



# 大跨度桥梁斜拉索的 参数振动研究

PARAMETRIC VIBRATION STUDY  
ON STAYED CABLE  
OF LARGE-SPAN BRIDGES

张丽娜 李凤臣 著



科学出版社

# 大跨度桥梁 参数振动研究

张丽娜 李凤臣 著

科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书是作者多年来科研成果的总结。书中作者针对可能引起拉索大幅振动的参数振动问题，以理论分析、模型试验和实际工程应用相结合的方法，深入系统地研究了大跨度桥梁斜拉索的参数振动问题。全书共六章，内容包括绪论、水平拉索的参数振动研究、斜拉索的参数振动研究、考虑索-梁组合的斜拉索参数振动研究、斜拉索在支座激励下的参数振动分析和斜拉索在支座激励下的参数振动试验研究。

本书既可供从事土木工程研究、设计与施工的人员参考，也可作为高等院校土木工程专业及相关专业博士、硕士研究生和高年级本科生的参考用书。

### 图书在版编目(CIP)数据

大跨度桥梁斜拉索的参数振动研究/张丽娜, 李凤臣著. —北京: 科学出版社, 2017

ISBN 978-7-03-051911-5

I. ①大… II. ①张… ②李… III. ①长跨桥—斜拉桥—参数振动—研究  
IV. ①U448.43②U448.27

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 038639 号

责任编辑: 王 钰 纪 兴 / 责任校对: 刘玉婧  
责任印制: 吕春珉 / 封面设计: 东方人华设计部

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

三河市骏杰印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2017 年 3 月第 一 版 开本: B5 (720×1000)

2017 年 3 月第一次印刷 印张: 9

字数: 172.00

定价: 70.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换(骏杰))

销售部电话 010-62136230 编辑部电话 010-62130750

版权所有, 侵权必究

举报电话: 010-64030229; 010-64034315; 13501151303

## 前　　言

现代斜拉桥的出现仅仅半个世纪，是一种年轻的桥型。现今世界上最大跨径斜拉桥——海参崴俄罗斯岛跨海大桥已建成投入使用，该桥最大跨径为 1104m，超过了中国苏通大桥的跨径——1088m，成为新的世界纪录。斜拉索是斜拉桥主要的受力构件之一，桥面的质量及桥上荷载大部分通过斜拉索传递到桥塔，其长度与斜拉桥的主跨长度同向变化，如中国香港 500 多米长的昂船洲特大桥索、中国内地 580m 长的苏通大桥索。随着斜拉桥跨度的不断增大，斜拉索变得越来越长，因此为保证整个桥梁结构的安全性、耐久性以及延长桥梁结构的使用寿命，斜拉索的振动问题越来越引起各国学者的高度重视。本书深入系统地研究了大跨度桥梁斜拉索的参数振动问题，研究内容具体包括以下几个部分：

第 1 章简要介绍了研究的背景、意义和基本概念。第 2 章分别建立了水平拉索的索-桥非耦合以及索-桥耦合两种参数振动模型，并进行了近似求解和数值模拟。第 3 章在考虑拉索倾角影响的情况下，建立了斜拉索在理想激励下的索-桥非耦合模型，以及在非理想激励下的索-桥耦合和索-桥-塔耦合的参数振动模型，然后进行求解分析。第 4 章建立了斜拉桥索-梁组合结构的非线性振动模型，进一步研究索-梁耦合模型下斜拉索的参数振动问题。第 5 章在对考虑索-梁组合结构的参数振动模型研究的基础上，进行了支座激励下斜拉索的参数问题研究。第 6 章进行了室内斜拉索模型在支座激励下的参数振动试验研究。

本书研究的创新点主要有以下几个方面：

- (1) 推导了索-桥-塔耦合参数振动模型的无量纲运动微分方程组，并通过数值方法对多尺度法得到的各内共振频点处的响应特性进行模拟分析。
- (2) 对考虑索-梁组合的参数振动问题进行研究，分析表明：当弹性梁与拉索满足参数振动频比关系时，即便是桥面梁的微幅振动，也将引起斜拉索的大幅振动。
- (3) 推导了斜拉索在支座激励下的无量纲参数振动微分方程，通过多尺度法的近似求解和数值模拟，得到除了支座激励频率单独或同时满足内共振频比关系将引起拉索的大幅振动外，当支座激励频率的组合频率满足内共振频比关系时，也将引起斜拉索的大幅振动。
- (4) 对桥面竖向激励下斜拉索的参数振动问题进行试验研究，试验分析和数值模拟的研究结果吻合较好，进一步验证了参数振动现象。

