Calculus

微积分 Ⅱ

章丽霞　邓建平　林小围　王　培　编

南京大学出版社

微积分 II

章丽霞　邓建平　林小围　王　培　编

Calculus

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分. Ⅱ / 章丽霞等编. —南京：南京大学出版社，2016. 12

ISBN 978－7－305－17075－1

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①章… Ⅲ. ①微积分—高等学校—教材 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 128660 号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　　　邮　　编 210093
出 版 人 金鑫荣

书　　名 微积分(Ⅱ)
编　　者 章丽霞　邓建平　林小围　王　培
责任编辑 刘　琦　　　　编辑热线：025－83593923

照　　排 南京理工大学资产经营有限公司
印　　刷 常州市武进第三印刷有限公司
开　　本 787×960　1/16　印张 15　字数 214 千字
版　　次 2016 年 12 月第 1 版　2016 年 12 月第 1 次印刷
ISBN 978－7－305－17075－1
定　　价 35.00 元

网　　址：http://www.njupco.com
官方微博：http://weibo.com/njupco
微信服务号：njuyuexue
销售咨询热线：(025)83594756

前　言

本书是根据教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会2014年颁布的《大学数学课程教学基本要求》中“经济和管理类本科数学基础课程教学基本要求”编写的，可以作为大学经济和管理类学生学习微积分课程的教材和参考书，其他相关专业也可以使用。

作为面向独立学院经济和管理类学生的微积分教材，本书紧扣独立学院培养具有创新精神的应用型人才的目标，结合数学的学科特征，立足于基础与应用并重，以提高数学素养为目标。在基础与应用并重的思想指导下，我们编写教材与教学实践紧密结合，在实践中编写，编写后再实践，反复完善。在编写中，努力做到：

(1) 注重数学的思想与方法，使得学生通过学习本书，不仅获得基本概念、基本定理、基本方法，还能使学生得到一些基本的科学训练，学到数学的思维方式，提高逻辑推理能力。

(2) 注重数学的应用，使得学生通过本书的学习，能够更好地学习相关专业课的核心概念如边际成本、边际收入、边际利润、弹性等。

本书介绍了微积分的基本理论与方法。上册内容包含预备知识、极限与连续、导数与微分、一元函数积分学，下册内容包含向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、二重积分、无穷级数、常微分方程与差分方程，共九章，适用于应用型本科院校，尤其是独立学院各相关专业。本书可安排两个学期，每周6学时，共讲授192学时。书中用“*”标出段落为较难内容，供任课教师选用，一般留给有兴趣的学生课外阅读或查阅。书中的习题分为A，B两组，A组为基本要求，B组为较高要求，书末附有部分习题答案与提示。

本书由南京大学金陵学院大学数学教研室编著,分Ⅰ、Ⅱ两册。Ⅰ册中,张玉莲编写第1章与第3章3.5节至3.9节,马荣编写第2章,王夕予编写第3章3.1节至3.4节,袁明霞编写第4章。Ⅱ册中,邓建平编写第5章和第7章,林小围编写第6章,章丽霞编写第8章,王培编写第9章。Ⅰ册由马荣统稿,Ⅱ册由章丽霞统稿。教研室主任黄卫华教授对全部教材进行了仔细地审校,提出了许多有益的建议。

感谢省教育厅与南京大学出版社合作将本课程建设项目立项进行教材建设。感谢南京大学金陵学院教务处和基础教学部领导对编者们的关心和支持。感谢南京大学孔敏教授、陈阶智教授以及兄弟院校的郭宜彬、汪鹏、魏文峰、邵宝刚等老师对本课程的一贯支持。感谢南京大学出版社吴汀和刘琦两位编辑的认真负责与悉心编校,使本书质量大有提高。

书中不足与错误难免,敬请专家、同行和读者不吝赐教。

编 者

2016.3.30

目　录

第 5 章　向量代数与空间解析几何

解析几何学是 17 世纪初由法国数学家笛卡尔[1]开创的,其学科理论是数学史上划时代的成就. 它利用平面上的点与坐标间的对应关系将数学研究的两个基本对象“形”与“数”统一起来,使得人们既可以用代数方法解决几何问题,也可以用几何方法解决代数问题. 为了给学习多元函数微积分学做些必要的准备工作,本章首先建立空间直角坐标系,介绍向量代数的基本知识,然后以向量为工具研究空间的平面和直线、空间曲面与空间曲线,最后介绍二次曲面.

