一、什么是微积分

（一）微积分的来源

传统的积分来源是计算曲边下的图形面积：

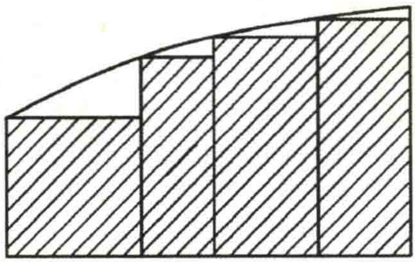


图 1

这里将总面积当作许许多多小矩形面积之和。这就是公元前阿基米德的求积方法，它需要无穷的运算来实现。（如图 1）[1]

（二）微积分的方法

本册将积分的来源和微分的来源联系起来，将问题转变成求一条曲线另一边的高度。（如图 2）

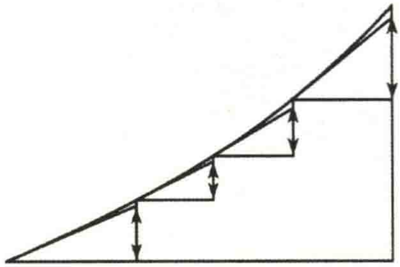


图 2

这里将总高度当作许许多多“微分三角形”的高度之和，而求这条曲边下的微分三角形的高度之和相当于前面求那一条曲边下的小矩形的面积之和。于是可以将上面两张图摆在一起。（如图 3）[2]

这样，下面图形求面积的无穷运算变成了上面图形求高度的连续运算。这就是牛顿等人解释微积分的基本思想。

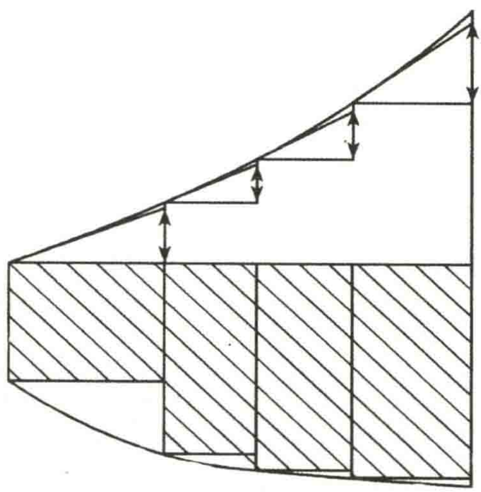


图 3

（三）微积分的精神

我们必须学会用图形，或用常识来解释微积分的精神：将一个大企业分而治之，每一个小企业好治理——只有小小的错误，它们加起来也不过是小错。相反，一个大企业不好治理，犯的每个错都不是小错。

所以，分而治之是个保险的办法，可以将大错降为小错。这就是微积分的精神。

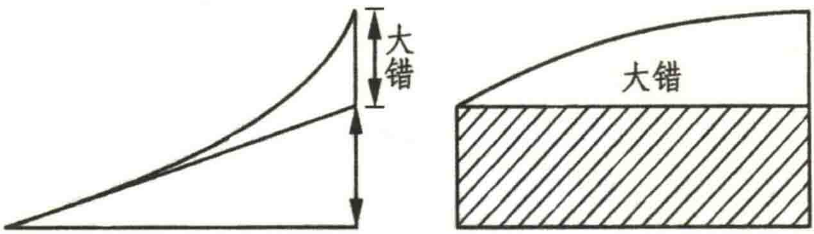


图 4

（四）效率估算

教材变薄，教学方法或学习方法的改进，能为多少学生节省多少时间呢？粗估一下：我国设有 10^3 所大学，每年每所大学有 10^3 人学微积分，如果按变薄后的方法，每年每人少说省下 10 个学时，那么仅在我国，每年可省 10^7 个学时，10 年可省 10^8 个学时，或者说相当于 1 万名学生各省下了约 1 年的时间。反之，如果因为教材、教学方法或学习方法的误导，每年可能使百万人陷入迷途。