在编写本书时，得到了李惠教授、田石柱教授、李凤臣副教授和余祥讲师及

研究生崔鹏飞、罗垚、胡逸捷、彭慈德、邱立冬和舒婷等的大力帮助和支持，在此表示衷心感谢。

由于桥梁斜拉索的参数振动内容十分丰富，且处在不断发展中，书中不足之处在所难免，衷心希望有关专家和同行批评指正。

张丽娜

2016年11月

于佛山科技学院

# 目 录

<b>第1章 绪论</b>	1
1.1 本书的背景和意义	1
1.2 斜拉索振动及研究现状	2
1.2.1 斜拉索参数振动的相关研究	2
1.2.2 斜拉桥索-梁组合结构参数振动的相关研究	5
1.3 本书研究的主要方法及相关概念	6
1.3.1 非线性研究方法介绍	6
1.3.2 与参数振动有关的概念	7
1.4 本书的主要内容	8
<b>第2章 水平拉索的参数振动研究</b>	10
2.1 引言	10
2.2 不考虑索-桥耦合的水平拉索面内参数振动研究	10
2.2.1 水平拉索非耦合参数振动的运动微分方程	10
2.2.2 多尺度法求解	16
2.2.3 数值算例分析	21
2.3 考虑索-桥耦合的水平拉索面内参数振动研究	27
2.3.1 水平拉索索-桥耦合的参数振动运动微分方程	27
2.3.2 多尺度法求解	29
2.3.3 数值算例分析	35
2.4 本章小结	41
<b>第3章 斜拉索的参数振动研究</b>	42
3.1 引言	42
3.2 不考虑索-桥耦合的斜拉索面内参数振动研究	42
3.2.1 斜拉索在轴向激励下参数振动的运动微分方程	42
3.2.2 多尺度法求解	45
3.2.3 数值算例分析	47
3.2.4 参数分析	53
3.3 考虑索-桥耦合的斜拉索面内参数振动研究	55
3.3.1 斜拉桥索-桥耦合的参数振动运动微分方程	55
3.3.2 数值算例分析	56

3.4 考虑索-桥-塔耦合的斜拉索面内参数振动研究 .....	59
3.4.1 斜拉索索-桥-塔耦合的参数振动运动微分方程 .....	59
3.4.2 多尺度法求解 .....	62
3.4.3 数值算例分析 .....	66
3.5 本章小结 .....	77
<b>第 4 章 考虑索-梁组合的斜拉索参数振动研究 .....</b>	<b>79</b>
4.1 引言 .....	79
4.2 索-梁组合结构的参数振动研究 .....	79
4.2.1 索-梁组合结构的运动微分方程 .....	79
4.2.2 多尺度法求解 .....	85
4.3 数值算例分析 .....	87
4.3.1 索-梁组合结构 2 : 1 参数振动响应特性 .....	88
4.3.2 索-梁组合结构 1 : 1 主振动响应特性 .....	91
4.3.3 索-梁组合结构 1 : 2 超谐波振动响应特性 .....	93
4.3.4 索-梁组合结构其他频点的振动响应特性 .....	95
4.4 本章小结 .....	96
<b>第 5 章 斜拉索在支座激励下的参数振动分析 .....</b>	<b>98</b>
5.1 引言 .....	98
5.2 斜拉索在支座周期激励下的参数振动研究 .....	98
5.2.1 斜拉索在支座周期激励下运动微分方程的推导 .....	98
5.2.2 多尺度法求解 .....	102
5.3 数值算例分析 .....	105
5.3.1 支座激励的扫频分析 .....	105
5.3.2 支座激励组合频率的共振分析 .....	107
5.4 参数分析 .....	110
5.4.1 倾角的影响 .....	110
5.4.2 相位角的影响 .....	111
5.4.3 激励幅值的影响 .....	113
5.5 本章小结 .....	114
<b>第 6 章 斜拉索在支座激励下的参数振动试验研究 .....</b>	<b>116</b>
6.1 引言 .....	116
6.2 斜拉索在支座激励下参数振动的试验方案 .....	116
6.2.1 斜拉索模型概况 .....	118