5.1　向量代数

5.1.1　空间直角坐标系

取定一点 O(习惯上称为**原点**),过点 O 引三条相互垂直的数轴 Ox,Oy,Oz,在三条数轴上取相同的度量单位,这样的三条数轴依次称为 ***Ox* 轴**,***Oy* 轴**,***Oz* 轴**,约定三条坐标轴的正向符合右手法则(即伸开右手使得大拇指的指向与 Oz 轴正向相同,其余平行四指的指向与 Ox 轴的正向相同,以大拇指为轴四指向内旋转 $\frac{\pi}{2}$ 后的指向即是 Oy 轴的正向),这就是**空间直角坐标系**,记为 $O\text{-}xyz$. 习惯上,Ox 轴正向向前,Oy 轴正向向右,Oz 轴正向向上(如图 5.1 所示).

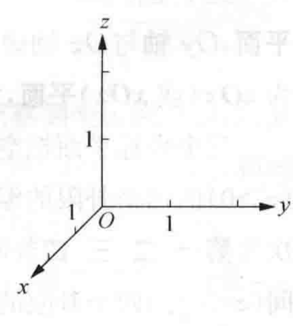

图 5.1

[1] 笛卡尔(Descartes R,1596—1650),法国哲学家、物理学家、数学家、生理学家. 解析几何的创始人.

在空间中建立了直角坐标系 $O\text{-}xyz$ 后，对空间中任意一点 P，过 P 分别作垂直于坐标轴 Ox，Oy，Oz 的平面，它们与坐标轴的交点依次记为 A，B，C. 设点 A 在 Ox 轴上的坐标是 x，点 B 在 Oy 轴上的坐标是 y，点 C 在 Oz 轴上的坐标是 z，则给定空间一点 P，就可以确定一个有序三元数组 (x,y,z)；反过来，任给一个有序三元数组 (x,y,z)，过 Ox 轴上坐标为 x 的点作垂直于 Ox 轴的平面，过 Oy 轴上坐标为 y 的点作垂直于 Oy 轴的平面，过 Oz 轴上坐标为 z 的点作垂直于 Oz 轴的平面，这三个平面有唯一交点 P. 这样空间中的点 P 就与一个有序三元数组 (x,y,z) 建立了一一对应关系，我们称有序三元数组 (x,y,z) 为点 P 的**坐标**(如图 5.2 所示).

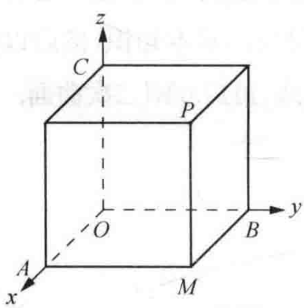

图 5.2

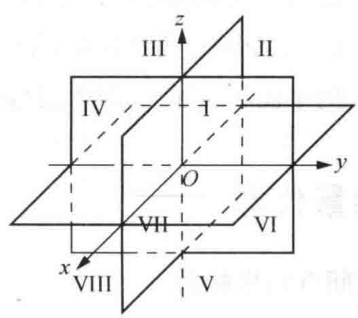

图 5.3

三个坐标轴两两可以确定一个平面，Ox 轴与 Oy 轴确定的平面称为 ***xOy* 平面**，Oy 轴与 Oz 轴确定的平面称为 ***yOz* 平面**，Oz 轴与 Ox 轴确定的平面称为 ***zOx*(或 *xOz*)平面**，它们统称为**坐标平面**.

三个坐标平面把空间分成八个区域，每个区域称为一个**卦限**，在上半空间 $(z>0)$ 的四个卦限的编号按从 Oz 轴正向往 Oz 轴负向看去依逆时针方向顺次为**第一、二、三、四卦限**(其中第一卦限中点的坐标分量都大于 0)，在下半空间 $(z<0)$ 的四个卦限的编号按从 Oz 轴负向往 Oz 轴正向看去依顺时针方向顺次为**第五、六、七、八卦限**(其中第五卦限中点的坐标分量的符号是 $(+,+,-)$)(如图 5.3 所示).

原点坐标为 $(0,0,0)$，Ox 轴上点的坐标是 $(x,0,0)$，Oy 轴上点的坐标是

$(0,y,0)$，Oz 轴上点的坐标是 $(0,0,z)$；xOy 平面上点的坐标是 $(x,y,0)$，yOz 平面上点的坐标是 $(0,y,z)$，xOz 平面上点的坐标是 $(x,0,z)$.

