

刘彦佩选集

(Selected Publications of Y.P.Liu)

第二编

时代文献出版社

刘彦佩选集

(Selected Publications of Y.P.Liu)

第二编



时代文献出版社

刘彦佩选集（第二编）

作 者：刘彦佩

出版单位：时代文献出版社

编辑设计：北京时代弄潮文化发展公司

地 址：北京中关村海淀图书城25号家谱传记楼二层

电 话：010-62525116 13693651386

网 址：www.grcsw.com

印 刷：京冀印刷厂

开 本：880×1230 1/16

版 次：2015年9月第1版

书 号：ISBN 978-988-18772-5-3

定 价：全套 1978.00元（共计23编）

版权所有 翻印必究

第二编 目录

中文文选第6卷	535
2.1 组合最优化中的布尔方法(II) (P.L. Hammer, B. Simeone)	537
2.2 组合最优化中的布尔方法(III) (P.L. Hammer, B. Simeone)	551
2.3 关于无环Euler节点剖分方程	561
2.4 关于图的垂-平可嵌入性的一般理论 结果	565
2.5 有根平面和外平面地图计数的渐近性质(颜基义)	567
2.6 有根平面地图节点剖分计数	571
2.7 图的网格可嵌入性的有效识别	591
2.8 塔特(W.T. Tutte): 生平与成就	594
2.9 四伪币问题(李安平)	615
2.10 关于 3-正则子图的一个注记(于濂)	619
2.11 一个Ringel猜想的证明(欧阳克毅)	622
2.12 图的最大亏格与 2-因子(黄元秋)	623
2.13 图的上可嵌入性(黄元秋)	633
中文文选第7卷	639
2.14 图的上可嵌入性与非邻节点度和(黄元秋)	641
2.15 关于适约三角剖分的计数(任韩)	647
2.16 关于图的最大亏格的一个定理改进(黄元秋)	651
2.17 组合最优化(堵丁柱)	655
2.18 图的直径与 Betti 亏数(黄元秋)	698
2.19 组合泛函方程	703
2.20 图的上可嵌入性的邻域条件(黄元秋)	731
2.21 关于图的平面可嵌入的一个上可嵌入性(黄元秋) ...	735

2.22	关于图的最大亏格的下界(黄元秋)	740
中文文选第8卷		745
2.23	关于点的度在 Modulo 4 下等值的上可嵌入图类 (黄元秋)	747
2.24	乘积图的荫度(魏二玲, 杨爱民, 康利)	752
2.25	至多有两个无公共边圈的有根平面地图计数 (李赵祥)	757
2.26	平面性理论与布线自动化	765
2.27	关于 (ξ, k) -临界图(黄元秋)	792
2.28	哈密尔顿图的一类新的局部化充分条件(毛林繁)	798
2.29	关于图的单圈划分(傅超)	803
2.30	在亏格为 3 的不可定向曲面上的着色定理 (郝荣霞, 邓福芝)	808
2.31	近三正则 3-连通平面地图的计数(蔡俊亮)	810
2.32	关于直径为 4 图的最大亏格(黄元秋)	817
2.33	图的最大亏格与双重图上的 Euler 闭迹(黄元秋)	823
2.34	在 VLSI 布局中的布尔方法	828
2.35	类路树的标号与带宽(薛春玲)	835
2.36	组合学中的一些泛函方程	841
中文文选第9卷		852
2.37	路状网络的最优连接及最优定位问题(于紫薇)	854
2.38	强连通弧对称有向图的超弧连通性(薛春玲)	860
2.39	一类 4-正则图的最小折数纵横扩张(傅超)	864
2.40	格子状网络的最优连接及最优定位问题(于紫薇)	869
2.41	图的最大亏格与图的着色数(黄元秋)	873
2.42	图的 k -单圈划分中的优化问题(傅超)	882
2.43	一类图的序列性及其序列标号(贺丹)	888
2.44	组合泛函方程的新进展	893
2.45	问题与进展(I)-数多面形	897
2.46	一类图的强最大亏格嵌入(魏二玲)	904
2.47	组合学	907
2.48	图论	909
2.49	序, SPT 高等院校选用教材	911
2.50	完全二部图的少面数强嵌入(魏二玲)	913
2.51	图的曲面嵌入I	918
2.52	关于 4-连通三角剖分的计数(蔡俊亮)	923
2.53	图的曲面嵌入II	929

2.54	图的可定向嵌入的标根可数性(毛林繁)	934
2.55	一般平面地图依点和面数的计数(I) (蔡俊亮, 高存良)	941
2.56	一般平面地图依点和面数的计数(II) (蔡俊亮, 王文福)	946
2.57	关于图的上可嵌入性的一个新的临域条件 (何卫力)	950
2.58	带根 2-连通 3-正则平面地图计数方程 (蔡俊亮, 徐永华)	955
中文文选第10卷		958
2.59	纵横扩张的优化(万良霞)	960
2.60	树积序列性及序列标号(贺丹)	967
2.61	从嵌入到地图	971
2.62	平面上一般地图的色和与双色和(李赵祥)	976
2.63	关于图的最大亏格的约与不可约性(黄元秋)	984
2.64	类树图的亏格多项式问题(赵喜梅)	991
2.65	关于平面上双树梵和的一个注记(郝荣霞, 何卫力)	996
2.66	根瓣丛的普查	1002
2.67	一般根地图的普查	1008
2.68	一类直径为 3 的 2-连通图的最大亏格(王惠艳)	1016
2.69	不可定向地图组合分类	1020
2.70	一类三正则图的嵌入亏格分布(李立峰)	1027
2.71	组合地图的同构	1031
2.72	组合地图的对称普查	1038
2.73	双向 2-重迹与图的最大亏格(黄元秋, 褚玉明)	1042
2.74	组合地图的不对称化	1049
2.75	关于平面树色和方程结果的一个注记(郝荣霞)	1056