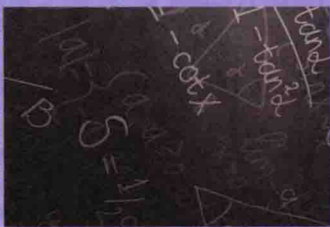
（五）建立信心

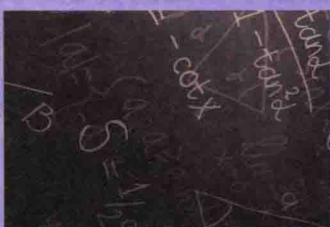
如果读者经过认真阅读之后，还是弄不清微积分是什么，那么不要以为自己水平低；相反，要理直气壮地认为著者的水平还有待提高。像华罗庚能从多样的优化学科中

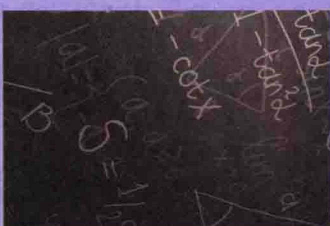
点出一个数 0.618（或折纸法），让大众使用；吴文俊[3]能将复杂的方程求解变成机械性的操作，让中学生容易掌握。这是因为他们的水平高，懂得透，能将获得的知识以人们更容易接受的方式传播给大众。所以，读者懂或不懂，恰好是反映著者水平高或低的镜子。读者是公正的裁判员。

（六）感谢

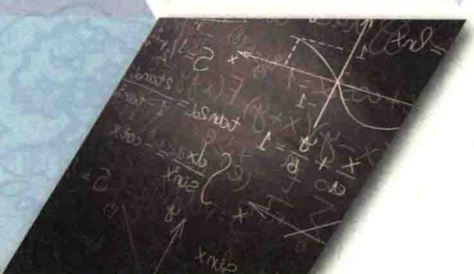
几位院士（姜伯驹、李大潜、叶大年、刘应明、赵忠贤等）以及夏志宏教授等提出的建议已经采纳在书本之中。出版社的编辑对于文稿的加工做出了自己的贡献。我的学生吴冬生、杜留等曾不厌其烦地对原稿做修订。册子里还有林逢悦的有益观点。有些大学，如河北大学、北京航空航天大学、中国海洋大学、湘潭大学、广州商学院、深圳大学，曾将此书作为文科讲座的依据。此外，本册借用了浙江教育出版社一书中若干图片[4]，一并感谢。







二、初中微积分：看图识字



有位哲学家曾说："一种哲学的基本原理，若不能讲得让15岁的孩子听懂，我就不承认那是哲学。"

中国有句古话："假传万卷书，真传一句话。"

有人的口号："要看不要想，真看清了就不要想。"

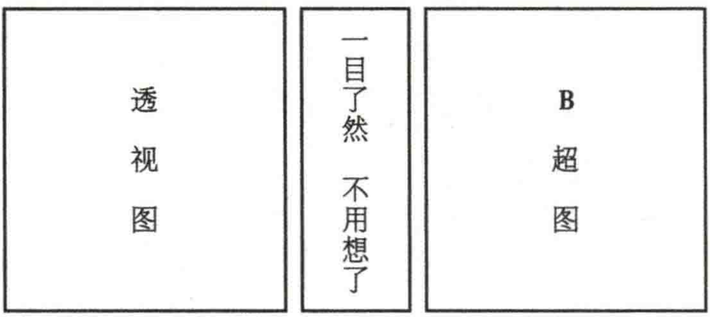


图5

微积分是自然哲学，要在大学学一两年，那么它的原理能否不用费解的数学公式，只用一张图，也能让初中生看得懂？

据说牛顿称他的万有引力理论是由苹果落地引出的。还有一幅漫画来说明：牛顿在树下思考，正好看到苹果下落，使他想到万有引力的概念。那么，牛顿的微积分又是怎么产生的？除了凭空的物理思考，有没有一张更