5.1.2　向量的基本概念

1. 向量的定义

人们把既有大小又有方向的量称为**向量**. 通常用起点为 M，终点为 N 的有向线段 $\overrightarrow{MN}$ 来表示向量，有向线段 $\overrightarrow{MN}$ 的长度表示向量的大小，记作 $|\overrightarrow{MN}|$，称为向量的**模**. 有向线段从起点到终点的指向表示向量的方向. 特别地，模为 0 的向量称为**零向量**，零向量没有确定的方向，记为 $\mathbf{0}$. 模为 1 的向量称为**单位向量**. 除用有向线段表示向量外，也常用单个黑体小字英文字母如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 等来表示向量.

在实际问题中，有些向量与起点有关(如运动的质点在某一点的速度)，而另一些向量与起点无关. 由于一切向量的共性是它们都有大小和方向，故在数学上我们只研究与起点无关的向量，并称这种向量为**自由向量**.

2. 向量的相等和平行

如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 大小相等，方向相同，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 相等，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或者相反，则称这两个向量**平行**(或**共线**)，记为 $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$.

约定零向量与任何向量平行.

3. 向量的坐标表示

在空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$ 中，若把向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点移到坐标原点 O，终点移到点 P，使得 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}$，称 $\overrightarrow{OP}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**向径**. 因点 P 的坐标 (a_1,a_2,a_3) 和向量 $\overrightarrow{OP}$ 一一对应，因此我们也常用点 P 的坐标来表示向量 $\boldsymbol{a}$，记为 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**坐标表示**，并称 a_1,a_2,a_3 分别为**第 1，第 2 与第 3 分量**，也称为 **x，y 与 z 分量**. $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OP}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的几何表示.

4. 向量的模

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，则 $\boldsymbol{a}$ 的模 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$.

5. 向量的夹角

在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，我们将两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的起点移到坐标原点O，使得$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，定义 $\theta=\angle AOB$ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的**夹角**，记为$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$或$\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle$.

6. 向量的方向角与方向余弦

在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中，设非零向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 与 Ox,Oy,Oz 轴正向的夹角分别为 α,β,γ，称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向角**(如图 5.4 所示)，这里 $0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi$. 由坐标的定义，易知 $\cos\alpha=\dfrac{a_1}{|\boldsymbol{a}|}$，$\cos\beta=\dfrac{a_2}{|\boldsymbol{a}|}$，$\cos\gamma\dfrac{a_3}{|\boldsymbol{a}|}$，我们称 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**. 非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角或者方向余弦完全确定了向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向. 换言之，非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向可用其方向角或者方向余弦唯一确定. 零向量没有确定的方向.

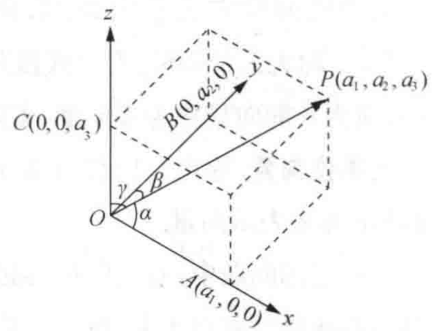

图 5.4

7. 基向量

单位向量 $\boldsymbol{i}=(1,0,0)$，$\boldsymbol{j}=(0,1,0)$，$\boldsymbol{k}=(0,0,1)$称为**基向量**. 与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量记为 $\boldsymbol{a}^\circ$，若设 α,β,γ 为 $\boldsymbol{a}$ 的方向角，则 $\boldsymbol{a}^\circ=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$.

8. 向量在数轴 u 上的射影

过点 M,N 分别作数轴 u 的垂线，垂足分别为 P,Q(分别称为点 M,N 在数轴 u 上的**投影**)，向量$\overrightarrow{PQ}$的数值称为向量$\overrightarrow{MN}$在数轴 u 上的**射影**，记作 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{MN}$(如图 5.5 所示). 设 θ 是向量$\overrightarrow{MN}$与 u 轴正向的夹角，则 $\mathrm{Prj}_u\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MN}\cos\theta$. 定义向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的射影为$|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，记为 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$，即

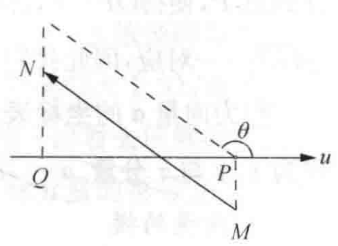

图 5.5

$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$,同理定义向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的射影为 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.

