刘彦佩选集

(Selected Publications of Y.P.Liu)

第二编

时代文献出版社

刘彦佩选集

（Selected Publications of Y.P.Liu）

第二编

时代文献出版社

刘彦佩选集（第二编）

作　　者：刘彦佩
出版单位：时代文献出版社

编辑设计：北京时代弄潮文化发展公司
地　　址：北京中关村海淀图书城25号家谱传记楼二层
电　　话：010-62525116　13693651386
网　　址：www.grcsw.com

印　　刷：京冀印刷厂
开　　本：880×1230　1/16
版　　次：2015年9月第1版

书　　号：ISBN 978-988-18772-5-3
定　　价：全套 1978.00元（共计23编）

第二编 目录

刘彦佩

中文文选

第六卷

北京交通大学

2014

目　录

第10卷 第3期
1990年8月

数学研究与评论
JOURNAL OF MATHEMATICAL
RESEARCH AND EXPOSITION

Vo.10 No.3
Aug. 1990

组合最优化中的布尔方法(续一)

彼得·哈默 刘彦佩 布鲁诺·席莫昂

§7 对偶性

我们还是先从如下的一般拟布尔最优化问题——称之为原问题——开始：

$$z=\max_{x\in B^n} f(x). \tag{7.1}$$

任一线性拟布尔函数 $t(x)=a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx_n$，如果对于任何 $x\in B^n$ 均有 $t(x)\geqslant f(x)$，则称 $t(x)$ 为 $f(x)$ 的一个上平面．若用 $t(x)$ 代替(7.1)，则得

$$\max_{x\in B^n} t(x). \tag{7.2}$$

称这个问题为(7.1)的线性松驰．当然，(7.2)的最优值提供了(7.1)的一个上界．

令 $\mathscr{T}$ 为 $f(x)$ 的所有上平面组成的集合．我们的兴趣在于找 $f(x)$ 的这样的一个上平面 $t_0(x)$ 使得(7.2)的最优值与(7.1)的最优值最接近．于是，导致确定

$$w=\min_{t\in\mathscr{T}}\max_{x\in B^n} t(x) \tag{7.3}$$

称(7.3)为(7.1)的平面对偶．

如果一个上平面 t^* 使得 $\max\limits_{x\in B^n} t^*(x)=w$，则称 t^* 是最好的．一般情况下，总有 $w\geqslant z$．差 $w-z$ 被称为对于 $\mathscr{T}$ 的平面对偶亏空．如果对于任何 $x\in B^n$，都有 $f(x)=\min\limits_{t\in\mathscr{T}} t(x)$，则称 $\mathscr{T}$ 是完备的．对于完备的 $\mathscr{T}$，总有

$$w=\min_{t\in\mathscr{T}}\ \max_{x\in B^n} t(x)\geqslant\max_{x\in B^n}\ \min_{t\in\mathscr{T}} t(x)=z. \tag{7.4}$$

现在，回到二次的情形，

$$f(x)=x^TQx=\sum_{i<j} q_{ij}x_ix_j. \tag{7.5}$$

对于每一项 $q_{ij}x_ix_j$，引进一个局部平面，

$$r_{ij}(x_i,x_j)=a_{ij}x_i+b_{ij}x_j+c_{ij}. \tag{7.6}$$

而且，可以看出，$r_{ij}(x_i,x_j)$ 是 $q_{ij}x_ix_j$ 的一个上平面，当且仅当

$$c_{ij}\geqslant 0,\ a_{ij}+c_{ij}\geqslant 0,\ b_{ij}+c_{ij}\geqslant 0,\ a_{ij}+b_{ij}+c_{ij}\geqslant q_{ij}. \tag{7.7}$$

这时，称它为 $f(x)$ 的局部上平面．

进而，(7.7)等价于

$$r_{ij}(x_i,x_j)=\begin{cases}\lambda_{ij}x_i+(q_{ij}-\lambda_{ij})x_j, & q_{ij}\geqslant 0;\\ \lambda_{ij}(1-x_i-x_j), & q_{ij}<0.\end{cases}$$

其中，　　$0 < \lambda_{ij} < |q_{ij}|$，　$1 < i, j < n$.

