普通高等教育“十三五”规划教材
普通高等教育工程数学系列丛书

向量分析与场论

主编　李景和　赵娇云

科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材
普通高等教育工程数学系列丛书

向量分析与场论

李景和　赵娇云　主编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是为工科类专业本科生的“向量分析与场论”课编写的教材，内容包括向量分析，数量场的方向导数与梯度，向量场的通量与散度、环量与旋度、环量面密度，三种特殊形式的向量场，即保守场、管形场和调和场，平面向量场，正交曲线坐标系等. 每节均配有练习题，每章还配有习题，可供读者掌握教材中的基本知识和拓宽知识面使用，在书末附有练习题和习题的参考答案. 附录对书中介绍的哈密顿算子的相关性质作了总结，便于读者复习哈密顿算子的相关内容.

本书可作为工科类专业本科生的基础课教材，也可供相关工程技术人员参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

向量分析与场论 / 李景和，赵娇云主编. —北京：科学出版社，2017.7
普通高等教育“十三五”规划教材 普通高等教育工程数学系列丛书
ISBN 978-7-03-053184-1

Ⅰ. ①向… Ⅱ. ①李… ②赵… Ⅲ. ①向量分析-高等学校-教材 ②场论-高等学校-教材 Ⅳ. ①O183.1 ②O412.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 128181 号

责任编辑：滕亚帆 孙翠勤 / 责任校对：郑金红
责任印制：赵 博 / 封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
天津新科印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2017 年 7 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2017 年 7 月第一次印刷 印张：9 1/4
字数：186 000

定价：27.00 元

前　言

“向量分析与场论”是工科类专业本科生的一门公共基础课。编者从事该课程教学多年，在不断积累教学经验的同时，也在不断深化和丰富对所用教材的认识和理解. 为进一步提高该课程的教学效果，并使教材更加完善，我们在参考原教材和其他权威教材的基础上编写本教材.

本书从学生的实际情况和具体的教学时数出发，力求条理清楚，深入浅出，通俗易懂，便于阅读；同时，还充分考虑到本课程与高等数学的衔接，在符号的使用和叙述方式上尽量与之保持一致.

本书的第 1～4 章及附录由李景和编写，第 5，6 章由赵娇云编写，全书由李景和统稿并定稿.

何华教授、杨永发教授对本书的编写给予了大力支持和帮助，徐勇教授在百忙中仔细阅读了全书，并提出了许多宝贵的建议，编者在此一并表示衷心的感谢!

由于编者水平有限，书中尚有许多不足之处，恳请各位读者批评指正.

编　者

2017 年 2 月

目　　录

第 1 章　向 量 分 析

有些物理量是标量，如温度、长度、面积、体积、频率等；有些物理量是向量，如位移、速度、电场强度、力、动量等. 标量只有大小，没有方向；而向量既有大小，又有方向. 本章主要内容是向量及其运算、向量函数及其微分和积分等，该部分内容是场论的基础知识，同时也是研究其他许多学科的有力工具.

1.1　向量及其运算

1.1.1　向量的基本知识

在三维空间 $\mathbf{R}^3$ 中，任取一点为原点 O, 建立空间直角坐标系，以 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 分别表示 x 轴，y 轴，z 轴正向的单位向量. 设 M_1, M_2 是 $\mathbf{R}^3$ 中的任意两点，这两点的坐标分别为 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$, 记

$$a_x = x_2 - x_1, \quad a_y = y_2 - y_1, \quad a_z = z_2 - z_1,$$

则以 M_1 为起点，M_2 为终点的向量

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}, \tag{1.1}$$

称 a_x, a_y, a_z 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标或分量，也常将向量 $\boldsymbol{a}$ 表示为

$$\boldsymbol{a} = [a_x, a_y, a_z]^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}, \tag{1.2}$$

(1.1) 式和 (1.2) 式称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式.

对 $\mathbf{R}^3$ 中的任意点 M, 称以原点 O 为起点，M 为终点的向量 $\overrightarrow{OM}$ 为点 M 的**向径向量**(**或位置向量**)，记作 $\boldsymbol{r}$ (图 1.1). 显然，若 M 的坐标为 (x, y, z), 则点 M 的向径向量的坐标表示式为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=[x,y,z]^{\mathrm{T}}. \tag{1.3}$$

设 M_1 的向径向量是 $\boldsymbol{r}_1$，M_2 的向径向量是 $\boldsymbol{r}_2$（图 1.2），则

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1. \tag{1.4}$$

向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度称为 $\boldsymbol{a}$ 的模，记作 $|\boldsymbol{a}|$，由(1.2)式知

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \tag{1.5}$$

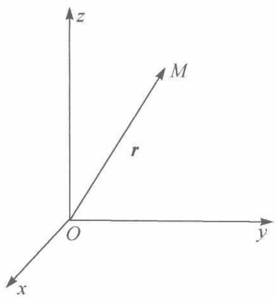

图 1.1

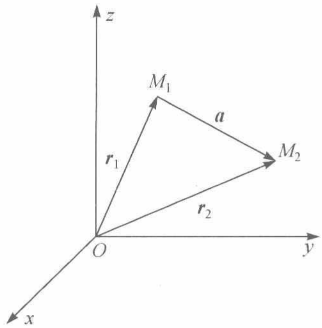

图 1.2

向径向量 $\boldsymbol{r}$ 的模为

$$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{1.6}$$

记 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$，$\boldsymbol{a}^0$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的**单位向量**，有

$$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0. \tag{1.7}$$

设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 Ox 轴，Oy 轴，Oz 轴的夹角分别为 α,β,γ，则称 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**方向余弦**. 因为