定理 5.1.1(射影定理)　$\mathrm{Prj}_u\,\overrightarrow{A_1A_3}=\mathrm{Prj}_u\,\overrightarrow{A_1A_2}+\mathrm{Prj}_u\,\overrightarrow{A_2A_3}$.

证　设点 A_1,A_2,A_3 在 u 轴上的投影分别为 B_1,B_2,B_3,对于图 5.6 所示情况有 $\mathrm{Prj}_u\,\overrightarrow{A_1A_3}=|B_1B_3|$,$\mathrm{Prj}_u\,\overrightarrow{A_1A_2}=|B_1B_2|$,$\mathrm{Prj}_u\,\overrightarrow{A_2A_3}=-|B_2B_3|$,注意到 $|B_1B_3|=|B_1B_2|-|B_2B_3|$,故有 $\mathrm{Prj}_u\,\overrightarrow{A_1A_3}=\mathrm{Prj}_u\,\overrightarrow{A_1A_2}+\mathrm{Prj}_u\,\overrightarrow{A_2A_3}$.其余情况类似可得.

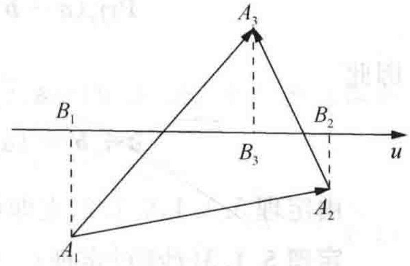

图 5.6

□

5.1.3　向量的线性运算

1. 向量的加法

设向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{A_1A_2}$,$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{A_2A_3}$,定义 $\boldsymbol{a}$ 加 $\boldsymbol{b}$ 为 $\overrightarrow{A_1A_3}$,记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{A_1A_3}$,即向量的加法适合平行四边形法则(如图 5.7 所示)或者三角形法则(如图5.8 所示).

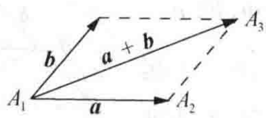

图 5.7

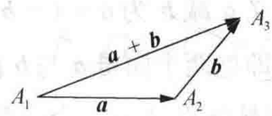

图 5.8

由三角形的性质知,$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$,等号成立当且仅当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同或至少有一个是零向量.

定理 5.1.2　设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$,$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$,则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3).$$

证　由射影定理,有

$$\mathrm{Prj}_x(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_x\boldsymbol{b}=a_1+b_1,$$

同理

$$\mathrm{Prj}_y(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_y\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_y\boldsymbol{b}=a_2+b_2,$$
$$\mathrm{Prj}_z(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\mathrm{Prj}_z\boldsymbol{a}+\mathrm{Prj}_z\boldsymbol{b}=a_3+b_3,$$

因此

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3).$$ □

由定理 5.1.1,5.1.2,立即可得下面的沙勒定理.

定理 5.1.3(沙勒[①]定理) 空间任意三点 A,B,C,都有$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

2. 向量的数乘

设 k 是实数,$\boldsymbol{a}$ 是向量,定义向量的数乘 $k\boldsymbol{a}$ 如下:

(1) 当 $k>0$ 时,$k\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 方向相同,模$|k\boldsymbol{a}|=k|\boldsymbol{a}|$;

(2) 当 $k=0$ 时,$k\boldsymbol{a}$ 为零向量;

(3) 当 $k<0$ 时,$k\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反,模$|k\boldsymbol{a}|=|k||\boldsymbol{a}|$.

设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$,$k\in\mathbb{R}$,则 $k\boldsymbol{a}=(ka_1,ka_2,ka_3)$.

现在我们来定义向量的减法:设向量 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{B_1B_2}$,$\boldsymbol{b}=\overrightarrow{B_1B_3}$,定义 $\boldsymbol{a}$ 减 $\boldsymbol{b}$ 为 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$,记为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{B_3B_2}$,亦即把两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点移到同一个起点,由一个向量终点到另一个向量终点的向量就是这两个向量的差向量,方向指向被减向量. 换言之,向量的减法也适合平行四边形法则或三角形法则(如图 5.9 所示).

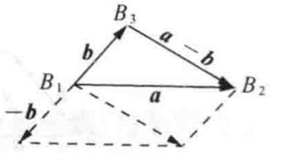

图 5.9

定理 5.1.4 向量的加法和数乘适合下列运算法则

(1) (加法交换律) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) (加法结合律) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;

(3) (加法单位元) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$;

(4) (加法逆元) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$;

① 沙勒(Chasles M,1793—1880),法国数学家.