---

6.2.2 试验原理及现场布置.....	118
6.2.3 试验系统.....	119
6.2.4 试验仪器及设备 .....	120
6.3 斜拉索自由振动试验 .....	121
6.3.1 模型拉索动力特性的有限元建模分析.....	121
6.3.2 模型拉索动力特性的室内试验分析 .....	123
6.4 斜拉索在支座周期激励下的内共振试验研究 .....	124
6.4.1 斜拉索在支座周期激励下 2：1 参数振动试验研究 .....	124
6.4.2 斜拉索在支座周期激励下 1：1 内振动试验研究 .....	127
6.4.3 斜拉索在支座周期激励下 1：2 内振动试验研究 .....	128
6.5 本章小结.....	129
结论.....	130
参考文献.....	132

# 第1章 绪论

## 1.1 本书的背景和意义

斜拉桥具有桥面体受压、支承体系受拉的特点，其桥面体系由加劲梁构成，其支承体系由钢索组成。因其具有造型美观、跨越能力大、无需造价昂贵的锚碇、跨径布置灵活等显著特点，是跨江跨河大跨度桥梁中的主要选择型式。在主跨 200~600m 的范围内斜拉桥最具有优势，当主跨超过 600m 时，为悬索桥的竞争桥型，但有研究表明<sup>[1]</sup>，斜拉桥主跨达到 1400m 后仍不失竞争力。1956 年瑞典的 Stromsund 桥（跨径 182m）拉开了现代斜拉桥建设的序幕，德国相继于 1957 年和 1959 年建成了 Theodor 桥（跨径 260m）和 Severvin 桥（跨径 302m），从此斜拉桥的建设得到长足的发展<sup>[2]</sup>。虽然斜拉桥起步比较晚，但由于强度高达 1.9GPa 高强钢丝的出现，正交异性板制造工艺的成熟，以及电子计算机技术的快速发展，使得斜拉桥的发展也十分迅速。至今全世界已建成的斜拉桥中，日本的多多罗（Tatara）大桥（主跨 890m，1999 年建成）和法国的诺曼底（Normandie）大桥（主跨 856m，1994 年建成）率先进入特大跨度桥梁领域。中国建造的主跨 1088m 的苏通大桥（2008 年 6 月正式通车）和主跨 1018m 的香港昂船洲大桥，是迄今为止跨径分别列世界第二和第三的特大型斜拉桥。

随着斜拉桥跨度的不断增大，斜拉索变得越来越长（苏通大桥最长拉索已达到 580m），因为索的大柔度、小质量和低阻尼等特点，极易在风、风雨、地震以及交通荷载等外部激励作用下发生各种振动。因此为保证整个桥梁结构的安全性、耐久性并延长桥梁结构的使用寿命，拉索的振动问题越来越引起各国学者的高度重视。在斜拉索各种类型的振动问题中，拉索发生大幅的参数振动和风雨激振现象已在多个国家的实桥现场观测中有所发现。1974 年在德国汉堡的 Koehlbrand 桥上观测到了拉索的大幅振动，振幅达 1m<sup>[3]</sup>；1977 年在法国 Brottonne 桥上观察到拉索的明显振动，振幅为 0.6m<sup>[4]</sup>；1986 年 Hikami 在日本 Meiko Nishi 桥上观测到了拉索风雨激振，振幅峰值达 0.55m<sup>[5,6]</sup>；1993 年在日本的一座人行斜拉桥中观测到主梁的侧弯振动引发了拉索的大幅参数共振，两者频率比为 2:1<sup>[7]</sup>；1996 年 10 月，在荷兰的 Erasmus 桥上观测到在风雨天气拉索最大振幅达 0.7m，振动以第二阶振型为主，同时桥面的振幅为 2.5cm<sup>[8]</sup>；1997 年中国杨浦大桥拉索发生大幅风雨激振，振幅达 1m<sup>[9]</sup>；2001 年中国洞庭湖大桥拉索发生风雨激振，振幅达 0.4m<sup>[10]</sup>。

由于拉索大幅振动所造成的工程事故也是屡见不鲜。1996 年 4 月，荷兰的 Erasmus 大桥，在开通后不到两个月，由于索的大幅振动被迫关闭<sup>[11]</sup>；1995 年，美国的 Fred Hartman 桥，由于斜拉索的风雨振动致使斜拉索根部索套疲劳开裂<sup>[12]</sup>；杨浦大桥在 1994 年、1995 年先后三次因拉索的振动而导致减振器脱落；南京长江二桥的拉索也发生过大幅振动的现象。因此拉索的振动问题引起了各国学者的高度重视，包括美国和日本在内的发达国家都成立了专门的研究团队，对多座实际桥梁进行现场的调研、观测研究，建立了庞大的数据库，对拉索的振动机理、振动控制方法以及在轴向激励下的动力响应等问题进行了广泛的研究，并取得了许多具有工程应用价值的研究成果<sup>[13,14]</sup>。

