高等数学（理工类）

——全程导学及练习

主　编◎陈凡红
副主编◎王　云　聂廷芳　邵泽军

中国财富出版社
CHINA FORTUNE PRESS

高等数学

（理工类）

——全程导学及练习

主　编　陈凡红
副主编　王　云　聂廷芳　邵泽军
参　编　张　凤　张亚民

中国财富出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学：全程导学及练习：理工类／陈凡红主编．—北京：中国财富出版社，2015.7

ISBN 978－7－5047－5758－6

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①陈…　Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 157766 号

策划编辑　李彩琴　　责任编辑　于　淼　李彩琴

责任印制　方朋远　　责任校对　饶莉莉　　责任发行　敬　东

出版发行　中国财富出版社（原中国物资出版社）

社　　址　北京市丰台区南四环西路 188 号 5 区 20 楼　　邮政编码　100070

电　　话　010－52227568（发行部）　010－52227588 转 307（总编室）

　　　　　010－68589540（读者服务部）　010－52227588 转 305（质检部）

网　　址　http：//www. cfpress. com. cn

经　　销　新华书店

印　　刷　北京京都六环印刷厂

书　　号　ISBN 978－7－5047－5758－6/O·0046

开　　本　787mm×1092mm　1/16　　版　　次　2015 年 7 月第 1 版

印　　张　10　　印　　次　2015 年 7 月第 1 次印刷

字　　数　168 千字　　定　　价　24.00 元

前　言

本书是理工科高等数学的学习指导书．编写的目的是帮助学生正确理解和掌握高等数学的基本概念、基本理论、基本运算，学会对所学知识进行概括和总结，提高学生综合运用能力以及一定的抽象概括和逻辑思维能力．

本书共分六章，每章包括基本内容、重点、难点、基本要求、知识点概括、典型例题及其解析、自测题及其解答．我们在编写时力求内容完整，深入浅出，重点突出．知识点概括部分不是教材的简单重复，而是对有关理论及运算进行了系统地归纳与总结，典型例题部分侧重于启发学生的解题思路，总结解题规律，提高综合运用所学知识的能力．

建议读者在使用本书时，先看一下每一章的知识点概括及典型例题，面对例题或习题，首先应尽可能独自分析思考去解决这一问题，然后与解答核对运算结果正确与否．只有在找不到思路、无法入手的情况下，才可以借助解答．看完解答后不妨将解答遮住，自己再独立解答一遍，并考虑是否还有其他解法．这样，解题能力会提高得很快．

参加本书编写人员均为燕京理工学院数学教研室教师，分别为：王云（第一章）、陈凡红（第二章）、张凤（第三章）、聂廷芳（第四章）、张亚民（第五章）、邵泽军（第六章）．牛玉玲、陈凡红复责审核，全书由陈凡红统稿．

编写解答过程中，我们参考借鉴了国内部分优秀的传统教材，如同济大学数学系主编的《高等数学》，高等数学编写组编写的《高等数学上册习题解答》及毛京中主编的《高等数学学习指导》，在此谨致谢忱．

本书在编写之初及整个编写过程中得到了徐胜云院长的鼎力支持，在此一并表示感谢．

限于编者的学识水平和经验，书中难免有欠妥之处，恳请读者批评指正．

编　者

2015 年 4 月

目 录

第一章　函数与极限

一、基本内容

1. 映射与函数．
2. 数列的极限．
3. 函数的极限．
4. 无穷小与无穷大．
5. 极限运算法则．
6. 极限存在准则，两个重要极限．
7. 无穷小的比较．
8. 函数的连续性和间断点．
9. 连续函数的运算与初等函数的连续性．
10. 闭区间上连续函数的性质．

二、重点、难点

重点：1. 无穷小的运算与比较，极限的运算法则．

2. 两个重要极限及运用．

3. 函数的连续性与间断，应用连续性求极限．

4. 利用运算法则，重要极限，连续性，等价无穷小等求极限．

难点：1. 极限的概念与性质．

2. 利用综合方法求极限．

三、基本要求

1. 理解映射与函数的概念，掌握函数的表示方法，并会建立简单应用问题中的函数关系式.

2. 理解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形.

5. 理解函数极限的概念，理解函数的左右极限的概念，函数极限的性质.

6. 理解自变量不同变化趋势的极限.

7. 理解理解无穷小量和无穷大量的概念.

8. 掌握无穷小量、无穷大量以及有界量之间的关系，掌握它们的性质.

9. 理解两个极限的存在准则，并会利用它们求极限.

10. 掌握利用两个重要极限求极限的方法.

11. 掌握无穷小的比较的有关概念，会比较无穷小的阶，会用等价无穷小求极限.