刘彦佩
中文文选
第六卷

北京交通大学
2014

目 录

54[93]	组合最优化中的布尔方法(II)	516
55[94]	组合最优化中的布尔方法(III)	530
56[98]	关于无环Euler节点剖分方程	540
57[100]	关于图的垂-平可嵌入性的一般理论 结果	544
58[101]	有根平面和外平面地图计数的渐近性质	546
59[114]	有根平面地图节点剖分计数	550
60[129]	图的网格可嵌入性的有效识别	570
61[136]	塔特(W.T.Tutte):生平与成就	573
62[140]	四伪币问题	594
63[143]	关于 3-正则子图的一个注记	598
64[147]	一个Ringel猜想的证明	601
65[159]	图的最大亏格与2-因子	602
66[169]	图的上可嵌入性	612

组合最优化中的布尔方法(续一)

彼得·哈默 刘彦佩 布鲁诺·席莫昂

§ 7 对偶性

我们还是先从如下的一般拟布尔最优化问题——称之为原问题——开始:

$$z = \max_{x \in B^n} f(x). \quad (7.1)$$

任一线性拟布尔函数 $t(x) = a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n$, 如果对于任何 $x \in B^n$ 均有 $t(x) \geq f(x)$, 则称 $t(x)$ 为 $f(x)$ 的一个上平面. 若用 $t(x)$ 代替 (7.1), 则得

$$\max_{x \in B^n} t(x). \quad (7.2)$$

称这个问题为 (7.1) 的线性松弛. 当然, (7.2) 的最优值提供了 (7.1) 的一个上界.

令 $\mathcal{T}$ 为 $f(x)$ 的所有上平面组成的集合. 我们的兴趣在于找 $f(x)$ 的这样的一个上平面 $t_0(x)$ 使得 (7.2) 的最优值与 (7.1) 的最优值最接近. 于是, 导致确定

$$w = \min_{t \in \mathcal{T}} \max_{x \in B^n} t(x) \quad (7.3)$$

称 (7.3) 为 (7.1) 的平面对偶.

如果一个上平面 t^* 使得 $\max_{x \in B^n} t^*(x) = w$, 则称 t^* 是最好的. 一般情况下, 总有 $w \geq z$. 差 $w - z$ 被称为对于 $\mathcal{T}$ 的平面对偶亏空. 如果对于任何 $x \in B^n$, 都有 $f(x) = \min_{t \in \mathcal{T}} t(x)$, 则称 $\mathcal{T}$ 是完备的. 对于完备的 $\mathcal{T}$, 总有

$$w = \min_{t \in \mathcal{T}} \max_{x \in B^n} t(x) = \max_{x \in B^n} \min_{t \in \mathcal{T}} t(x) = z. \quad (7.4)$$

现在, 回到二次的情形,

$$f(x) = x^T Qx = \sum_{i < j} q_{ij} x_i x_j. \quad (7.5)$$

对于每一项 $q_{ij} x_i x_j$, 引进一个局部平面,

$$r_{ij}(x_i, x_j) = a_{ij}x_i + b_{ij}x_j + c_{ij}. \quad (7.6)$$

而且, 可以看出, $r_{ij}(x_i, x_j)$ 是 $q_{ij}x_i x_j$ 的一个上平面, 当且仅当

$$c_{ij} \geq 0, a_{ij} + c_{ij} \geq 0, b_{ij} + c_{ij} \geq 0, a_{ij} + b_{ij} + c_{ij} \geq q_{ij}. \quad (7.7)$$

这时, 称它为 $f(x)$ 的局部上平面.

进而, (7.7) 等价于

$$r_{ij}(x_i, x_j) = \begin{cases} \lambda_{ij}x_i + (q_{ij} - \lambda_{ij})x_j, & q_{ij} > 0; \\ \lambda_{ij}(1 - x_i - x_j), & q_{ij} < 0. \end{cases}$$

其中, $0 < \lambda_{ij} < |q_{ij}|, 1 \leq i, j \leq n.$

记 $P = \{(i, j) | q_{ij} > 0, 1 \leq i, j \leq n\}$ 和 $N = \{(i, j) | q_{ij} < 0, 1 \leq i, j \leq n\}$. 对于任意 $0 < \lambda_{ij} < |q_{ij}|, (i, j) \in P \cup N$, 上平面

$$r(x, \lambda) = \sum_{(i, j) \in P} (\lambda_{ij} x_i + (q_{ij} - \lambda_{ij}) x_j) + \sum_{(i, j) \in N} \lambda_{ij} (1 - x_i - x_j)$$

被称为 $f(x)$ 的天篷. 合并同类项之后,

$$r(x, \lambda) = a_0(\lambda) + a_1(\lambda) x_1 + \cdots + a_n(\lambda) x_n \quad (7.8)$$

其中,

$$\left. \begin{aligned} a_0(\lambda) &= \sum_{(i, j) \in N} \lambda_{ij}; \\ a_i(\lambda) &= q_{ii} + \sum_{(j, i) \in P} q_{ji} + \sum_{(i, j) \in P} \lambda_{ij} \\ &\quad - \sum_{(j, i) \in P} \lambda_{ji} - \sum_{(i, j) \in N} \lambda_{ij} - \sum_{(j, i) \in N} \lambda_{ji}, \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

$1 \leq i \leq n.$

令 $\mathcal{A}$ 为 $f(\lambda)$ 的所有天篷的集合. 这时, 确有如下的美妙结果.