## 1.2 斜拉索振动及研究现状

对斜拉桥拉索的振动类型，不同学者有不同的分类方法，到目前为止，国内外学者公认的斜拉索可能发生的振动类型主要有风雨激振、涡激振动、尾流驰振、索内共振、抖振和参数振动等<sup>[15~30]</sup>。

### 1.2.1 斜拉索参数振动的相关研究

斜拉桥在风、地震以及车辆等动力荷载作用下，桥面和桥塔很容易发生振动，而拉索作为斜拉桥的主要受力构件，由于其具有质量小、阻尼小且柔度大的特点，当桥面或桥塔的激励频率与拉索的某阶固有频率成一定的倍数关系时，桥面或桥塔支撑点处的小幅激励将引起拉索的大幅振动，这种现象称为参数振动。

参数振动的激励依赖于时间并作为参数出现在系统的振动方程中<sup>[31]</sup>，与外激励不同的是，在外激励作用于系统的情况下，只有当激励频率接近系统的固有频率之一时，系统才能产生大的主共振响应，而参数激励则是当激励频率接近系统某阶固有频率的 2 倍时，小的激励将引起系统的大的参数共振响应。根据激励的幅值及频率大小是否随时间变化，将斜拉索的参数振动问题又分为两种情况进行讨论：当认为桥面或桥塔的质量远大于拉索的质量时，忽略拉索对桥面或桥塔的作用，此时激励不受响应的影响，视为理想激励，由支撑点不断地向拉索输入能量；当认为桥面或桥塔的振动与拉索的振动是相互耦合的，此时当外部给定拉索和桥面或桥塔质量块一个初始条件时，系统将在此初始条件下相互耦合共振，最终可能激起二者的大幅振动。

关于参数振动现象早在 1831 年就被学者 M. Faraday 发现，国内外学者从 20 世纪 70 年代开始对参数振动问题进行系统的研究。T. Iwatsubo（1973）<sup>[32]</sup>对两端固支梁和一端固支另一端简支梁在轴向参数激励下的不稳定区域进行了研究；G. Tagata（1977）<sup>[33]</sup>研究了拉索一阶模态的参数振动问题，把索认为是不计垂度

影响的无质量的弦，导出了无量纲的 Mathieu 方程；I. Kovacs（1982）<sup>[34]</sup>在其研究中指出，当桥面的竖向弯曲频率为拉索基频的 2 倍时，且当等效负阻尼克服拉索的机械阻尼后，拉索将发生不稳定的横向参数振动，同时他还给出了横向位移最大振幅的简化计算公式。

K. Takahashi（1991）<sup>[35]</sup>利用数值模拟方法，对两端处在同一水平高度的悬索结构在端部轴向周期激励下的动力响应问题进行了研究，分析了单模态以及多模态组合的参数振动问题，并讨论了拉索在轴向周期荷载作用下的动力稳定性问题，计算了小垂度拉索在第一失稳区受轴向周期荷载作用下的失稳条件。

J. L. Lilien（1994）<sup>[7]</sup>利用 G. Tagata<sup>[33]</sup>导出的标准弦的无量纲的 Mathieu 方程，取拉索的一阶模态进行分析，利用谐波平衡法进行非线性近似求解，讨论了拉索在各共振频点处的位移响应，并对拉索稳态振动的幅值和瞬态振动的索力表达式进行研究，给出了简化计算方法，并与 I. Kovacs<sup>[34]</sup>给出的简化公式进行比较分析，最后进行参数分析，讨论了拉索倾角、阻尼系数等参数的影响。

A. P. Costa（1996）<sup>[36]</sup>利用 Hamilton 原理推导了斜拉索在端部竖向激励下的非线性振动方程，此时取拉索的前两阶模态进行分析，考虑拉索的垂度曲线采用抛物线，研究了当斜拉索倾角发生变化时，拉索发生参数振动的振幅及索力的变化规律。同样采用谐波平衡近似分析方法，讨论了拉索发生内共振的共振频比点，通过数值模拟分析进一步验证了当端部激励频率与拉索的频率比为 1 或 2 时，拉索将发生大幅的参数振动现象。