图6

直观的画使我们看清它？

这个问题萦回于笔者脑际，直到一次偶然的树下散步，发现了看待积分的新角度，才使微积分的真相水落石出。

（一）树有多高与初中三角

笔者在大树下散步，旁边有人说，年年有人来测量树高。

此时，按照笔者以往的经验，初中做过的一道三角练习，便闪现出来，这是一张画像，将直角三角形的高，跟斜边的水平角，即视角加以联系，见图 7。

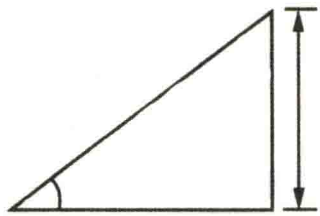


图 7

于是笔者悟出一个道理：求高必须利用视角，或者求高必须与视角联系起来。

试想如果没有视角相助，要测树高则必须将树砍倒。但是，一旦与视角联系起来，求高就无须付出砍树的代价。可见，视角的概念多么有用。

但是谁想得到，这个初中三角道理竟会成为以后学微积分的根据。这本小册子正是沿着这个道理，推出微积分的一般原理，而不必过多运用数学技巧。

求高与视角加以联系，虽是初中学过的道理，但是提供了一个有力的根据，做出了一般的结论，这就是数学家

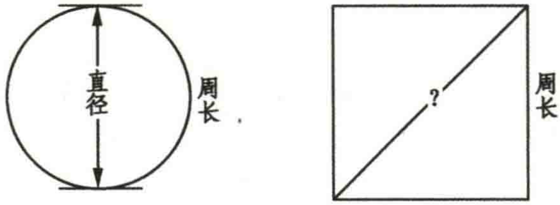


图 8

外尔讲的原则：一切非直接的度量（如树高）最后需要依赖于直接的度量。（如图 8）

或者说，度量那些可度量的，并使不可度量的成为可度量的。（如图 9）

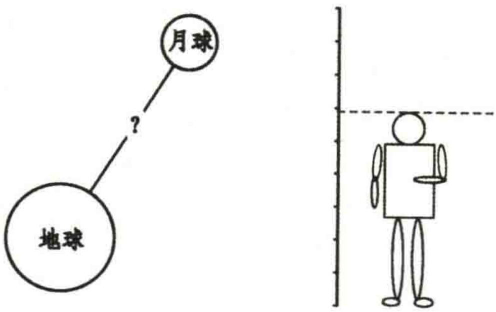


图 9

这也是做事的一般性原则：先做那些会做的，将不会做的与会做的加以联系，并使不会做的成为会做的，通过桥梁到达另一个目的地。（如图 10）

更广泛地说，就好比先建立好自己的根据地，才会考虑扩大地盘。

还有人说，数学的本领就是可以找到不同事物之间的联系。

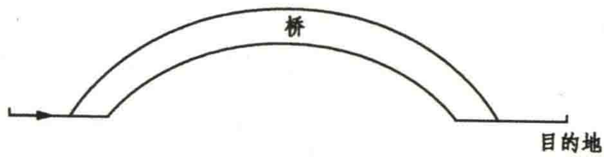


图 10

（二）缆车爬高与大学三角

周光召[5]有一篇文章的标题：“提出问题标志科学的真正进步”。

上一段中问到树有多高曾经致使初等三角学的诞生。现在问缆车处于多高，将致使高等三角学或微积分的诞生。

设想有一缆车沿一条悬链往上爬，（如图 11）那么它的高度随时在变化。如何确定它在哪个位置，以及该位置

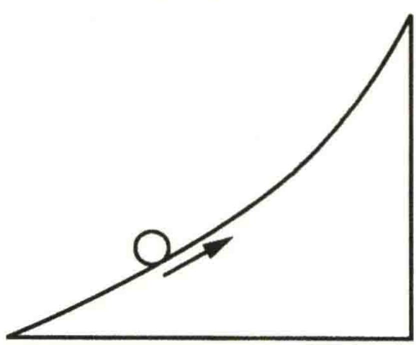


图 11

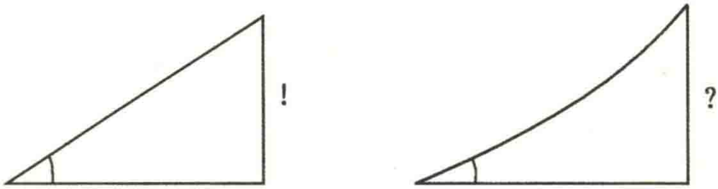


图 12