定理 7.1 $\mathcal{A}$ 是完备的.

证明 容易看出, 对于 f 的任一项 $q_{ij} x_i x_j$, 总有 $\lambda^*, 0 < \lambda_{ij}^* < |q_{ij}|, i < j$, 使得

$$q_{ij} x_i x_j = \begin{cases} \lambda_{ij}^* x_i + (q_{ij} - \lambda_{ij}^*) x_j, & (i, j) \in P; \\ \lambda_{ij}^* (1 - x_i - x_j), & (i, j) \in N. \end{cases}$$

实际上, $\lambda_{ij}^* = |q_{ij}| x_j$.

当 f 为二次拟布尔函数, 对于 $\mathcal{A}$ 的为 (7.4) 所定义的平面对偶被称为天篷对偶. 可见天篷对偶的最优值是原问题的最优值的一个好的上界.

从 § 4 中所讨论的可知, 对于任何一个拟布尔函数 f 总存在一个常数 c_0 和一个正形式的拟布尔函数 $\psi(x)$ 使得

$$f(x) + \psi(x) = c_0. \quad (7.10)$$

可见, c_0 是 $z = \max_{x \in B^n} f$ 的一个上界. 而且, $c_0 = z$, 当且仅当 $\psi(x)$ 的布尔支架 $\tilde{\psi}(x) = 0$ 是相

容的. 我们也称使得 $\tilde{\psi} = 0$ 的 x 为它的根. 如果 $f(x)$ 是二次的, 可惜的是不能保证总有一个二次正形式 ψ , 使得 $\tilde{\psi}$ 有根. 当然, 如果有这样的 ψ , 那么, 确定 $f(x)$ 的最小值问题就属于 $\mathcal{P}$ 了. 因为前面已经揭示 (§ 3) 求一个二次布尔方程的解的问题为 P—问题. 即属于 $\mathcal{P}$. 至于如何判别一个二次拟布尔函数具有一个二次正形式, 使得它的布尔支架有根以及这种判别是否有效, 确是值得进一步研究的. 不过, 我们总可提出这样的问题: 在 $f(x)$ 的所有二次正形式中使得满足 (7.10) 的最小的 c_0 是多少? 这个最小的 c_0 就称为 f 的高度, 用 $H(f)$ 表之. 自然, $H(f) \geq z$. 因此, 高度提供了 $\max_{x \in B^n} f(x)$ 的又一个上界.

一个拟布尔函数 $g(x)$ 称为正的, 如果存在一个正形式 ψ 使得对于任何 $x \in B^n, g(x) = \psi(x)$. 进而, 若 ψ 是二次的, 则称 g 为二次的正函数.

对于一个给定的二次拟布尔函数 f , 那个唯一的使得对于任何 $x \in B^n$,

$$f(x) + f^*(x) = H(f) \quad (7.11)$$

的二次正函数 f^* 被称为 f 的补. 一个二次正函数 g , 如果不再存在另一个二次正函数 g' 和一

个常数 $k > 0$ 使得 $g = k + g'$, 则称 g 是一个平台.

引理7.1 任何二次布尔函数 f 的补 f^* 都是平台.

证明 否则, 若有 f' 和 $k > 0$ 使得 $f^* = f' + k$, 则 $f + f' = H(f) - k$. 与 $H(f)$ 为 f 的高度矛盾. ■

定理7.2 对于任何二次正函数 g , 有 $g^{**} \leq g$. 且, 取等式, 当且仅当 g 是一个平台.

证明 由于 $g + g^* = H(g)$ 和 $g^* + g^{**} = H(g^*)$, 有 $H(g) = g^* + g \geq H(g^*)$. 又, $g = g^{**} + k$, $k = H(g) - H(g^*) > 0$. 即, $g^{**} < g$.

进而, 若 g 是一个平台, 则 $k = 0$. 从而, $g^{**} = g^*$. 反之, 若 $g^{**} = g$, 则 g 是 g^* 的补. 由引理7.1, g 必为一个平台. ■

由这个定理就保证了: 对于任一次二次拟布尔函数 f , 虽然一般而论, $f^{**} \neq f$. 但, 总有 $f^{***} = f^*$.

§ 8 线性化

这里, 也是为了确定二次拟布尔函数最大值的上界. 原始思想来自 Rhys^[34]. 对于 $f(x)$ 中的一项 $q_{ij}x_ix_j$, 如果 $(i, j) \in N$ 则用 $q_{ij}x_j - q_{ij}\bar{x}_ix_j$ 代替. 从而, 可将形如 (5.2) 的 f 变为

$$f(x) = \sum_{(i,j) \in P} q_{ij}x_ix_j - \sum_{(i,j) \in N} q_{ij}\bar{x}_ix_j + \sum_{i=1}^n (q_{ii} + \sum_{(j,i) \in N} q_{ji})x_i \quad (8.1)$$

然后, 引进新的 0—1 变量 $y_{ij} = \hat{x}_i\hat{x}_j$ 并加约束条件可将 (5.1) 化为如下形式的 0—1 规划:

$$\max(\sum_{(i,j) \in P} q_{ij}y_{ij} - \sum_{(i,j) \in N} q_{ij}y_{ij} + \sum_{i=1}^n (q_{ii} + \sum_{(j,i) \in N} q_{ji})x_i) \quad (8.2)$$