M. Virlogeux（1998）<sup>[37]</sup>将拉索在端部正弦周期位移激励下的振动问题，分解为沿轴向的参数振动和垂直于轴向的强迫振动问题进行研究，并对强迫振动重点研究，认为当拉索和梁的频率比较接近时，二者间的耦合作用明显，桥面端部小的横向振动可能使拉索发生大幅振动，并给出了强迫振动的幅值计算公式和参数振动的不稳定区域的边界。

Q. L. Zhang（1999）<sup>[38]</sup>和 S. R. K. Nielsen（2002）<sup>[39]</sup>利用有限元法对在端部水平周期激励下的斜拉索参数振动问题进行了研究，前者对处于参数振动不稳定区域的拉索的动力响应问题进行了分析，而后者则采用平均法对小垂度拉索的面内外一阶模态的自参数共振问题进行了研究。除以上所述的研究成果之外，还有许多学者<sup>[40~46]</sup>对关于端部理想激励下，包括两端为同一水平高度的悬索或斜拉索的参数问题进行了广泛的研究，以上文献重点研究了拉索在端部谐波激励下，参数振动的振动特性及稳定性问题，而对拉索和桥梁主体结构的耦合作用问题的研究相对较少。

我国学者亢战（1998）<sup>[47]</sup>建立了索-桥耦合的振动分析模型，将拉索简化为集中质量块，将桥面影响简化为弹簧-质量块系统，并采用精细时程积分方法进行数值模拟研究，探讨了参数振动的可能性，并进行了参数分析。

李惠、陈文礼<sup>[48,49]</sup>针对斜拉索的参数振动及其控制问题进行了深入系统的研究，提出采用黏滞阻尼器对拉索参数振动进行控制，建立了黏滞阻尼器控制拉索参数振动的运动方程。从频域和时域以及起振幅值等角度，研究了最优黏滞阻尼器对不同垂度拉索参数振动的控制效果；此外，还研究了最优黏滞阻尼器安装位置对拉索参数振动控制效果的影响。研究表明，黏滞阻尼器可以有效控制拉索的参数振动，控制效果与拉索的激励幅值、最优阻尼器的安装位置和斜拉索的垂度有关。激励幅值越大，控制效果一般越差；黏滞阻尼器对大垂度拉索的控制效果不及对小垂度拉索的控制效果。

汪至刚、孙炳楠等（2000）<sup>[50,51]</sup>将拉索简化为弦，将桥面的影响简化为集中质量块，采用数值方法进一步对索-桥面耦合参数振动问题进行研究，得到了当质量块的频率为拉索频率的2倍时，即使在较小的初始位移条件下，拉索也将发生大幅的“拍”振现象。

魏建东（2000）<sup>[52]</sup>和李忠献（2004）<sup>[53]</sup>采用有限元法对参数振动问题进行研究，前者采用三节点二次曲线索单元，来考虑拉索的几何非线性，首先对拉索进行静力找形，通过求解拉索的非线性增量方程，对端部周期位移激励下的参数振动问题进行研究，由分析结果可知，面外激励仅能激起面外振动，且仅有面外存在干扰时，才能激励拉索面内和面外的组合大幅参数振动；而后者则将拉索简化成弦，将拉索离散成均匀集中质量的质点，将桥面同样简化为质量-弹簧系统，当满足参数共振的发生条件时，二者均出现大幅“拍”振特性。

陈水生（2003）在汪至刚<sup>[50]</sup>等人的研究基础上，考虑拉索垂度、倾角和几何非线性的影响，建立了更加精细的索-桥耦合振动模型，重点研究了斜拉索受端部轴向周期激励的面内参数振动问题<sup>[54]</sup>和索-桥耦合的非线性参数振动问题以及拉索的内共振问题<sup>[55,56]</sup>。

任淑琰（2007）<sup>[57]</sup>分别对不考虑垂度和考虑垂度的拉索的参数振动问题进行研究，采用多尺度法求解拉索参数振动方程的近似解析解，给出部分定性结论，采用数值模拟拉索在各种模型情况下的参数振动问题；同时对拉索在高斯白噪声和窄带随机激励下的动力响应问题进行了深入探讨，并采用 Monte-Carlo 方法进行模拟分析。

关于斜拉索的参数振动问题，众多学者在确定性分析研究的基础上，逐步开始进行拉索的随机参数振动分析。首先是 C. T. Georgakis（2005）<sup>[58]</sup>对拉索在随机端部位移激励下的参数振动问题进行研究，在面内白噪声作用下，得到了索-质量-弹簧系统端部质量块的随机位移响应，然后将此位移响应作用于拉索端部作为拉索的激励位移，进而求得拉索的非线性位移响应。