12. 理解无穷小与极限的关系.

13. 理解函数连续性的概念，间断点的类型，闭区间上连续函数的性质.

14. 会判断函数的连续与间断，间断点的类型.

四、知识点概括

1. 函数

（1）函数

D 是一维数轴上的点集，对任意 $x \in D$，按照一定的对应法则 f，总有一个确定的数 y 与之对应，则称 y 是 x 的一个函数，记为 $y = f(x)$.

（2）基本初等函数

常值函数 $y=c$.

幂函数 $y = x^u$（u 是常数）.

指数函数 $y = a^x$（a 是常数，且 $a>0$, $a \neq 1$）.

对数函数 $y = \log_a x$（a 是常数，且 $a>0$, $a \neq 1$）.

三角函数如 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x$ 等.

反三角函数如 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x$ 等.

（3）复合函数

$y = f(x), u = g(x)$ 当 x 在 $g(x)$ 的定义域取值时，若 $g(x)$ 的函数值部分或全部落在 $y = f(u)$ 的定义域内，则 y 通过 u 的联系，成为 x 的函数，记为 $y = f(g(x))$，这个函数就叫做由函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 复合而成的复合函数.

（4）初等函数

初等函数是指基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合步骤所成的，并能够用一个式子表示的函数.

（5）分段函数

在不同的定义域上表达式不同的函数，称为分段函数.

（6）双曲函数

双曲正弦 $\mathrm{sh}x = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$；双曲余弦 $\mathrm{ch}x = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$；

双曲正切 $\mathrm{th}x = \dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}$.

（7）点的邻域

$U(x_0, \delta) = \delta(x_0) = \{x \mid |x - x_0| < \delta\}$ 是以 x_0 为对称中心的对称开区间.

2. 函数的极限

（1）自变量趋于有限值时的极限

设 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域 $\overset{0}{U}(x_0, \delta)$ 内有含义，若在 $\overset{0}{U}(x_0, \delta)$ 内自变量 x 无限趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 的值都无限接近于一个确定的常数 A，则称

A 为函数 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

（2）单侧极限

当 x 从左端无限趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限趋近于 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时的左极限，记为 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$；当 x 从右端无限趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限趋近于 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时的右极限，记为 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$.

（3）自变量趋于无穷大时的极限

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$，若 $|x|$ 无限增大时，$f(x)$ 的值无限接近于 A.

（4）极限的保号性

设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$，若 $A > B$，则存在 $\overset{0}{U}(x_0, \delta)$，使对 $x \in \overset{0}{U}(x_0, \delta)$，有 $f(x) > g(x)$.

（5）数列的极限

若数列 x_n 中，当项数 n 无限增大时，数列中的项 x_n 无限趋近于一个确定的常数 A，则称 A 为数列 x_n 的极限，记为 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = A$.

（6）极限运算法则

设 $\lim f(x) = A$，$\lim g(x) = B$（极限的趋近方式相同），则

$$\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B;$$

$$\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B;$$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0).$$

3. 两条极限存在准则，两个重要极限

（1）夹逼准则

当 $x \in \overset{0}{U}(x_0, \delta)$ 时，有 $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A = \lim\limits_{x \to x_0} h(x)$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$.

（2）单调有界准则

①单调上升有上界的数列，极限一定存在；

②单调下降有下界的数列，极限一定存在.

(3) 两个重要极限

① $\lim\limits_{x \to x_0} = \frac{\sin x}{x} = 1$（$x$ 为弧度）；

② $\lim\limits_{x \to x_0}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$，$\lim\limits_{x \to x_0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$.

4. 无穷小

(1) 无穷小与无穷大

① $f(x)$ 为无穷小$\Leftrightarrow \lim f(x) = 0$.

② $f(x)$ 为无穷大$\Leftrightarrow \lim f(x) = \infty$.

(2) 无穷小的比较

设 $\lim\alpha(x) = 0$，$\lim\beta(x) = 0$，

①若 $\lim = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小；

②若 $\lim = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的低阶无穷小；

③若 $\lim = \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c$（$c \neq 0$，$c \neq \infty$），则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的同阶无穷小.

(3) 几个常用的等价无穷小

当 $x \to 0$ 时，

①$\sin x \sim x$；　　②$\ln(1 + x) \sim x$；　　③$\mathrm{e} - 1 \sim x$；

④$\tan x \sim x$；　　⑤$\arctan x \sim x$；　　⑥$\arcsin x \sim x$；

⑦$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$；　　⑧$(1 + x)^{\mu} - 1 \sim \mu x$.