且满足条件:

$$\begin{cases} y_{ij} < x_i, & y_{ij} < x_j, & (i, j) \in P; \end{cases} \quad (8.3)$$

$$\begin{cases} y_{ij} < 1 - x_i, & y_{ij} < x_j, & (i, j) \in N; \end{cases} \quad (8.4)$$

$$\begin{cases} x_i, y_{ij} \in B, & 1 \leq i \leq n, & (i, j) \in P \cup N. \end{cases} \quad (8.5)$$

容易证明, 它与原问题 (5.1) 是等价的. 这个 0—1 规划形式被称为离散的 Rhys 形式. 或简记 drf.

Rhys 已经证明: 当 $N = \emptyset$ 时, 约束 (8.5) 可以用

$$0 < x_i < 1, y_{ij} > 0 \quad (8.6)$$

所代替. 因为这时约束的系数矩阵是全单位模的. 当然, 在 (8.6) 中, $y_{ij} > 0$ 可以不考虑. 这就变成了一般的线性规划问题. 自然, 属于 $\emptyset$. 因此, 我们只需研究 $N \neq \emptyset$ 的情形, 由 (8.2) 和约束 (8.3), (8.4) 以及 (8.6) 所描述的线性规划问题也是原问题 (5.1) 和 (5.2) 的一种线性松弛. 这时的线性规划模型被称为连续 Rhys 形式. 或简记 crf. 当然, 也易验证, 总有 $z_{crf} \geq z$. 其中, z_{crf} 表示 crf 的最优值.

由于在确定 (8.1) 时, 引进那些变量的补有任意性. 例如

$$-x_ix_j = -x_j + \bar{x}_ix_j = -x_i + x_i\bar{x}_j = \frac{1}{2}(-x_i - x_j + \bar{x}_ix_j + x_i\bar{x}_j)$$

也许选择的好, 可将 f 直接转化为所有二次项的系数皆正的情况. 不过, 下面的定理 8.2 却指出了所有这些依引进变量补的不同方式所建立的线性规划实际上全是一样的. 证明这个定理的关键在于下面的表示定理.

定理8.1 令 $f(x)$ 如(5.2)所示. ψ 是它的一个齐次的二次正规正形式. $l(x)$ 为一个线性函数. 则, 对于所有的 $x \in B^n$,

$$f(x) = \psi(x, \bar{x}) + l(x), \quad (8.7)$$

当且仅当存在 $\lambda_{ij}, w_{ij}, (i, j) \in P \cup N$, 使得

$$\psi(x, \bar{x}) = \sum_{(i,j) \in P} (\lambda_{ij} x_i x_j + w_{ij} \bar{x}_i \bar{x}_j) + \sum_{(i,j) \in N} (\lambda_{ij} \bar{x}_i x_j + w_{ij} x_i \bar{x}_j); \quad (8.8)$$

$$l(x) = l_0 + \sum_{i=1}^n l_i x_i. \quad (8.9)$$

其中,

$$\lambda_{ij} \geq 0, w_{ij} \geq 0, \lambda_{ij} + w_{ij} = |q_{ij}|, (i, j) \in P \cup N; \quad (8.10)$$

$$\left. \begin{aligned} l_0 &= - \sum_{(i,j) \in P} w_{ij}, \\ l_i &= q_{ii} + \sum_{(j,i) \in P} w_{ji} + \sum_{(i,j) \in P} w_{ij} \\ &\quad - \sum_{(j,i) \in N} \lambda_{ji} - \sum_{(i,j) \in N} w_{ij}, \end{aligned} \right\} \quad (8.11)$$

$i = 1, 2, \dots, n$.

证明 充分性. 只要将(8.8—11)代入(8.7) 经过整理和化简即可得.

必要性. 设(8.7)中的 $\psi(x, \bar{x})$ 具有如下形式:

$$\psi(x, \bar{x}) = \sum_{(i,j)} (a_{ij} x_i x_j + b_{ij} \bar{x}_i \bar{x}_j + c_{ij} \bar{x}_i x_j + d_{ij} x_i \bar{x}_j). \quad (8.12)$$

其中 $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij} \geq 0$. 由正规性, $(i, j), i < j$, 可以剖分为三个部分

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(i, j) | a_{ij} + b_{ij} > 0, c_{ij} = d_{ij} = 0\}; \\ S_2 &= \{(i, j) | c_{ij} + d_{ij} > 0, a_{ij} = b_{ij} = 0\}; \\ S_3 &= \{(i, j) | a_{ij} = b_{ij} = c_{ij} = d_{ij} = 0\}. \end{aligned}$$

从而, 将 $\bar{x}_i$ 用 $1 - x_i$ 代替, $i = 1, 2, \dots, n$, 之后, $f(x) - \psi(x, \bar{x})$ 之二次项部分变为

$$\sum_{(i,j) \in S_1} (q_{ij} - a_{ij} - b_{ij}) x_i x_j + \sum_{(i,j) \in S_2} (q_{ij} + c_{ij} + d_{ij}) x_i x_j \quad (8.13)$$