在文献[56]研究的基础上，Y. Xia（2006）<sup>[59]</sup>采用解析方法进一步对拉索在端部位移激励下的随机参数振动问题进行了研究，得到了主梁在白噪声激励下的

位移响应，研究结果表明：当白噪声的激励强度超过某一临界值时，拉索和梁的一阶模态位移将被激发出来。

### 1.2.2 斜拉桥索-梁组合结构参数振动的相关研究

在研究拉索的参数振动问题时，除了将桥面激励简化为理想激励和弹簧-质量块的索-桥耦合系统来进行研究外，国内外学者针对将拉索参数振动模型简化为柔性拉索与弹性梁组合的索-梁组合结构模型也进行了广泛深入的研究，此模型可以更加真实的考虑实际斜拉桥工程中，当拉索发生参数振动时，拉索与梁振动之间的相互耦合作用的影响。

A. S. Nazmy (1990)<sup>[60,61]</sup>通过建立精细有限元模型，重点对地震作用下斜拉桥的非线性反应问题进行分析，A. M. Abdel-Ghaffar (1991)<sup>[62]</sup>首先进行了斜拉桥索-梁组合结构在地震作用下的非线性反应分析。

B. M. Pacheco 和 Y. Fujino (1993)<sup>[63]</sup>共同在日本斜拉桥上发现了参数振动现象，经过实测结果研究表明，拉索参数振动现象主要是由于人行荷载激发了主梁的侧向弯曲振动模态，而主梁的侧弯模态与部分拉索的频率比近似满足 $2:1$ ，故引起了部分拉索的面外大幅参数振动现象。

Y. Fujino (1993)<sup>[64]</sup>为了进一步验证观测到的斜拉索的参数振动现象<sup>[63]</sup>，进行了三个自由度的索-梁组合结构的参数振动研究。其试验模型为单根拉索与单梁模型，将拉索的横向振动频率、梁的横向振动频率和竖向振动频率的比值近似为 $1:1:2$ 的关系，并分别在梁端的水平方向和竖直方向施加谐波激励。试验结果表明：当梁端水平方向的激励频率与梁的侧向弯曲频率接近时，此时梁的侧向弯曲模态被激发出来，且引起了拉索的大幅面外振动，而当梁的竖向激励频率与梁竖向弯曲频率接近时，梁的竖向弯曲模态被激发出来，此时梁的振动引起了拉索的大幅横向振动。

E. Caetano (2000)<sup>[65,66]</sup>对韩国 Jindo 斜拉桥进行模型试验，模型的几何相似比为 $1:150$ 。通过电磁激振器对斜拉桥索-梁组合的实体模型进行激励试验研究，得到索-梁组合结构的耦合作用规律；同时将模型在振动台上进行地震波激励试验，进行斜拉桥索-梁组合结构的地震反应分析，试验结果都发现二者之间存在强烈的耦合作用。

R. F. Fung (2002)<sup>[67]</sup>利用 Hamilton 原理和有限元法推导了描述群索-梁耦合作用的非线性耦合微分方程组，并对索-梁组合结构中的拉索长度及索力的时变问题进行了研究。

V. Gattulli (2002)<sup>[68]</sup>将索-梁组合结构模型进行简化，将斜拉索与主梁的一端均固定在刚性反力墙上，而梁的另一端与斜拉索连接。利用 Hamilton 原理得到了索-梁组合结构的横向运动微分方程，将拉索的垂度视为抛物线。取主梁的

一阶面内竖向弯曲振动模态和拉索的一阶横向振动模态进行分析，利用 Galerkin 方法对方程进行化简，并进行参数分析，重点考察了拉索与主梁的质量比、刚度比等参数对结构振动模态的影响，这里在分析时，考虑结构的模态为整体模态、局部模态和耦合模态。

V. Gattulli (2003<sup>[69]</sup>, 2005<sup>[70]</sup>) 进一步对索-梁组合结构的非线性振动问题进行研究，对整体-局部的 1:2 和 2:1 两种内共振情况进行详细分析，并通过数值模拟分析得到索-梁组合结构的内共振响应，同时通过建立有限元模型进行对比分析，并利用模型试验对分析结果进行验证。

赵跃宇 (2000)<sup>[71]</sup>引用索-梁的连接条件，分别建立了单梁单索和单梁双索两种索-梁组合结构的耦合非线性动力学模型，利用约化技术对方程组进行化简，同时采用多尺度摄动法对非线性方程进行近似求解，并对主梁与索之间的内共振以及参数共振进行数值模拟分析。