记 $P=\{(i,j)|q_{ij}>0,\ 1<i,\ j<n\}$ 和 $N=\{(i,j)|q_{ij}<0,\ 1<i,\ j<n\}$．对于任意 $0<\lambda_{ij}<|q_{ij}|$，$(i,j)\in P\cup N$，上平面

$$r(x,\lambda)=\sum_{(i,j)\in P}(\lambda_{ij}x_i+(q_{ij}-\lambda_{ij})x_j)+\sum_{(i,j)\in N}\lambda_{ij}(1-x_i-x_j)$$

被称为 $f(x)$ 的天篷．合并同类项之后，

$$r(x,\lambda)=a_0(\lambda)+a_1(\lambda)x_1+\cdots+a_n(\lambda)x_n \tag{7.8}$$

其中，

$$\left.\begin{aligned} a_0(\lambda) &= \sum_{(i,j)\in N}\lambda_{ij}\ ; \\ a_i(\lambda) &= q_{ii}+\sum_{(j,i)\in P} q_{ji}+\sum_{(i,j)\in P}\lambda_{ij} \\ &\quad -\sum_{(j,i)\in P}\lambda_{ji}-\sum_{(i,j)\in N}\lambda_{ij}-\sum_{(j,i)\in N}\lambda_{ji}, \end{aligned}\right] \tag{7.9}$$

$1<i<n$.

令 $\mathscr{R}$ 为 $f(\lambda)$ 的所有天篷的集合．这时，确有如下的美妙结果．

定理7.1　$\mathscr{R}$ 是完备的．

证明　容易看出，对于 f 的任一项 $q_{ij}x_ix_j$，总有 λ^*，$0<\lambda^*_{ij}<|q_{ij}|$，$i<j$，使得

$$q_{ij}x_ix_j=\begin{cases}\lambda^*_{ij}x_i+(q_{ij}-\lambda^*_{ij})x_j, & (i,j)\in P;\\ \lambda^*_{ij}(1-x_i-x_j), & (i,j)\in N.\end{cases}$$

实际上，$\lambda^*_{ij}=|q_{ij}|x_j$．■

当 f 为二次拟布尔函数，对于 $\mathscr{R}$ 的为(7.4)所定义的平面对偶被称为天篷对偶．可见天篷对偶的最优值是原问题的最优值的一个好的上界．

从§4中所讨论的可知，对于任何一个拟布尔函数 f 总存在一个常数 c_0 和一个正形式的拟布尔函数 $\psi(x)$ 使得

$$f(x)+\psi(x)=c_0. \tag{7.10}$$

可见，c_0 是 $z=\max\limits_{x\in B^n} f$ 的一个上界．而且，$c_0=z$，当且仅当 $\psi(x)$ 的布尔支架 $\widetilde{\psi}(x)=0$ 是相容的．我们也称使得 $\widetilde{\psi}=0$ 的 x 为它的根．如果 $f(x)$ 是二次的，可惜的是不能保证总有一个二次正形式 ψ，使得 $\widetilde{\psi}$ 有根．当然，如果有这样的 ψ，那么，确定 $f(x)$ 的最小值问题就属于 $\mathscr{P}$ 了．因为前面已经揭示(§3)求一个二次布尔方程的解的问题为P—问题．即属于 $\mathscr{P}$．至于如何判别一个二次拟布尔函数具有一个二次正形式，使得它的布尔支架有根以及这种判别是否有效，确是值得进一步研究的．不过，我们总可提出这样的问题：在 $f(x)$ 的所有二次正形式中使得满足(7.10)的最小的 c_0 是多少？这个最小的 c_0 就称为 f 的高度，用 $H(f)$ 表之．自然，$H(f)>z$．因此，高度提供了 $\max\limits_{x\in B^n} f(x)$ 的又一个上界．

一个拟布尔函数 $g(x)$ 称为正的，如果存在一个正形式 ψ 使得对于任何 $x\in B^n$，$g(x)=\psi(x)$．进而，若 ψ 是二次的，则称 g 为二次的正函数．

对于一个给定的二次拟布尔函数 f，那个唯一的使得对于任何 $x\in B^n$，

$$f(x)+f^*(x)=H(f) \tag{7.11}$$

的二次正函数 f^* 被称为 f 的补．一个二次正函数 g，如果不再存在另一个二次正函数 g' 和一

— 456—

个常数$k>0$使得$g=k+g'$，则称g是一个平台.

引理7.1 任何二次布尔函数f的补f^*都是平台.

证明 否则，若有f'和$k>0$使得$f^*=f'+k$，则$f+f'=H(f)-k$. 与$H(f)$为f的高度矛盾. ■

定理7.2 对于任何二次正函数g，有$g^{**}\leqslant g$.且,取等式，当且仅当g是一个平台.

证明 由于$g+g^*=H(g)$和$g^*+g^{**}=H(g^*)$，有$H(g)=g^*+g\geqslant H(g^*)$. 又，$g=g^{**}+k$，$k=H(g)-H(g^*)\geqslant 0$. 即，$g^{**}\leqslant g$.