由无补变量出现的拟布尔函数的多项式表示式的唯一性可得: 对于 $(i, j) \in S_1, q_{ij} - a_{ij} - b_{ij} = 0$, 和对于 $(i, j) \in S_2, q_{ij} + c_{ij} + d_{ij} = 0$. 由 a_{ij}, b_{ij} , 和 c_{ij} 和 d_{ij} 的非负性, 有 $S_1 = P, S_2 = N$. 从而, (8.8) 和(8.10)满足. 而且,

$$\begin{aligned} l(x) &= l_0 + \sum_{i=1}^n l_i x_i = f(x) - \psi(x, \bar{x}) \\ &= \sum_{i=1}^n q_{ii} x_i + \sum_{(i,j) \in P} q_{ij} x_i x_j - \sum_{(i,j) \in P} \lambda_{ij} x_i x_j - \sum_{(i,j) \in P} w_{ij} (x_i x_j - x_i - x_j + 1) \\ &\quad + \sum_{(i,j) \in N} q_{ij} x_i x_j + \sum_{(i,j) \in N} \lambda_{ij} (x_j - x_i x_j) - \sum_{(i,j) \in N} w_{ij} (x_i - x_i x_j). \end{aligned}$$

由(8.10), 消去其中所有二次项. 经比较系数即可得(8.11). ■

现在, 我们可以用 f 的由定理8.1所给出的一般形式相应地得到 crf 的一般形式:

$$z_{\text{grf}} = \max \sum_{(i,j) \in P \cup N} (\lambda_{ij} y_{ij} + w_{ij} z_{ij}) + \sum_{i=1}^n l_i x_i + l_0 \quad (8.14)$$

且满足条件:

$$y_{ij} < x_i, y_{ij} < x_j, z_{ij} < 1 - x_i, z_{ij} < 1 - x_j, (i, j) \in P; \quad (8.15)$$

$$y_{ij} < 1 - x_i, y_{ij} < x_j, z_{ij} < x_i, z_{ij} < 1 - x_j, (i, j) \in N; \quad (8.16)$$

$$0 < x_i < 1, 1 < i \leq n, y_{ij} > 0, z_{ij} > 0, (i, j) \in P \cup N. \quad (8.17)$$

由(8.14—8.17)所确定的最优化问题被称为一般连续Rhys形式. 或简记 gcrf, 当所有 $z_{ij} = 0$, 就变成了 crf.

定理8.2 $z_{\text{crf}} = z_{\text{gcrf}}$.

证明 首先, 若线性规划(8.14—17)有一个最优解 (x^*, y^*, z^*) 使得

$$y_{ij}^* = \min\{x_i^*, x_j^*\}, \quad z_{ij}^* = \min\{1 - x_i^*, 1 - x_j^*\}, \quad (i, j) \in P;$$

$$y_{ij}^* = \min\{1 - x_i^*, x_j^*\}, \quad z_{ij}^* = \min\{x_i^*, 1 - x_j^*\}, \quad (i, j) \in N.$$

且, 记 $U^n = [0, 1]^n$ 为 n -维单位立方体. 则有

$$\begin{aligned} z_{\text{gcrf}} = \max_{x \in U^n} & \left\{ \sum_{(i,j) \in P} \lambda_{ij} \min\{x_i, x_j\} + \sum_{(i,j) \in P} w_{ij} \min\{1 - x_i, 1 - x_j\} \right. \\ & + \sum_{(i,j) \in N} \lambda_{ij} \min\{1 - x_i, x_j\} + \sum_{(i,j) \in N} w_{ij} \min\{x_i, 1 - x_j\} \\ & \left. + \sum_{i=1}^n (q_{ii} + \sum_{(i,j) \in P} w_{ij} + \sum_{(j,i) \in P} w_{ji} - \sum_{(j,i) \in N} \lambda_{ji} - \sum_{(i,j) \in N} w_{ij}) x_i - \sum_{(i,j) \in P} w_{ij} \right\}. \end{aligned} \quad (8.18)$$

而, 对于 crf, 有

$$\begin{aligned} z_{\text{crf}} = \max_{x \in U^n} & \left\{ \sum_{(i,j) \in P} q_{ij} \min\{x_i, x_j\} \right. \\ & \left. - \sum_{(i,j) \in N} q_{ij} \min\{1 - x_i, x_j\} + \sum_{i=1}^n (q_{ii} + \sum_{(i,j) \in N} q_{ij}) x_i \right\}. \end{aligned} \quad (8.19)$$

不管怎样, 对于所有 $x \in U^n$, $(i, j) \in P$, 有

$$\begin{aligned} & \lambda_{ij} \min\{x_i, x_j\} + w_{ij} \min\{1 - x_i, 1 - x_j\} + w_{ij} x_j + w_{ij} x_i - w_{ij} \\ & = \lambda_{ij} \min\{x_i, x_j\} + w_{ij} (1 - \max\{x_i, x_j\}) + w_{ij} x_j + w_{ij} x_i - w_{ij} \\ & = \lambda_{ij} \min\{x_i, x_j\} + w_{ij} (x_i + x_j - \max\{x_i, x_j\}) \\ & = \lambda_{ij} \min\{x_i, x_j\} + w_{ij} \min\{x_i, x_j\}, \end{aligned}$$

由于(8.10)中的 $\lambda_{ij} + w_{ij} = q_{ij}$,

$$= q_{ij} \min\{x_i, x_j\}. \quad (8.20)$$

相仿地, 对于所有 $x \in U^n$ 和 $(i, j) \in N$, 有

$$\lambda_{ij} \min\{1 - x_i, x_j\} + w_{ij} \min\{x_i, 1 - x_j\} - \lambda_{ij} x_j - w_{ij} x_i$$