赵跃宇及研究团队<sup>[72~76]</sup>相继对拉索的面内外耦合振动、索-梁组合结构的非线性内共振响应等问题进行深入研究，并结合研究成果进行试验研究。

除了以上所述学者外，还有 Q. Wu (2003<sup>[77]</sup>, 2004<sup>[78]</sup>)、C. G. Koh (1999<sup>[79]</sup>, 2004<sup>[80]</sup>)、G. F. Royer-Carfagni (2003)<sup>[81]</sup>等众多学者<sup>[82~91]</sup>均对斜拉桥索-梁的参数振动问题进行过相关理论和试验研究，并给出了一些有意义的结论。

## 1.3 本书研究的主要方法及相关概念

### 1.3.1 非线性研究方法介绍

一般来说，描述非线性振动系统的非线性方程的精确解很难求得，大部分需要采用近似方法进行求解。目前非线性振动问题的主要研究方法有<sup>[31, 92~95]</sup>：

(1) 解析方法是研究非线性振动的定量分析方法，通过求出系统时间历程的近似解析表达式，从而得到系统的运动规律。较为常用的近似解析法有 KB 平均法、KMB 漸进法、摄动法、多尺度法、谐波平衡法、三角级数法、L-P 法以及奇异性理论等。解析法虽然能求得系统响应的解析表达式，但其最大的局限在于仅能得到与线性系统比较接近的弱非线性系统的近似解析解，而对于强非线性系统，其近似解很难准确地表达系统真实的振动特性，故在对非线性系统进行近似解析求解的同时，需要采用数值或试验方法进行对比验证。

(2) 数值模拟方法可以得到系统的时间历程响应，其一方面可以对解析法的分析结果进行补充验证，同时还可以解决解析法无法解决的复杂非线性振动问题。一般数值模拟的求解过程是将系统响应进行分离变量，并利用振型的正交性，通过 Galerkin 法对振动方程进行化简，最后采用数值积分方法（如 Runge-Kutta 法、Gill 法等）、有限差分法或有限元法等对非线性微分方程进行求解。在

采用数值方法进行求解时，重要的问题在于参数的选取需要比较细致，否则不能很好地得到系统的运动响应规律。

(3) 试验研究是以相似比理论为基础，根据试验目的进行模型设计，通过各种试验激励设备和信号采集设备进行室内模型试验，以获得非线性系统的动力响应特性。通过试验分析可以对理论解和数值解进行验证分析，并进一步验证理论解的合理性，以促进理论的发展。

### 1.3.2 与参数振动有关的概念

**参数振动：**参数振动是由振动系统随时间变化的参数（刚度、阻尼、质量或质量惯性矩）激发的振动，它本质上是一种非线性振动。当系统参数按照一定规律变化时，任意微小的扰动就会使系统产生大幅振动，系统参数振动的运动微分方程具有时变系数。按照参数随时间变化的规律分类，参数振动可分为确定性参数振动和随机参数振动<sup>[92]</sup>。

**外激励与参数激励：**当随时间变化的激励作为非齐次项出现在系统的运动微分方程中时，称为外激励；反之，当激励作为系数出现在系统的运动方程中时，则称为参数激励<sup>[31]</sup>。

**内共振：**对于多自由度非线性系统，当其两个或更多系统频率的比值为有理数或近似为有理数时，由于非线性的影响使得可通约关系中相应模态之间产生强烈耦合，这种现象称为非线性系统的内共振<sup>[93]</sup>。

**自参数激励：**多自由度非线性系统发生内共振时，也可以认为是某阶模态对其他模态施加了参数激励，从而发生了不同模态间的参数共振，因此又称为自参数共振<sup>[93]</sup>。

**主共振和主参数共振：**当系统固有频率接近激励频率时发生的共振称为主共振；当系统固有频率接近激励频率的  $1/2$  时发生的共振称为主参数共振，主参数共振又称为  $1/2$  亚谐波共振<sup>[93]</sup>。

**超谐波共振、次谐波共振和组合共振：**当系统固有频率接近激励频率的整数倍（该整数不为 1）时出现的现象称为超谐波共振；当系统固有频率接近激励频率的分数倍时出现的共振称为次谐波共振；对于多自由度系统，当系统不同阶固有频率之间的和或差与激励频率接近时产生的共振分别称为和型组合共振或差型组合共振<sup>[31]</sup>。