(4) 应用等价无穷小求极限（等价无穷小替换定理）

若在自变量的同一变化过程中，$\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta'$，则

$$\lim \frac{\alpha f(x)}{\beta g(x)} = \lim \frac{\alpha' f(x)}{\beta' g(x)}.$$

5. 函数的连续性与间断点

(1) 函数的连续性

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续.

（2）函数的间断点

①第一类间断点　左右极限都存在的间断点；

②第二类间断点　左右极限至少有一个不存在或不是第一类间断点的间断点.

（3）初等函数的连续性

一切初等函数在其定义区间内是连续的.

6. 闭区间上连续函数的性质

（1）最值定理

设 $f(x) \in C[a,b]$，则存在 $\xi_1, \xi_2 \in [a,b]$，使得对任意 $x \in [a,b]$，有 $f(\xi_1) \leqslant f(x) \leqslant f(\xi_2)$. 其中 $f(\xi_1)$，$f(\xi_2)$ 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值、最大值.

（2）介值定理

设 $f(x) \in C[a,b]$，$f(a) \neq f(b)$，则对介于 $f(a)$，$f(b)$ 之间的任意数 c，存在 $\xi \in (a,b)$，使 $f(\xi) = c$.

推论（零点存在定理）　设 $f(x) \in C[a,b]$，$f(a)f(b) < 0$，则存在 $\xi \in (a,b)$，使 $(\xi) = 0$.

7. 本章需要重点记忆的知识

（1）重点概念、性质

函数的定义、函数连续的定义、间断点及其类型、夹逼准则、单调有界准则等.

（2）重点公式

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$，　$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$（或 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$）；

常用极限　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\alpha}\ (\alpha > 0) = 1$　　特例　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x = \dfrac{\pi}{2}$　　$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$　　$\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arc\,cot} x = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arc\ cot} x = \pi$　　$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

五、典型例题及其解析

例 1.1　下列各题中，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg x$；

(2) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$，$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$；

(4) $f(x)=1$，$g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$.

解　(1) 不相同，因为 $\lg x^2$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$，而 $2\lg x$ 的定义域是 $(0,\infty)$.

(2) 不相同，因为两者对应法则不同，当 $x<0$ 时，$g(x)=-x$.

(3) 相同，因为两者定义域、对应法则均相同.

(4) 不相同，因为两者定义域不同.

例 1.2　设 $f(x-1)$ 的定义域为 $[0,a]$ $(a>0)$，则 $f(x)$ 的定义域为多少？

解　函数 $f(x-1)$ 的定义域是指 x 的变化范围，即 $0\leqslant x-1\leqslant a$，令 $t=x-1$，则 $-1\leqslant t\leqslant a-1$. 故对函数 $f(t)$ 而言，t 的变化范围为 $[-1,a-1]$，即所求函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,a-1]$.

例 1.3　设 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $f[g(x)]$ 等于多少？

解　当 $x\geqslant 0$ 时，$g(x)=-x\leqslant 0$，所以当 $x\geqslant 0$ 时有 $f[g(x)]=1+x$.

当 $x<0$ 时，$g(x)=x^2>0$，所以 $x<0$ 时有 $f[g(x)]=x^2+2$，故

$$f[g(x)]=\begin{cases}1+x, & x\geqslant 0\\ x^2+2, & x<0.\end{cases}$$

例 1.4　设 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x<1,\\ x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ $\varphi(x)=\begin{cases}x+2, & x<0,\\ x^2-1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f[\varphi(x)]$.

解 由题设 $f[\varphi(x)]=\begin{cases} e^{\varphi(x)}, & \varphi(x)<1, \\ \varphi(x), & \varphi(x)\geqslant 1, \end{cases}$ 分以下情况讨论.

(1) 当 $\varphi(x)<1$ 时，或 $x<0$，$\varphi(x)=x+2<1$，

即

$$\begin{cases} x<0 \\ x<-1 \end{cases} \Rightarrow x<-1.$$

或 $x\geqslant 0$，$\varphi(x)=x^2-1<1$，

即

$$\begin{cases} x\geqslant 0 \\ x^2<2 \end{cases} \Rightarrow 0\leqslant x<\sqrt{2}.$$

(2) 当 $\varphi(x)\geqslant$ 时，

或 $x<0$，$\varphi(x)=x+2\geqslant 1$，

即

$$\begin{cases} x<0 \\ x\geqslant -1 \end{cases} \Rightarrow -1\leqslant x<0.$$

或 $x\geqslant 0$，$\varphi(x)=x^2-1\geqslant 1$，

即

$$\begin{cases} x\geqslant 0 \\ x^2\geqslant 2 \end{cases} \Rightarrow x\geqslant\sqrt{2}.$$

综上所述，

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases} e^{x+2}, & x<-1, \\ x+2, & -1\leqslant x<0, \\ e^{x^2-1}, & 0\leqslant x<\sqrt{2}, \\ x^2-1, & x\geqslant\sqrt{2}. \end{cases}$$

例 1.5 利用极限的四则运算法则，求 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{\dfrac{9+\sin 3x-3}{x}}$.