(5)(数乘单位元) $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$;

(6)(数乘分配律Ⅰ) $k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$;

(7)(数乘分配律Ⅱ) $(k+l)\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{a}$;

(8)(数乘结合律) $k(l\boldsymbol{a})=(kl)\boldsymbol{a}$.

定理 5.1.5　两个非零向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$平行当且仅当它们的坐标对应成比例，即 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 当且仅当

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}. \tag{5.1.1}$$

注　当 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 的某个分量为零时，如 $b_2=0$，则约定 $a_2=0$ 使得(5.1.1)式成立.

例 5.1.1　设 $P(x_1,x_2,x_3)$，$Q(y_1,y_2,y_3)$都是空间的点，则有

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(y_1-x_1,y_2-x_2,y_3-x_3),$$

且

$$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}.$$

证　由沙勒定理，$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$；又因为$\overrightarrow{OP}=(x_1,x_2,x_3)$，$\overrightarrow{OQ}=(y_1,y_2,y_3)$，所以

$$\overrightarrow{PQ}=(y_1-x_1,y_2-x_2,y_3-x_3),$$

且

$$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}.$$ □

例 5.1.2　设 $P(x_1,y_1,z_1)$，$Q(x_2,y_2,z_2)$都是空间的点，$\lambda\in\mathbb{R}$，在直线PQ上求一点M，使得$\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{MQ}$.

解　设 $M(x,y,z)$，则

$$\overrightarrow{PM}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1),\overrightarrow{MQ}=(x_2-x,y_2-y,z_2-z),$$

由题设$\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{MQ}$,有

$$x-x_1=\lambda(x_2-x),y-y_1=\lambda(y_2-y),z-z_1=\lambda(z_2-z),$$

因此M为$\left(\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)$.

特别地,(1) 当$\lambda=1$时,点$M\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2},\dfrac{z_1+z_2}{2}\right)$就是线段$PQ$的中点;

(2) 当$-\infty<\lambda<-1$时,M在PQ的延长线上;

(3) 当$-1<\lambda<0$时,M在PQ的反向延长线上;

(4) 当$\lambda=0$时,$M\equiv P$;

(5) 当$0<\lambda<+\infty$时,M在线段PQ上;

(6) 当$\lambda=\infty$时,$M\equiv Q$. □

例 5.1.3　在平行四边形$ABCD$中,M为其对角线的交点,设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,试用$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$表示向量$\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MD}$.

解　因为平行四边形的对角线互相平分(如图 5.10 所示),所以

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MC},$$

$$-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MD},$$

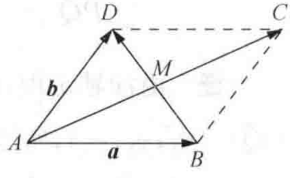

图 5.10

于是

$$\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}),$$

$$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$ □

例 5.1.4　设$\overrightarrow{AB}=(2,2,-1)$,$\overrightarrow{AC}=(2,-1,2)$,求等分角$\angle BAC$的单位向量$\boldsymbol{c}^{\circ}$.

解 $\overrightarrow{AB}^{\circ}=\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{1}{3}(2,2,-1)$，$\overrightarrow{AC}^{\circ}=\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{1}{3}(2,-1,2)$，因此

$$\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AB}^{\circ}+\overrightarrow{AC}^{\circ}=\frac{1}{3}(4,1,1),$$

由此可得$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{2}$，所以$\boldsymbol{c}^{\circ}=\dfrac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}=\dfrac{1}{3\sqrt{2}}(4,1,1)$. □

5.1.4 向量的内积

定义 5.1.1 设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$是两个向量，定义$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的内积为$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，记为$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle.$$

注 向量的内积也称为**数量积**或**点积**.

定理 5.1.6 设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$是三个向量，$\lambda,\mu\in\mathbb{R}$，则

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

(2) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$；

(3) $(\lambda\boldsymbol{a})\cdot(\mu\boldsymbol{b})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；

(4) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2\geqslant 0$，等号成立当且仅当$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

证 仅证明(2)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})&=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\rangle\\&=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\text{（射影的定义）}\\&=|\boldsymbol{a}|(\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}+\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c})\text{（射影定理）}\\&=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c}\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}.\end{aligned}$$

□

定理 5.1.7 设$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

证 记$\boldsymbol{i}=(1,0,0)$，$\boldsymbol{j}=(0,1,0)$，$\boldsymbol{k}=(0,0,1)$，则$\boldsymbol{a}$由下列代数表示：

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}.$$