由(8.10)中的 $\lambda_{ij} + w_{ij} = -q_{ij}$,

$$\begin{aligned} & = \lambda_{ij} \min\{1 - x_i, x_j\} + w_{ij} (1 - \max\{1 - x_i, x_j\}) \\ & \quad + q_{ij} x_j + w_{ij} x_j + w_{ij} (1 - x_i) - w_{ij} \\ & = \lambda_{ij} \min\{1 - x_i, x_j\} + w_{ij} (1 - x_i + x_j - \max\{1 - x_i, x_j\}) + q_{ij} x_j \\ & = \lambda_{ij} \min\{1 - x_i, x_j\} + w_{ij} \min\{1 - x_i, x_j\} + q_{ij} x_j, \end{aligned}$$

再由(8.10)中的 $\lambda_{ij} + w_{ij} = -q_{ij}$,

$$= -q_{ij} \min\{1 - x_i, x_j\} + q_{ij} x_j. \quad (8.21)$$

将(8.20)和(8.21)分别对 $(i, j) \in P$ 和 $(i, j) \in N$ 求和. 然后, 比较(8.18)和(8.19), 即可得定理. ■

§ 9 等 价 性

本节的目的在于表明前二节所建立的三种不同类型确定原始最优化问题 (5.1) 和 (5.2) 的最优值上界的方法是等价的. 设 w_R 为天篷对偶的最优值, $H(f)$ 为 f 的高度. 和 z_{crl} 为连续 Rhys 形式 crl 的最优值. 则, 这里将论证: 对于二次拟布尔函数 f , 有

$$w_R = H(f) = z_{\text{crl}}. \quad (9.1)$$

首先, 研究第一个等式. 令 ψ 是 f 的一个二次正形式使得 $f + \psi = c_0$, c_0 是某常数, 记

$$\psi(x, \bar{x}) = \psi_0 + \psi_l(x, \bar{x}) + \psi_q(x, \bar{x}). \quad (9.2)$$

其中, ψ_0 为常数, ψ_l 为所有一次项之和, ψ_q 为所有二次项之和. 而且, 所有二次项的系数全为正. 从而,

$$f(x) + \psi_q(x, \bar{x}) = c_0 - \psi_0 - \psi_l(x, \bar{x}). \quad (9.3)$$

可见, (9.3) 式右边是 $f(x)$ 的一个上平面.

对于 f 的一个上平面 $p(x)$, 如果存在一个齐次二次正规形式 ψ_q 使得

$$f(x) + \psi_q(x, \bar{x}) = p(x), \quad x \in B^n, \quad (9.4)$$

则称 f 有一个二次剩余.

引理 9.1 令 $\lambda = (\lambda_{ij})$ 使得 $0 < \lambda_{ij} < |q_{ij}|$, $(i, j) \in P \cup N$. 和

$$Q(x, \lambda) = \sum_{(i, j) \in P} (\lambda_{ij} x_i \bar{x}_j + (q_{ij} - \lambda_{ij}) \bar{x}_i x_j) + \sum_{(i, j) \in N} (\lambda_{ij} \bar{x}_i \bar{x}_j - (q_{ij} + \lambda_{ij}) x_i x_j). \quad (9.5)$$

则 $Q(x, \lambda)$ 是 f 的一个二次剩余, 并且 f 的所有二次剩余都具有这一形式.

证明 定理 8.1 的一个直接结果. ■

引理 9.2 二次函数 f 的一个上平面是天篷, 当且仅当它有一个二次剩余. 进而, 对 f 的一个由 (7.9) 给出的天篷, 其二次剩余由 (9.5) 给出. 其中二式中之参数 λ_{ij} 是相同的; 反之, 亦然.

证明 设 $r(x, \lambda)$ 为由 (7.9) 所给出的一个天篷. 并注意到: 对于任何 $(i, j) \in P$, 有

$$\lambda_{ij} x_i + (q_{ij} - \lambda_{ij}) x_i - q_{ij} x_i x_j = \lambda_{ij} x_i \bar{x}_j + (q_{ij} - \lambda_{ij}) \bar{x}_i x_j.$$

和对于任何 $(i, j) \in N$, 有

$$\lambda_{ij} (1 - x_i - x_j) - q_{ij} x_i x_j = \lambda_{ij} \bar{x}_i \bar{x}_j - (q_{ij} + \lambda_{ij}) x_i x_j.$$

然后, 分别将它们在 P 和 N 上求和. 即得

$$r(x, \lambda) - f(x) = Q(x, \lambda).$$

因此, f 有一个二次剩余.

反之, 若 $r(x)$ 为 f 的任一上平面并有二次剩余 $Q(x, \lambda)$ 如 (9.5) 所示, 则在 $f(x) + Q(x, \lambda) = r(x)$ 的左边所有的 $\bar{x}_i$ 均用 $1 - x_i$ 代替, $i = 1, 2, \dots, n$, 即可得到 $r(x)$ 恰是由 (7.9) 所给出的天篷. ■

定理 9.1 $w_R = H(f)$.

