等价于 $A(B-C)=O$，也不一定有 $B-C=O$，即不一定有 $B=C$.

(4) 比较实数的运算及运算规律与矩阵的运算及运算规律.

答：实数中有两个特殊的数 0 和 1，它们在实数的运算中起着重要的作用. 同样，零矩阵 O 和单位矩阵 E（或用 I 表示）在矩阵的运算中起着重要的作用.

实数可以进行加、减、乘、除（除数不为零时）运算，但是矩阵的运算是有限制的. 两个同型矩阵可以做加法和减法运算，但不一定能做乘法运算；矩阵的数乘运算对任何矩阵都可行；矩阵 A 能乘矩阵 B 则要求矩阵 A 的列数与矩阵 B 的行数相等. 值得注意的是，对于同阶方阵，矩阵的加、减、数乘和乘法运算均可行.

矩阵的运算是利用数的运算实现的，因此，矩阵的运算性质与数的运算性质有着密切

的关系. 例如,实数的加法具有交换律、结合律,矩阵的加法同样具有交换律、结合律;又如,实数乘法的消去律“若 a^{-1} 存在(即 $a \neq 0$) 且 $ab = ac$,则 $b = c$”与矩阵乘法的消去律“若 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在(即 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$) 且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC}$,则 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$”极为相似. 但是,实数的乘法满足交换律、结合律,而矩阵的乘法仅满足结合律而不满足交换律. 于是,矩阵乘法对加法的分配律分为左分配律和右分配律,这是与实数的乘法对加法的分配律不同之处.

(5) 在利用矩阵的分块技术对矩阵进行计算时,怎样对矩阵分块?

答:利用矩阵的分块技术,将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积表示为它们的子块乘积的形式,便于从多角度认清矩阵乘积的本质. 例如,令 $\boldsymbol{A}$ 为一个 $m \times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为一个 $n \times r$ 矩阵. 考虑下面四种情形.

情形 1:将矩阵 $\boldsymbol{B}$ 按列分块,即 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r)$,其中 $\boldsymbol{\beta}_j (j = 1, 2, \cdots, r)$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列,于是有

$$\boldsymbol{AB} = (\boldsymbol{A\beta}_1, \boldsymbol{A\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{A\beta}_r).$$

这说明,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积 $\boldsymbol{AB}$ 的第 j 列元素等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列的积.

情形 2:若 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2)$,其中 $\boldsymbol{B}_1$ 为 $n \times t$ 矩阵,$\boldsymbol{B}_2$ 为 $n \times (r - t)$ 矩阵,则有

$$\boldsymbol{AB} = (\boldsymbol{AB}_1, \boldsymbol{AB}_2).$$

情形 3:若将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按行分块,即

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行,于是有

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{\alpha}_2 \boldsymbol{B} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_m \boldsymbol{B} \end{pmatrix}.$$

这说明,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积 $\boldsymbol{AB}$ 的第 j 行元素等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行与 $\boldsymbol{B}$ 的积.

情形 4:若 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 \end{pmatrix}$,其中 $\boldsymbol{A}_1$ 为 $k \times n$ 矩阵,$\boldsymbol{A}_2$ 为$(m - k) \times n$ 矩阵,则有

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A}_2 \boldsymbol{B} \end{pmatrix}.$$

三、典型例题

例 1 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵,下列命题是否正确?

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|=0$,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$;

(2) 若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$;

(3) 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$;

(4) 若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{BX}$,则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$($\boldsymbol{X}$ 也为 n 阶方阵);

(5) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$;

(6) $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{E}^2-\boldsymbol{B}^2$($\boldsymbol{E}$ 为 n 阶的单位阵);

(7) $(\boldsymbol{AB})^k=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$($k$ 为整数).

解 (1) 不正确.

例如,令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{O}$,但 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&2\\3&6\end{vmatrix}=0$.

(2) 不正确.

例如,令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$,易知 $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}$,但 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$.

(3) 不正确.

例如,令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$,易知

$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{O}$,但 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 且 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$.

(4) 不正确.

例如,令 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$,易知

$$\boldsymbol{AX}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\-2&-2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{BX}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\-2&-2\end{pmatrix},$$

但 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{B}$.

(5) 不正确.

因为$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{B}^2$，在一般情况下，由于$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，所以

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\neq\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2.$$

例如，令$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$，因为

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\begin{pmatrix}2&0\\-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2\\0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&4\\0&-4\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&-2\\-2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&2\\2&-2\end{pmatrix},$$

故有$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\neq\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$.

(6) 正确.

因为$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{E}^2-\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{E}^2-\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}^2$，所以结论正确.

(7) 不正确.

因为$(\boldsymbol{AB})^k=\underbrace{(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{AB})\cdots(\boldsymbol{AB})}_{k}$，而$\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k=\underbrace{(\boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A})}_{k}\underbrace{(\boldsymbol{BB}\cdots\boldsymbol{B})}_{k}$，又因为在一般情况下，

$$\underbrace{(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{AB})\cdots(\boldsymbol{AB})}_{k}\neq\underbrace{(\boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A})}_{k}\underbrace{(\boldsymbol{BB}\cdots\boldsymbol{B})}_{k},$$

所以，一般情况下，$(\boldsymbol{AB})^k\neq\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$.

例如，令$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$. 由于

$$(\boldsymbol{AB})^2=\left[\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}\right]^2=\begin{pmatrix}0&0\\-2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\-2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\4&4\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{O},$$

故$(\boldsymbol{AB})^2\neq\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2$.

例 2 设n阶方阵$\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$，求$\boldsymbol{AD}$，$\boldsymbol{DA}$.

解 由矩阵的乘法运算的定义，得

$$AD = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}\lambda_1 & a_{12}\lambda_2 & \cdots & a_{1,n-1}\lambda_{n-1} & a_{1n}\lambda_n \\ a_{21}\lambda_1 & a_{22}\lambda_2 & \cdots & a_{2,n-1}\lambda_{n-1} & a_{2n}\lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1}\lambda_1 & a_{n-1,2}\lambda_2 & \cdots & a_{n-1,n-1}\lambda_{n-1} & a_{n-1,n}\lambda_n \\ a_{n1}\lambda_1 & a_{n2}\lambda_2 & \cdots & a_{n,n-1}\lambda_{n-1} & a_{nn}\lambda_n \end{pmatrix},$$

$$DA = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_1 a_{12} & \cdots & \lambda_1 a_{1,n-1} & \lambda_1 a_{1n} \\ \lambda_2 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \cdots & \lambda_2 a_{2,n-1} & \lambda_2 a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_{n-1} a_{n-1,1} & \lambda_{n-1} a_{n-1,2} & \cdots & \lambda_{n-1} a_{n-1,n-1} & \lambda_{n-1} a_{n-1,n} \\ \lambda_n a_{n1} & \lambda_n a_{n2} & \cdots & \lambda_n a_{n,n-1} & \lambda_n a_{nn} \end{pmatrix}.$$

例 3 设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

解 因为

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4\boldsymbol{E},$$

当 n 为偶数时，即 $n = 2k, k \in \mathbf{N}$ 时，有