解 对分子进行有理化，然后消去零因子，再利用四则运算法则和第一重要极限计算，即

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{9+\sin 3x-3}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{9+\sin 3x}-3)(\sqrt{9+\sin 3x}+3)}{x(\sqrt{9+\sin 3x}+3)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{9+\sin 3x}+3}$$

$$=3\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2}.$$

例 1.6　利用第一重要极限和函数的连续性，求 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$.

解　$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x-1}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}$$

$$=1\times\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

例 1.7　利用第二重要极限，求 $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}[(1-2x)^{\frac{1}{-2x}}]^{-2}=e^{-2}$.

例 1.8　求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot 2\cos x\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}2\cos x$$

$$=2.$$

例 1.9　求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x\sin x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\sin x}{x}$$

$$= 2.$$

例 1.10　求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin 2x}{x}$.

解　令 $t = \arcsin 2x$, 则 $x = \dfrac{1}{2}\sin t$，当 $x \to 0$ 时，有 $t \to 0$. 于是由复合函数的极限运算法则得

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin 2x}{x} = \lim_{t \to 0} \frac{2t}{\sin t} = 2.$$

例 1.11　求 $\lim\limits_{x \to +\infty} x\sin\dfrac{1}{x}$.

解　令 $t = \dfrac{1}{x}$. 当 $x \to +\infty$ 时，$t \to 0$.

$$\lim_{x \to +\infty} x\sin\frac{1}{x} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

例 1.12　求 $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin x}{\pi - x}$.

解　令 $t = \pi - x$，则 $\sin x = \sin(\pi - t) = \sin t$. 当 $x \to \pi$ 时，$t \to 0$.

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin x}{\pi - x} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

例 1.13　求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1} - 1}$.

解　$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1} - 1} = \lim\limits_{x \to 0} 4 \cdot \dfrac{\sin 4x}{4x} \cdot (\sqrt{x+1} + 1) = 4 \cdot 1 \cdot 2 = 8.$

例 1.14　求 $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 - \dfrac{2}{x}\right)^{-x}$.

解　令 $u = -\dfrac{x}{2}$，当 $x \to \infty$ 时，$u \to \infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{-x} = \lim_{u \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{2u} = \left[\lim_{u \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{u}\right]^2 = e^2.$$

例 1.15　求 $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$.

解　令 $u=2x$，则 $\frac{1}{x}=\frac{2}{u}$. 当 $x\to0$ 时，$u\to0$.

$$\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=[\lim_{u\to0}(1+u)^{\frac{1}{u}}]^2=\mathrm{e}^2.$$

例 1.16　利用无穷小量的性质（无穷小量乘以有界变量还是无穷小量），求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+\cos^2x-1}{(x+\sin x)^2}$.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+\cos^2x-1}{(x+\sin x)^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{\cos^2x-1}{x^2}}{\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)^2}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\frac{\cos^2x-1}{x^2}\right]}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)^2}=1.$

注意　其中当 $x\to\infty$ 时，$\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{x}\sin x$，$\frac{\cos^2x-1}{x^2}=\frac{1}{x^2}(\cos^2x-1)$ 都是无穷小量乘以有界变量，即它们还是无穷小量.

例 1.17　利用等价无穷小求极限，求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin ax}{\tan bx}(b\neq0)$.

解　因为当 $x\to0$ 时，$\sin ax\sim ax$，$\tan bx\sim bx$. 所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin ax}{\tan bx}=\lim_{x\to0}\frac{ax}{bx}=\frac{a}{b}.$$

例 1.18　利用等价无穷小求极限，求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x^3+3x}$.

解　因为当 $x\to0$ 时，$\sin x\sim x$，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x^3+3x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x^3+3x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2+3}=\frac{1}{3}.$$

例 1.19　利用函数的连续性计算函数极限，如

$$\lim_{x\to0}\left(x\mathrm{e}^x+\frac{1}{x-1}\right)=0\cdot\mathrm{e}^0+\frac{1}{0-1}=-1.$$

例 1.20　已知 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$，其中 a，b 为常数，求 a，b.

解　因为 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$，所以 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{x+1}-ax-b}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x^2}{x+1}-a\right)=0$，

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}=1.$$