进而，若g是一个平台，则$k=0$. 从而，$g^{**}=g^*$. 反之，若$g^{**}=g$，则g是g^*的补. 由引理7.1，g必为一个平台. ■

由这个定理就保证了：对于任一二次拟布尔函数f，虽然一般而论，$f^{**}\neq f$. 但，总有$f^{***}=f^*$.

§8 线 性 化

这里，也是为了确定二次拟布尔函数最大值的上界. 原始思想来自Rhys[34]. 对于$f(x)$中的一项$q_{ij}x_ix_j$，如果$(i,j)\in N$则用$q_{ij}x_j-q_{ij}\overline{x_i}x_j$代替. 从而，可将形如(5.2)的$f$变为

$$f(x)=\sum_{(i,j)\in P}q_{ij}x_ix_j-\sum_{(i,j)\in N}q_{ij}\overline{x_i}x_j+\sum_{i=1}^{n}(q_{ii}+\sum_{(j,i)\in N}{}_j\, q_{ji})x_i \tag{8.1}$$

然后，引进新的0—1变量$y_{ij}=\hat{x}_i\hat{x}_j$并加约束条件可将(5.1)化为如下形式的0—1规划：

$$\max(\sum_{(i,j)\in P}q_{ij}y_{ij}-\sum_{(i,j)\in N}q_{ij}y_{ij}+\sum_{i=1}^{n}(q_{ii}+\sum_{(j,i)\in N}{}_j\, q_{ji})x_i \tag{8.2}$$

且满足条件：

$$\begin{cases} y_{ij}\leqslant x_i, \quad y_{ij}\leqslant x_j, \quad (i,j)\in P; & (8.3)\\ y_{ij}\leqslant 1-x_i, \quad y_{ij}\leqslant x_j, \quad (i,j)\in N; & (8.4)\\ x_i, y_{ij}\in B, \quad 1\leqslant i\leqslant n, \quad (i,j)\in P\cup N. & (8.5)\end{cases}$$

容易证明，它与原问题(5.1)是等价的. 这个0—1规划形式被称为**离散的Rhys形式**. 或简记**drf**.

Rhys已经证明：当$N=\varnothing$时，约束(8.5)可以用

$$0\leqslant x_i\leqslant 1,\ y_{ij}\geqslant 0 \tag{8.6}$$

所代替. 因为这时约束的系数矩阵是全单位模的. 当然，在(8.6)中，$y_{ij}\geqslant 0$可以不考虑.这就变成了一般的线性规划问题. 自然，属于$\mathscr{P}$. 因此，我们只需研究$N\neq\varnothing$的情形，由(8.2)和约束(8.3)，(8.4)以及(8.6)所描述的线性规划问题也是原问题(5.1)和(5.2)的一种线性松驰. 这时的线性规划模型被称为**连续Rhys形式**. 或简记**crf**. 当然，也易验证，总有$z_{crf}\geqslant z$. 其中，z_{crf}表示crf的最优值.

由于在确定(8.1)时，引进那些变量的补有任意性. 例如

$$-x_ix_j=-x_j+\overline{x}_ix_j=-x_i+x_i\overline{x}_j=\frac{1}{2}(-x_i-x_j+\overline{x}_ix_j+x_i\overline{x}_j)$$

也许选择的好，可将f直接转化为所有二次项的系数皆正的情况. 不过，下面的定理8.2却指出了所有这些依引进变量补的不同方式所建立的线性规划实际上全是一样的. 证明这个定理的关键在于下面的表示定理.

定理8.1 令 $f(x)$ 如(5.2)所示．ψ 是它的一个齐次的二次正规正形式．$l(x)$ 为一个线性函数．则，对于所有的 $x\in B^n$，

$$f(x)=\psi(x,\overline{x})+l(x), \tag{8.7}$$

当且仅当存在 $\lambda_{ij}, w_{ij}, (i,j)\in P\cup N$，使得

$$\psi(x,\overline{x})=\sum_{(i,j)\in P}(\lambda_{ij}x_ix_j+w_{ij}\overline{x_i}\overline{x_j})+\sum_{(i,j)\in N}(\lambda_{ij}\overline{x_i}x_j+w_{ij}x_i\overline{x_j}); \tag{8.8}$$

$$l(x)=l_0+\sum_{i=1}^{n}l_ix_i. \tag{8.9}$$

其中，

$$\lambda_{ij}\geqslant 0,\quad w_{ij}\geqslant 0,\quad \lambda_{ij}+w_{ij}=|q_{ij}|,\quad (i,j)\in P\cup N; \tag{8.10}$$

$$\left.\begin{aligned} l_0&=-\sum_{(i,j)\in P}w_{ij},\\ l_i&=q_{ii}+\sum_{(j,i)\in P}{}_j\, w_{ji}+\sum_{(i,j)\in P}{}_j\, w_{ij}\\ &\quad-\sum_{(j,i)\in N}{}_j\,\lambda_{ji}-\sum_{(i,j)\in N}{}_j\, w_{ij}\quad, \end{aligned}\right] \tag{8.11}$$

$i=1,2,\cdots,n$.