**超谐波响应和次谐波响应：**非线性系统在简谐激振力作用下，其强迫振动未必是简谐振动，响应波形可能发生畸变。其主要是由于非线性系统的响应波形中除了含有与激振频率相等的谐波外，还有超谐波响应和次谐波响应，但两种响应之间在振动性质上存在以下两点不同<sup>[31]</sup>：

(1) 超谐波响应在一般的非线性系统中或多或少的存在，而次谐波响应则只

在一定条件下产生。

(2) 系统中存在的阻尼，只能影响超谐波的振幅值；但对于次谐波，只要阻尼大小超过某一定值，就可以阻止次谐波的出现。

**非线性振动的稳定性：**稳定性问题主要针对系统在静止和振动两种均衡状态下受扰动的表现。当系统处于静止的均衡状态下，系统中各变量为常量；而当系统处于振动的均衡状态下，系统的各变量做连续周期性变化。当系统在不稳定的均衡状态附近受到扰动时，系统的运动将越来越远离这个均衡状态；当系统在稳定的均衡状态附近受到扰动时，系统的运动将逐渐回到这个均衡状态<sup>[94]</sup>。

## 1.4 本书的主要内容

本书在综述和借鉴国内外大量相关研究成果的基础上，以理论分析、模型试验和实际工程应用相结合的方法，深入系统地研究了大跨度桥梁斜拉索的参数振动问题。本书的研究内容具体包括以下几个部分：

首先在不考虑拉索倾角的情况下，分别建立了水平拉索的索-桥非耦合以及索-桥耦合两种模型，采用 Galerkin 法对两种模型的振动方程解耦并考虑拉索前两阶模态组合的影响，通过多尺度法对振动方程近似求解分析，利用数值模拟讨论两种模型下，拉索在各共振频点处发生内共振的位移响应特性及索力时程变化规律，并给出定性结论。

在考虑拉索倾角影响的情况下，建立了斜拉索在理想激励下的轴向周期激励模型，以及在非理想激励下的索-桥耦合和索-桥-塔耦合模型，然后对三种模型振动微分方程做无量纲化推导，并利用多尺度法进行近似求解分析，最后结合数值模拟方法对耦合方程组进行数值求解。重点讨论了拉索发生参数振动的起振时间，不同长度拉索发生参数振动的频比范围，以及索-桥-塔模型中，索、桥、塔三者同时发生参数振动所达到的大幅振动响应特性。

为了更好地认识斜拉索的参数振动问题，除了将桥面激励简化为理想激励和弹簧-质量块耦合系统进行参数振动研究外，通过斜拉桥索-梁组合结构的非线性振动模型，进一步研究索-梁耦合模型下斜拉索的参数振动问题。同样利用多尺度法对建立的无量纲形式的耦合振动微分方程进行近似求解分析，并探讨该模型的内共振响应特性，最后结合数值模拟方法，讨论在弹性梁的不同初始条件下，索-梁组合结构在不同内共振频比关系下的动力响应特性，进一步认识索-梁组合结构模型下的参数振动问题。

在考虑索-梁组合结构的参数振动模型时，斜拉索与弹性梁间发生相互耦合作用过程中，由于梁的刚度和质量较大，在索-梁连接处梁对斜拉索的作用相当于支座激励，但其位移激励的方向与斜拉索轴向成一定的夹角，有别于理想轴向

激励下拉索的参数振动和将桥面简化为弹簧-质量块的参数振动问题。此种激励形式更接近于实际情况，故为了认识支座激励下斜拉索参数振动问题，且便于试验室内的模型试验研究，建立了斜拉索在端部支座激励下的非线性振动模型，利用多尺度法对无量纲形式的振动微分方程进行近似求解，讨论支座激励下的斜拉索，当桥塔和桥面的激励频率单独或同时与斜拉索固有频率满足内共振频比关系时，以及支座激励频率间的组合频率满足内共振频比关系时，斜拉索的动力响应问题，并针对斜拉索倾角、支座激励间的相位角以及支座激励幅值进行参数分析。

为了进一步认识支座激励下斜拉索的参数振动问题，利用模型拉索进行了支座激励下斜拉索参数振动问题的室内试验研究。利用作动器模拟桥面，给拉索施加谐波激励，通过调整支座的位移激励幅值和激励频率，对内共振的频比关系 $2:1$ 、 $1:1$ 及 $1:2$ 进行多工况试验分析。