上的高度呢？这是一个曲边三角形求高的问题，已经不是测量树高时遇到的直边三角形求高，但是两者很相像，（如图 12）那么还能不能利用直边的经验，由视角来确定高度呢？

可是，从图上看得见，直的斜边有一个固定不变的、整体的视角，可以利用视角一步求高，而曲的斜边上每一点的视角都不同，都在变化之中，不可能一步求高。而且，在大曲边段上视角的变化很大，只有小曲边段内视角才能大致保持不变。（如图 13）所以，如果缆车在悬链上只走过一小段，那么还可能利用起点的视角和直边三角形一步求高（虽然会有小小误差）。（如图 14）

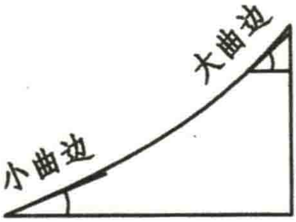


图 13

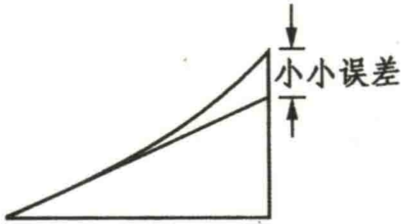


图 14

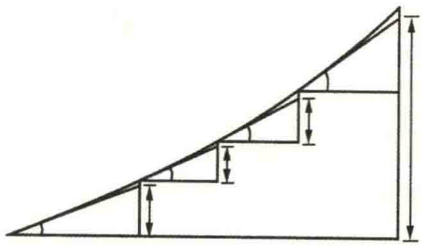


图 15

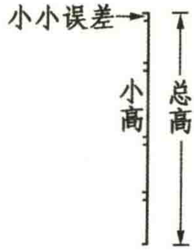


图 16

现在设想缆车在悬链上一小段一小段地爬行，利用每段起点的视角，求出这段终点的高度差或微分，（如图 15）这就是一连串无限多步的求高过程。

将前面各小段求得的高度差或微分（只有小小误差）通通加起来，作为后面位置上的总高度，那么最后也只有小小误差，（如图 16）而且，这个小小误差最终会随悬链上的小段缩小而消失。

这就是高等三角学和它的全部复杂性。因为高等三角学被建造在常识（初等三角学）之上，安全可靠，使人人都可以接受。

总之，测量树高是初中三角（直边），缆车爬高则被看成大学三角（曲边）。一旦采纳这种看法，便有了新的角度，使缆车爬高得以采纳测量树高的经验：一小段一小段地当作测量树高，或一点一点地利用视角。万物便可以回到常识。

（三）微积分

缆车爬高，或曲边三角形求高的这个方法，也叫作微积分或微分法。抽象地说，这是一门变化的科学，其中总的变化不能一步求出，要分割为一段段小变化，每一段就按最贴近的直线做变化（有不变的视角或变化率），即万变中有不变，以不变求万变。（如图 17）

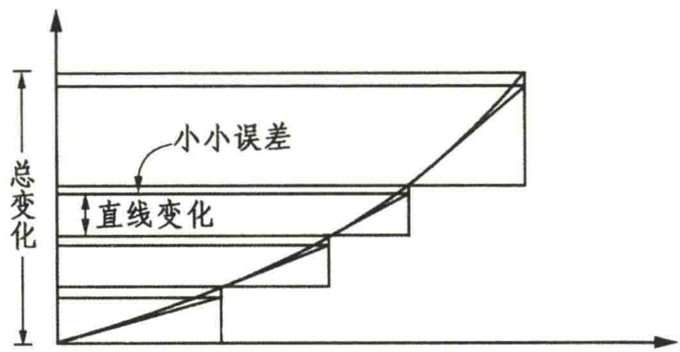


图 17

也可以说，微积分将不可度量的大变化（非均匀）跟可度量的直线变化（均匀）加以联系。

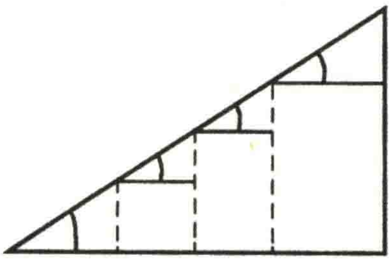
从测量树高到初中三角，又从缆车爬高到微积分，这些来自不同范畴的事物，竟然都有联系。特别地，缆车爬高集中了微积分的全部复杂性，这是数学与自然界吻合得最好的例子。