证明 充分性．只要将(8.8—11)代入(8.7)经过整理和化简即可得．

必要性．设(8.7)中的 $\psi(x,\overline{x})$ 具有如下形式：

$$\psi(x,\overline{x})=\sum_{(i,j)}(a_{ij}x_ix_j+b_{ij}\overline{x_i}\overline{x_j}+c_{ij}\overline{x_i}x_j+d_{ij}x_i\overline{x_j}). \tag{8.12}$$

其中 $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}\geqslant 0$. 由正规性，$(i,j)$，$i<j$，可以剖分为三个部分

$$S_1=\{(i,j)\,|\,a_{ij}+b_{ij}>0,\quad c_{ij}=d_{ij}=0\};$$
$$S_2=\{(i,j)\,|\,c_{ij}+d_{ij}>0,\quad a_{ij}=b_{ij}=0\};$$
$$S_3=\{(i,j)\,|\,a_{ij}=b_{ij}=c_{ij}=d_{ij}=0\}.$$

从而，将 $\overline{x_i}$ 用 $1-x_i$ 代替，$i=1,2,\cdots,n$，之后 $f(x)-\psi(x,\overline{x})$ 之二次项部分变为

$$\sum_{(i,j)\in S_1}(q_{ij}-a_{ij}-b_{ij})x_ix_j+\sum_{(i,j)\in S_2}(q_{ij}+c_{ij}+d_{ij})x_ix_j \tag{8.13}$$

由无补变量出现的拟布尔函数的多项表示式的唯一性可得：对于 $(i,j)\in S_1$，$q_{ij}-a_{ij}-b_{ij}=0$，和对于 $(i,j)\in S_2$，$q_{ij}+c_{ij}+d_{ij}=0$． 由 a_{ij}，b_{ij}，和 c_{ij} 和 d_{ij} 的非负性，有 $S_1=P$，$S_2=N$．从而，(8.8)和(8.10)满足．而且，

$$\begin{aligned} l(x)&=l_0+\sum_{i=1}^{n}l_ix_i=f(x)-\psi(x,\overline{x})\\ &=\sum_{i=1}^{n}q_{ii}x_i+\sum_{(i,j)\in P}q_{ij}x_ix_j-\sum_{(i,j)\in P}\lambda_{ij}x_ix_j-\sum_{(i,j)\in P}w_{ij}(x_ix_j-x_i-x_j+1)\\ &\quad+\sum_{(i,j)\in N}q_{ij}x_ix_j+\sum_{(i,j)\in N}\lambda_{ij}(x_j-x_ix_j)-\sum_{(i,j)\in N}w_{ij}(x_i-x_ix_j). \end{aligned}$$

由(8.10)，消去其中所有二次项．经比较系数即可得(8.11)． ■

现在，我们可以用 f 的由定理8.1所给出的一般形式相应地得到crf的一般形式：

$$z_{gcrf}=\max\sum_{(i,j)\in P\cup N}(\lambda_{ij}y_{ij}+w_{ij}z_{ij})+\sum_{i=1}^{n}l_ix_i+l_0 \tag{8.14}$$

且满足条件：

—458—

$$y_{ij} \leqslant x_i,\ y_{ij} \leqslant x_j,\ z_{ij} \leqslant 1-x_i,\ z_{ij} \leqslant 1-x_j,\ (i,j) \in P; \tag{8.15}$$

$$y_{ij} \leqslant 1-x_i,\ y_{ij} \leqslant x_j,\ z_{ij} \leqslant x_i,\ z_{ij} \leqslant 1-x_j,\ (i,j) \in N; \tag{8.16}$$

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1,\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ y_{ij} \geqslant 0,\ z_{ij} \geqslant 0,\ (i,j) \in P \cup N. \tag{8.17}$$

由（8.14—8.17）所确定的最优化问题被称为一般连续Rhys形式．或简记 gcrf，当所有 $z_{ij}=0$，就变成了crf.

定理8.2 $z_{crf}=z_{gcrf}$.