证明 令 $r(x) = a_0 + a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ 是 f 的一个天篷. 由引理 9.2, f 有一个二次剩余 Q 使得

$$f + Q = r. \quad (9.6)$$

另一方面, 令

$$\left. \begin{aligned} L(x, \bar{x}) &= \sum_{j=1}^n a_j^+ \bar{x}_j - \sum_{j=1}^n a_j^- x_j \\ c &= a_0 + \sum_{j=1}^n a_j^+ \end{aligned} \right\} \quad (9.7)$$

其中, $a^+ = \max\{0, a\}$, $a^- = \min\{0, a\}$. 可见, L 是一个线性的正形式. 并且, 有

$$r + L = c. \quad (9.8)$$

将 (9.6) 与 (9.7) 相加, 即得

$$f + h = c, \quad h = Q + L.$$

由于 h 是一个二次正函数, 则 $c \geq H(f)$. 然而, 由 (9.7), $\max_{x \in B^*} r(x) = c$. 故, $w_R \geq H(f)$.

下面, 证相反的不等式. 由于 f 有一个补 f^* 使得

$$f + f^* = H(f). \quad (9.9)$$

又, f^* 是一个二次正形式. 从而, 有一个二次正规正形式 $\psi = f^*$. 注意到由引理 7.1, f^* 是一个平台. 则 ψ 是齐次的. 用 Q 与 L 分别表示 ψ 的二次项的和与一次项的和. 故,

$$f^* = Q + L. \quad (9.10)$$

若记

$$r(x) = H(f) - L(x, \bar{x}), \quad (9.11)$$

则由 (9.9), (9.10) 和 (9.11) 可得

$$f + Q = r. \quad (9.12)$$

这就是说, f 有一个二次剩余.

又, 由引理 9.2, r 是一个天篷. 而且, 由 (9.11), 有 $\max_{x \in B^*} r(x) = H(f)$. 从而, $w_R \leq H(f)$. ■

下面, 我们证明 (9.1) 的后一个等式.

引理 9.3 天篷对偶可表示为一个特殊的线性规划.

证明 令 $\Delta = \{\lambda = (\lambda_{ij}) | 0 \leq \lambda_{ij} \leq |q_{ij}|, (i, j) \in P \cup N\}$. 由 (7.4) 和 (7.9), 有

$$\begin{aligned} w_R &= \min_{\lambda \in \Delta} \max_{x \in B^*} t(x, \lambda) \\ &= \min_{\lambda \in \Delta} \max_{x \in B^*} \{a_0(\lambda) + a_1(\lambda)x_1 + \cdots + a_n(\lambda)x_n\} \\ &= \min_{\lambda \in \Delta} \{a_0(\lambda) + a_1^+(\lambda) + \cdots + a_n^+(\lambda)\}. \end{aligned} \quad (9.13)$$

这里, 如前一样 $a^+ = \max\{0, a\}$. 故,

$$w_R = \min(a_0(\lambda) + \sum_{i=1}^n u_i). \quad (9.14)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i \geq a_i(\lambda) \\ u_i \geq 0 \\ 0 \leq \lambda_{ij} \leq |q_{ij}|, (i, j) \in P \cup N. \end{array} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

实际上, 这是一个双向流问题 (bidirected flow problem)^[27]. 其中, $a_0(\lambda)$, $a_i(\lambda)$ 如 (7.9)

所示.

定理9.2 $H(f) = z_{\text{crf}}$

证明 若引进亏变量 $\mu_{ij} = |q_{ij}| - \lambda_{ij}$, 则天篷对偶可以写成如下的对称形式:

$$\min \sum_{i=1}^n u_i + \sum_{(i,j) \in N} \lambda_{ij} \quad (9.15)$$

且满足:

$$u_i - \sum_{(i,j) \in P} \lambda_{ij} - \sum_{(j,i) \in P} \mu_{ji} + \sum_{(i,j) \in N} \lambda_{ij} - \sum_{(j,i) \in N} \mu_{ji} > q_{ii} + \sum_{(j,i) \in N} q_{ji}, \quad 1 \leq i \leq n; \quad (9.16)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_{ij} + \mu_{ij} = |q_{ij}|, \\ \lambda_{ij}, \mu_{ij} \geq 0 \end{array} \right\} (i, j) \in P \cup N. \quad (9.17)$$

联系到由(8.2—8.4)和(8.6)所确定的crf问题. 若引进对偶变量 λ_{ij} 相应约束 $y_{ij} < x_i$, $(i, j) \in P$ 与 $y_{ij} < 1 - x_i$, $(i, j) \in N$; 和 μ_{ij} 相应约束 $y_{ij} < x_j$, $(i, j) \in P \cup N$; 以及 u_i 相应 $x_i < 1$, $i = 1, 2, \dots, n$. 可见, 由(9.15—9.17)所确定的天篷对偶即为crf的对偶. 从而, 定理得证. ■

§ 10 上界的确定

本节的目的, 首先, 给出一种确定 $H(f)$ 的方法. 它依赖一些初等布尔运算. 然后, 讨论二类凹包.

实际上, 基于如下的三个简单的恒等式:

$$\left. \begin{array}{l} \xi + \bar{\xi} = 1; \\ \xi \eta + \bar{\xi} \eta = \eta; \\ \xi \bar{\eta} + \eta = \xi + \bar{\xi} \eta \end{array} \right\} \quad (10.1)$$

可以建立一些从一个二次正形式到另一个二次正形式的映象. 称这些映象为初等布尔变换或运算.

OP1 若在一个拟布尔函数中有二个线性项如 $c\xi$ 和 $c\bar{\xi}$, 则将它们用一个常数 c 代替.

OP2 若有二个二次项 $c\xi\eta$ 和 $c\bar{\xi}\eta$ 同出现在一个函数中, 则用 $c\eta$ 代替它们.