将微积分和初中三角加以联系，才安全可靠。将微积

分和缆车爬高加以联系，才言之有物。

（四）图

图使思想看得见。

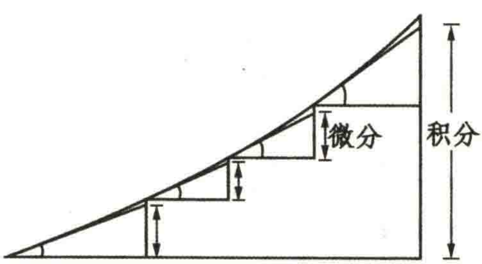


■ 图 18

测量树高伴随着这样一幅直角三角形求高的图，它有一个固定不变的、整体的视角。（如图 18）所以可从利用视角一步求高。这就是微积分的初貌，是我们能相信的东西，是初中常识。

一般地说，一个科学论述，如果不能明显地变为我们所相信的东西或常识，那是靠不住的。

缆车爬高伴随着曲边三角形求高这样一幅图，它有变化的视角，不可能一步求高，需要分割为一连串短暂的微分三角形求高。（如图 19）



■ 图 19

这一串微分三角形编织的网，整体的视角在变，短暂的视角却不变，即变中有

不变的成分。它包含了微积分方法的整体复杂性和短暂简单性。在第二部分将看到，它概括了大学微积分的三大内容：

微分——一个直角三角形求高（这个三角形称为微分三角形，它是一块宝，高即“微分”，斜边即“弧微分”）；

积分——一串微分三角形求高，再加在一起；

微积分基本公式——加起来的结果等于曲边三角形总高（不言自明）。

所以，这个图的信息含量非常大，完全有资格作为微积分的代表图。

微积分到此，只剩下一张图。真是“假传万卷书，真传一张图”。

给微积分画图，使思想看得见，只要看不要想。反之，如果还要想，是不是还没有看清呢？

如果数学的各学科都能画出连环画，那么整个数学都看得见摸得着了。

有人问：相对论也能这么画吗？

（五）牛顿的世界模式

微积分的图也包含了牛顿等先人的科研方法，即微分法：将整体变化分割为尽可能小的部分，每一小部分只要

按最贴近的直线做变化，那么合并起来仍会贴近于整体变化。这是根据整体等同于所有部分的相加，即每一部分可以自由地独立运作（不用去管别处发生了什么），而且有一点点误差也无关全局（即小小的误差不会积累扩大）。（如图 20）

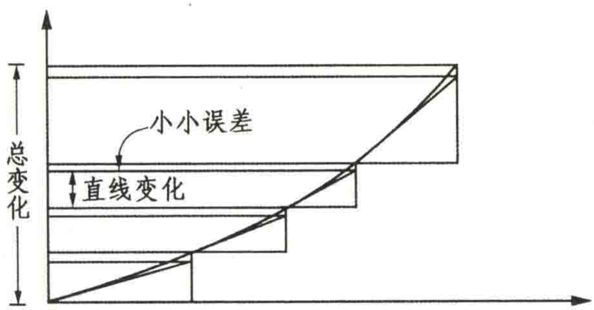


图 20

这也是将不会做的整体跟会做的每一小部分加以联系。

这种研究模式已经统治科学三百多年，并被应用到社会分工和古典经济学诸领域之中。例如，一个大项目被分割为尽可能小的项目，每一个小项目做好了，那么它们加起来，即大项目，也会做好，比如把数学分割成几个学科。（如图 21）又如一个大政府被划分为许多部门，每一个部门只要各尽其责去完成自己的任务，不去干预别的部门，那么政府的总任务也就趋于完成。（如图 22）曾有人提出