证明 首先，若线性规划(8.14—17)有一个最优解(x^*, y^*, z^*)使得

$$y_{ij}^*=\min\{x_i^*, x_j^*\},\quad z_{ij}^*=\min\{1-x_i^*, 1-x_j^*\},\qquad (i,j)\in P;$$

$$y_{ij}^*=\min\{1-x_i^*, x_j^*\},\quad z_{ij}^*=\min\{x_i^*, 1-x_j^*\},\qquad (i,j)\in N.$$

且，记$U^n=[0,1]^n$为n-维单位立方体．则有

$$\begin{aligned} z_{gcrf}=\max_{x\in U^n}\{ &\sum_{(i,j)\in P}\lambda_{ij}\min\{x_i,x_j\}+\sum_{(i,j)\in P}w_{ij}\min\{1-x_i,1-x_j\} \\ &+\sum_{(i,j)\in N}\lambda_{ij}\min\{1-x_i,x_j\}+\sum_{(i,j)\in N}w_{ij}\min\{x_i,1-x_j\} \\ &+\sum_{i=1}^{n}(q_{ii}+\sum_{(i,j)\in P}w_{ij}+\sum_{(j,i)\in P}w_{ji}-\sum_{(j,i)\in N}\lambda_{ji}-\sum_{(i,j)\in N}w_{ij})x_i-\sum_{(i,j)\in P}w_{ij}\}. \end{aligned} \tag{8.18}$$

而，对于crf，有

$$\begin{aligned} z_{crf}=\max_{x\in U^n}\{ &\sum_{(i,j)\in P}q_{ij}\min\{x_i,x_j\} \\ &-\sum_{(i,j)\in N}q_{ij}\min\{1-x_i,x_j\}+\sum_{i=1}^{n}(q_{ii}+\sum_{(i,j)\in N}q_{ij})x_i\}. \end{aligned} \tag{8.19}$$

不管怎样，对于所有 $x\in U^n$，$(i,j)\in P$，有

$$\begin{aligned} &\lambda_{ij}\min\{x_i,x_j\}+w_{ij}\min\{1-x_i,1-x_j\}+w_{ij}x_j+w_{ij}x_i-w_{ij} \\ &=\lambda_{ij}\min\{x_i,x_j\}+w_{ij}(1-\max\{x_i,x_j\})+w_{ij}x_j+w_{ij}x_j-w_{ij} \\ &=\lambda_{ij}\min\{x_i,x_j\}+w_{ij}(x_i+x_j-\max\{x_i,x_j\}) \\ &=\lambda_{ij}\min\{x_i,x_j\}+w_{ij}\min\{x_i,x_j\}, \end{aligned}$$

由于(8.10)中的 $\lambda_{ij}+w_{ij}=q_{ij}$ ，

$$=q_{ij}\min\{x_i,x_j\}. \tag{8.20}$$

相仿地，对于所有 $x\in U^n$和 $(i,j)\in N$，有

$$\lambda_{ij}\min\{1-x_i,x_j\}+w_{ij}\min\{x_i,1-x_j\}-\lambda_{ij}x_j-w_{ij}x_i$$

由（8.10）中的 $\lambda_{ij}+w_{ij}=-q_{ij}$，

$$\begin{aligned} &=\lambda_{ij}\min\{1-x_i,x_j\}+w_{ij}(1-\max\{1-x_i,x_j\}) \\ &\quad+q_{ij}x_j+w_{ij}x_j+w_{ij}(1-x_i)-w_{ij} \\ &=\lambda_{ij}\min\{1-x_i,x_j\}+w_{ij}(1-x_i+x_j-\max\{1-x_i,x_j\})+q_{ij}x_j \\ &=\lambda_{ij}\min\{1-x_i,x_j\}+w_{ij}\min\{1-x_i,x_j\}+q_{ij}x_j, \end{aligned}$$

再由(8.10)中的$\lambda_{ij}+w_{ij}=-q_{ij}$，

$$=-q_{ij}\min\{1-x_i,x_j\}+q_{ij}x_j. \tag{8.21}$$

将(8.20)和(8.21)分别对$(i,j)\in P$和$(i,j)\in N$求和．然后，比较(8.18)和(8.19)，即可得定理． ■

§9 等价性

本节的目的在于表明前二节所建立的三种不同类型确定原始最优化问题(5.1)和(5.2)的最优值上界的方法是等价的．设w_R为天篷对偶的最优值，$H(f)$为f的高度．和z_{crf}为连续Rhys形式crf的最优值．则，这里将论证：对于二次拟布尔函数f，有

$$w_R = H(f) = z_{crf}\ . \tag{9.1}$$

首先，研究第一个等式．令ψ是f的一个二次正形式使得$f+\psi=c_0$，c_0是某常数，记

$$\psi(x,\overline{x}) = \psi_0 + \psi_l(x,\overline{x}) + \psi_q(x,\overline{x}). \tag{9.2}$$