OP3 若 $c\xi$ 和 $c\bar{\xi}\eta$ 同出现在一个函数中, 则用 $c\eta$ 和 $c\xi\bar{\eta}$ 代替他们.

OP4 设 τ 为一个布尔单项式, $c > 0$ 为一个常数, 若 $c = c_1 + c_2$, $c_1, c_2 > 0$, 则用 $c_1\tau$ 代替 $c_1\tau + c_2\tau$ 或反之.

我们可以从一个齐次二次正形式 ψ_0 开始, 反复用上述的运算OP1—OP4得到另一个齐次二次正形式 ψ 和一个常数 $k > 0$ 使得 $\psi_0 = \psi + k$. 这个 k 被称为从 ψ_0 中“榨取”出来的.

然而, 我们已经知道, 对于任何一个二次拟布尔函数 f , 总有齐次二次正形式 ψ_0 和一个常数 c_0 使得 $f + \psi_0 = c_0$. 那么, 如何从 ψ_0 中榨取出一个最大的 k^* 来? 当然, 由一个函数 f 的高度 $H(f)$ 的意义, 总有 $f + \psi = c_0 - k^* > H(f)$. 即, $k^* \leq c_0 - H(f)$.

实际上, Bourjolly, Hammer与Simeone于1983年发现了如下的定理^[5].

定理10.1 令 f 为一个二次拟布尔函数. ψ_0 为一个齐次二次正形式. 和, c_0 为一个常数使得

$$f + \psi_0 = c_0.$$

则, 从 ψ_0 中总可通过反复用初等布尔运算榨取出最大的常数 $k^* = c_0 - H(f)$.

因为这个定理的证明较长. 又未发现更简短的证明. 只好略去.

由这个定理使我们能够建立一个算法通过确定出 k^* 来求 $H(f)$. 从而, 得到拟布尔函数 f 的最大值的一个在某种意义上最好的上界 (详细情况可参见 [43]).

所谓一个二次拟布尔函数 $f(x) = x^T Q x$ (其中, $q_{ii} = 0, i > j$) 的局凹包, 指如下形式的一个可逐线段性的实函数:

$$\gamma(x) = \sum_{(i,j) \in P} q_{ij} \min\{x_i, x_j\} - \sum_{(i,j) \in N} q_{ij} \min\{1 - x_i, x_j\} + \sum_{i=1}^n (q_{ii} + \sum_{(j,i) \in N} q_{ji}) x_i. \quad (10.2)$$

当然, $\gamma(x)$ 定义在整个单位立方体 U^n 上.

容易看出, $\gamma(x)$ 是凹的. 而且, 有

$$\gamma(x) \geq f(x), \quad x \in U^n.$$

进而, 如果只取 $x \in B^n$, 则 $\gamma(x) = f(x)$.

定理 10.2 记 $\gamma(x)$ 在 U^n 上的最大值为 z_γ . 则, 有 $z_\gamma = z_{\text{crf}}$.

证明 实际上, 可由 (8.19) 直接得到

问题在于使得 $z_\gamma = z_{\text{crf}}$ 的最优解 x_γ , 一般而论, $x_\gamma \notin B^n$. 从而, $z_\gamma \neq z_f$.

设 U^n 的极点, 即 B^n 的点已经排了一个次序: $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(s)}$. 自然, $s = 2^n$. 现在, 对于 $x \in U^n$, 我们定义

$$\sigma(x) = \max \sum_{i=1}^s a_i f(x^{(i)}). \quad (10.3)$$

$$x = \sum_{i=1}^s a_i x^{(i)}; \quad \sum_{i=1}^s a_i = 1; \quad a_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

函数 $\sigma(x)$, 可以验证, 也是凹的. 称它为 $f(x)$ 的泛凹包^[21]. 当然, $\sigma(x)$ 也是 $f(x)$ 的一个上界函数. 而且, $\sigma(x)$ 是 $f(x)$ 的一个最接近的凹上界函数. 因为对于 $f(x)$ 的任何一个凹上界函数 $g(x)$, 总有 $\sigma(x) \leq g(x)$, $x \in U^n$. 同样地, 对于 $x \in B^n$, 有 $\sigma(x) = f(x)$. 进而, 还有 $z_\sigma = \max_{x \in U^n} \sigma(x) = \max_{x \in B^n} f(x) = z_f$.

虽然, $\sigma(x) < \gamma(x)$, $x \in U^n$. 等号一般不满足. 但, Hammer 和 Kalantari (1986) 表明: 当 $N = \emptyset$ 时, 确有 $\sigma(x) = \gamma(x)$. 这就又回到了我们前面已经讨论过的属于 $\emptyset$ 的问题 (§ 8).

只要注意到 $q_{ij} x_i x_j$ 在 U^2 上的凹包为

$$f_{ij}(x_i, x_j) = \begin{cases} q_{ij} \min\{x_i, x_j\}, & (i, j) \in P; \\ q_{ij} x_j - q_{ij} \min\{1 - x_i, x_j\}, & (i, j) \in N. \end{cases}$$

将它按 P 和 N 加起来即得 $\gamma(x)$, 在这种意义下, $\gamma(x)$ 可视为局部凹的. 故, 由此而得其名.

§ 11 带权独立集

令 $G = (V, E)$ 为一个无向图. 不妨取 $V = \{1, 2, \dots, n\}$, $|V| = n$, $|E| = m$. 对 G , 建立一个多面体 $P = \{x | x \in R^n, x \geq 0, x_i + x_j \leq 1, (i, j) \in E\}$. 容易看出, P 中的每个分量只取 0