其中，ψ_0为常数，ψ_l为所有一次项之和，ψ_q为所有二次项之和．而且，所有二次项的系数全为正．从而，

$$f(x) + \psi_q(x,\overline{x}) = c_0 - \psi_0 - \psi_l(x,\overline{x}). \tag{9.3}$$

可见，(9.3)式右边是$f(x)$的一个上平面．

对于f的一个上平面$p(x)$，如果存在一个齐次二次正规正形式ψ_q使得

$$f(x) + \psi_q(x,\overline{x}) = p(x),\quad x\in B^n, \tag{9.4}$$

则称f有一个二次剩余．

引理9.1 令$\lambda=(\lambda_{ij})$使得$0<\lambda_{ij}<|q_{ij}|$，$(i,j)\in P\cup N$．和

$$Q(x,\lambda) = \sum_{(i,j)\in P}(\lambda_{ij}x_i\overline{x_j} + (q_{ij}-\lambda_{ij})\overline{x}_i x_j) + \sum_{(i,j)\in N}(\lambda_{ij}\overline{x_i}\overline{x_j} - (q_{ij}+\lambda_{ij})x_i x_j). \tag{9.5}$$

则$Q(x,\lambda)$是f的一个二次剩余，并且f的所有二次剩余都具有这一形式．

证明 定理8.1的一个直接结果． ■

引理9.2 二次函数f的一个上平面是天篷，当且仅当它有一个二次剩余．进而，对f的一个由(7.9)给出的天篷，其二次剩余由(9.5)给出．其中二式中之参数λ_{ij}是相同的；反之，亦然．

证明 设$r(x,\lambda)$为由(7.9)所给出的一个天篷．并注意到：对于任何$(i,j)\in P$，有

$$\lambda_{ij}x_i + (q_{ij}-\lambda_{ij})x_i - q_{ij}x_i x_j = \lambda_{ij}x_i\overline{x_j} + (q_{ij}-\lambda_{ij})\overline{x_i}x_j.$$

和对于任何$(i,j)\in N$，有

$$\lambda_{ij}(1-x_i-x_j) - q_{ij}x_i x_j = \lambda_{ij}\overline{x_i}\overline{x_j} - (q_{ij}+\lambda_{ij})x_i x_j.$$

然后，分别将它们在P和N上求和．即得

$$r(x,\lambda) - f(x) = Q(x,\lambda).$$

因此，f有一个二次剩余．

反之，若$r(x)$为f的任一上平面并有二次剩余$Q(x,\lambda)$如(9.5)所示，则在$f(x)+Q(x,\lambda)=r(x)$的左边所有的$\overline{x_i}$均用$1-x_i$代替，$i=1,2,\cdots,n$，即可得到$r(x)$恰是由(7.9)所给出的天篷． ■

定理9.1 $w_R = H(f)$．

证明 令$r(x)=a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx_n$是$f$的一个天篷．由引理9.2，$f$有一个二次剩余$Q$使得

$$f+Q=r. \tag{9.6}$$

另一方面，令

$$\left.\begin{aligned} L(x,\overline{x}) &= \sum_{j=1}^{n} a_j^+\overline{x}_j - \sum_{j=1}^{n} a_j^- x_j \\ c &= a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j^+. \end{aligned}\right\} \tag{9.7}$$

其中，$a^+=\max\{0,a\}$，$a^-=\min\{0,a\}$．可见，L是一个线性的正形式．并且，有

$$r+L=c. \tag{9.8}$$

将(9.6)与(9.7)相加，即得

$$f+h=c,\quad h=Q+L.$$

由于h是一个二次正函数，则$c\geqslant H(f)$．然而，由(9.7)，$\max\limits_{x\in B^n} r(x)=c$．故，$w_R\geqslant H(f)$．

下面，证相反的不等式．由于f有一个补f^*使得

$$f+f^*=H(f). \tag{9.9}$$

又，f^*是一个二次正形式．从而，有一个二次正规正形式$\psi=f^*$．注意到由引理7.1，f^*是一个平台．则ψ是齐次的．用Q与L分别表示ψ的二次项的和与一次项的和．故，

$$f^*=Q+L. \tag{9.10}$$

若记

$$r(x)=H(f)-L(x,\overline{x}), \tag{9.11}$$

则由(9.9)，(9.10)和(9.11)可得

$$f+Q=r. \tag{9.12}$$

这就是说，f有一个二次剩余．

又，由引理9.2，r是一个天篷．而且，由(9.11)，有$\max\limits_{x\in B^n} r(x)=H(f)$．从而，$w_R\leqslant H(f)$．■

下面，我们证明(9.1)的后一个等式．

引理9.3 天篷对偶可表示为一个特殊的线性规划．

证明 令 $\Delta=\{\lambda=(\lambda_{ij})\mid 0\leqslant\lambda_{ij}\leqslant|q_{ij}|,\ (i,j)\in P\cup N\}$．由(7.4)和(7.9)，有

$$\begin{aligned} w_R &= \min_{t\in\mathcal{T}}\ \max_{x\in B^n} t(x,\lambda) \\ &= \min_{\lambda\in\Delta}\ \max_{x\in B^n}\{a_0(\lambda)+a_1(\lambda)x_1+\cdots+a_n(\lambda)x_n\} \\ &= \min_{x\in\Delta}\{a_0(\lambda)+a_1^+(\lambda)+\cdots+a_n^+(\lambda)\}. \end{aligned} \tag{9.13}$$

这里，如前一样$a^+=\max\{0,a\}$．故，

$$w_R=\min(a_0(\lambda)+\sum_{i=1}^{n} u_i). \tag{9.14}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} u_i\geqslant a_i(\lambda) \\ u_i\geqslant 0 \end{array}\right\}\quad i=1,2,\cdots,n. \\ 0\leqslant\lambda_{ij}\leqslant|q_{ij}|,\ (i,j)\in P\cup N. \end{array}\right.$$

实际上，这是一个双向流问题(bidireted flow problem)[27]．其中，$a_0(\lambda)$，$a_i(\lambda)$如(7.9)

所示. ■

定理9.2 $H(f)=z_{crf}$

证明 若引进亏变量 $\mu_{ij}=|q_{ij}|-\lambda_{ij}$，则天篷对偶可以写成如下的对称形式：

$$\min\sum_{i=1}^{n}u_i+\sum_{(i,j)\in N}\lambda_{ij} \tag{9.15}$$

且满足：

$$\begin{aligned}&u_i-\sum_{(i,j)\in P}{}_j\lambda_{ij}-\sum_{(j,i)\in P}{}_j\mu_{ji}+\sum_{(i,j)\in N}{}_j\lambda_{ij}\\&-\sum_{(j,i)\in N}{}_j\mu_{ji}>q_{ii}+\sum_{(j,i)\in N}{}_jq_{ji}\ ,\qquad 1<i<n;\end{aligned} \tag{9.16}$$

$$\left.\begin{aligned}&\lambda_{ij}+\mu_{ij}=|q_{ij}|,\\&\lambda_{ij},\ \mu_{ij}>0\end{aligned}\right\}\ (i,j)\in P\cup N. \tag{9.17}$$

联系到由(8.2—8.4)和(8.6)所确定的crf问题．若引进对偶变量λ_{ij}相应约束 $y_{ij}<x_i$，$(i,j)\in P$与 $y_{ij}<1-x_i$，$(i,j)\in N$；和μ_{ij}相应约束 $y_{ij}<x_j$，$(i,j)\in P\cup N$；以及u_i相应$x_i<1$，$i=1,2,\cdots,n$．可见，由(9.15—9.17)所确定的天篷对偶即为crf的对偶.从而,定理得证.■

§10 上界的确定

本节的目的，首先，给出一种确定$H(f)$的方法．它依赖一些初等布尔运算．然后，讨论二类凹包．

实际上，基于如下的三个简单的恒等式：

$$\left.\begin{aligned}\xi+\bar{\xi}&=1;\\\xi\eta+\bar{\xi}\eta&=\eta;\\\xi\bar{\eta}+\eta&=\xi+\bar{\xi}\eta\end{aligned}\right\} \tag{10.1}$$

可以建立一些从一个二次正形式到另一个二次正形式的映象．称这些映象为初等布尔变换或运算．

OP1 若在一个拟布尔函数中有二个线性项如$c\xi$和$c\bar{\xi}$，则将它们用一个常数c代替．

OP2 若有二个二次项$c\xi\eta$和$c\bar{\xi}\eta$同出现在一个函数中，则用$c\eta$代替它们．

OP3 若$c\xi$和$c\bar{\xi}\eta$同出现在一个函数中，则用$c\eta$和$c\xi\bar{\eta}$代替他们．

OP4 设τ为一个布尔单项式，$c>0$为一个常数，若 $c=c_1+c_2$，$c_1,c_2>0$,则用$c\tau$代替 $c_1\tau+c_2\tau$ 或反之．

我们可以从一个齐次二次正形式ψ_0开始，反复用上述的运算OP1—OP4得到另一个齐次二次正形式ψ和一个常数$k>0$使得$\psi_0=\psi+k$．这个k被称为从ψ_0中“榨取”出来的．

然而，我们已经知道，对于任何一个二次拟布尔函数f，总有齐次二次正形式ψ_0和一个常数c_0使得$f+\psi_0=c_0$．那么，如何从ψ_0中榨取出一个最大的k^*来？当然，由一个函数f的高度$H(f)$的意义，总有$f+\psi=c_0-k^*>H(f)$．即，$k^*<c_0-H(f)$．

实际上，Bourjolly，Hammer与Simeone于1983年发现了如下的定理[5]．

定理10.1 令f为一个二次拟布尔函数．ψ_0为一个齐次二次正形式．和，c_0为一个常数使得

$$f+\psi_0=c_0.$$

则，从ψ_0中总可通过反复用初等布尔运算榨取出最大的常数$k^*=c_0-H(f)$。

因为这个定理的证明较长．又未发现更简短的证明．只好略去．

由这个定理使我们能够建立一个算法通过确定出k^*来求$H(f)$．从而，得到拟布尔函数f的最大值的一个在某种意义上最好的上界（详细情况可参见[43]）．

所谓一个二次拟布尔函数$f(x)=x^TQx$（其中，$q_{ij}=0$，$i>j$）的局凹包，指如下形式的一个可逐线段性的实函数：

$$\gamma(x)=\sum_{(i,j)\in P}q_{ij}\min\{x_i,x_j\}-\sum_{(i,j)\in N}q_{ij}\min\{1-x_i,x_j\}+\sum_{i=1}^{n}(q_{ii}+\sum_{(j,i)\in N}q_{ji})x_i. \tag{10.2}$$

当然，$\gamma(x)$定义在整个单位立方体U^n上．

容易看出，$\gamma(x)$是凹的．而且，有

$$\gamma(x)\geqslant f(x),\quad x\in U^n.$$

进而，如果只取$x\in B^n$，则$\gamma(x)=f(x)$．

定理10.2 记$\gamma(x)$在U^n上的最大值为z_γ．则，有$z_\gamma=z_{crf}$．

证明 实际上，可由（8.19）直接得到 ■

问题在于使得$z_\gamma=z_{crf}$的最优解x_γ，一般而论，$x_\gamma\bar{\in}B^n$．从而，$z_\gamma\neq z_f$．

设U^n的极点，即B^n的点已经排了一个次序：$x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(s)}$．自然，$s=2^n$．现在，对于$x\in U^n$，我们定义

$$\sigma(x)=\max\sum_{i=1}^{s}a_if(x^{(i)}). \tag{10.3}$$

$$x=\sum_{i=1}^{s}a_ix^{(i)};\quad \sum_{i=1}^{s}a_i=1;\qquad a_i\geqslant 0,\ i=1,2,\cdots,s.$$

函数$\sigma(x)$，可以验证，也是凹的．称它为$f(x)$的泛凹包[21]．当然，$\sigma(x)$也是$f(x)$的一个上界函数．而且，$\sigma(x)$是$f(x)$的一个最接近的凹上界函数．因为对于$f(x)$的任何一个凹上界函数$g(x)$，总有$\sigma(x)\leqslant g(x)$，$x\in U^n$．同样地，对于$x\in B^n$，有$\sigma(x)=f(x)$．进而，还有有$z_\sigma=\max\limits_{x\in U^n}\sigma(x)=\max\limits_{x\in B^n}f(x)=z_f$．

虽然，$\sigma(x)\leqslant\gamma(x),x\in U^n$．等号一般不满足．但，Hammer和Kalantari（1986）表明：当$N=\varnothing$时，确有$\sigma(x)=\gamma(x)$．这就又回到了我们前面已经讨论过的属于$\mathscr{P}$的问题（§8）．

只要注意到$q_{ij}x_ix_j$在U^2上的凹包为

$$f_{ij}(x_i,x_j)=\begin{cases}q_{ij}\min\{x_i,x_j\}, & (i,j)\in P;\\ q_{ij}x_j-q_{ij}\min\{1-x_i,x_j\}, & (i,j)\in N.\end{cases}$$

将它按P和N加起来即得$\gamma(x)$，在这种意义下，$\gamma(x)$可视为局部凹的．故，由此而得其名．

§11 带权独立集

令$G=(V,E)$为一个无向图．不妨取$V=\{1,2,\cdots,n\}$，$|V|=n$，$|E|=m$．对G，建立一个多面体$\mathbf{P}=\{x|x\in R^n,\ x\geqslant 0,\ x_i+x_j\leqslant 1,\ (i,j)\in E\}$．容易看出，$\mathbf{P}$中的每个分量只取0