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\beta=\frac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

故有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}^0 &= \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{1}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}) \\ &= \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\boldsymbol{i}+\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\boldsymbol{j}+\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\boldsymbol{k} \\ &= \cos\alpha\boldsymbol{i}+\cos\beta\boldsymbol{j}+\cos\gamma\boldsymbol{k} = [\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma]^{\mathrm{T}},\end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦是其单位向量 $\boldsymbol{a}^0$ 的三个坐标，可以用来表示 $\boldsymbol{a}^0$, 有

$$\boldsymbol{a}^0 = [\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma]^{\mathrm{T}}. \tag{1.8}$$

我们所讲的向量均为**自由向量**，即当两个向量的模和方向都相同时，就认为这两个向量是相等的.

例 1.1 已知点 $M(3,2,-1)$，写出点 M 的向径向量 $\boldsymbol{r}$，并求出 $\boldsymbol{r}$ 的模 r， $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦和 $\boldsymbol{r}$ 的单位向量 $\boldsymbol{r}^0$.

解 $\boldsymbol{r}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{3^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{14}$, $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{14}},\quad \cos\beta=\frac{2}{\sqrt{14}},\quad \cos\gamma=-\frac{1}{\sqrt{14}},$$

故

$$\boldsymbol{a}^0=\left[\frac{3}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},-\frac{1}{\sqrt{14}}\right]^{\mathrm{T}}.$$

练习 1.1 设 $M_1(1,1,3)$, $M_2(4,-1,6)$, 写出以 M_1 为起点， M_2 为终点的向量 $\boldsymbol{a}$, 并求出 $\boldsymbol{a}$ 的模、$\boldsymbol{a}$ 的方向余弦和 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量 $\boldsymbol{a}^0$.

1.1.2 向量的运算

利用向量的坐标表示式，可以得到向量运算的坐标表示式.

(1) **加 法** 设向量 $\boldsymbol{a}=[a_x,a_y,a_z]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{b}=[b_x,b_y,b_z]^{\mathrm{T}}$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的加法为

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=[a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z]^{\mathrm{T}}. \tag{1.9}$$

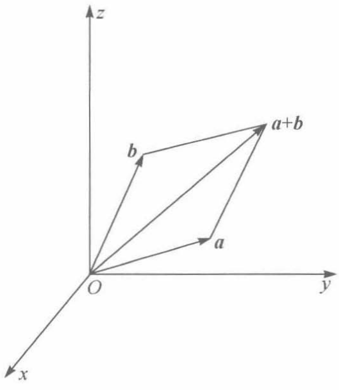

图 1.3

几何上，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 表示以向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的对角线向量

(图 1.3)

(2) **数乘** 设向量 $\boldsymbol{a}=[a_x,a_y,a_z]^{\mathrm{T}}$, k 为常数，则数 k 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积为

$$k\boldsymbol{a}=[ka_x,ka_y,ka_z]^{\mathrm{T}}. \tag{1.10}$$

几何上，$k\boldsymbol{a}$ 表示一个与 $\boldsymbol{a}$ 平行的向量.当 $k>0$ 时，$k\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $k<0$ 时，$k\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向.

(3) **数量积** 设向量 $\boldsymbol{a}=[a_x,a_y,a_z]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{b}=[b_x,b_y,b_z]^{\mathrm{T}}$, 则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积表示为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \tag{1.11}$$

两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积是一个数. 利用数量积，向量 $\boldsymbol{a}$ 的模可以表示为

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \tag{1.12}$$

设 θ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积也表示为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta, \tag{1.13}$$

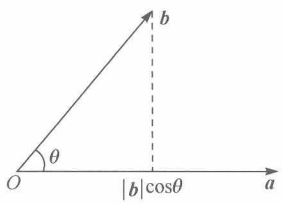

图 1.4

其中 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 称为向量 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的**投影**(图 1.4)，通常记为 $\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{a}}$.

由 (1.13) 式知，当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，此时称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **正交**. 显然，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的数量积还可以表示为矩阵相乘的形式，有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$.

(4) **向量积** 设向量 $\boldsymbol{a}=[a_x,a_y,a_z]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{b}=[b_x,b_y,b_z]^{\mathrm{T}}$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积表示为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k},$$

利用行列式，可将上式写为

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}. \tag{1.14}$$

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是一个向量，与向量 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ 均正交，因此

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$垂直于$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$所确定的平面. 当$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$平行时，有

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}.$$

交换向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的顺序，向量积改变符号，有

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}.$$

仍然设θ为向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角，则$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$的模满足

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta.$$

(5) **混合积** 设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$是三个向量，称

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$$

为三个向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$的**混合积**，记为$[\boldsymbol{abc}]$，即

$$[\boldsymbol{abc}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}. \tag{1.15}$$

设向量$\boldsymbol{a}=[a_x,a_y,a_z]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{b}=[b_x,b_y,b_z]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{c}=[c_x,c_y,c_z]^{\mathrm{T}}$，则由(1.11)式和(1.14)式，可以得到

$$[\boldsymbol{abc}]=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \tag{1.16}$$

由行列式的性质，可以看到，三个向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$的混合积具有循环轮换性，即

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}, \tag{1.17}$$

也可记为(图 1.5)

$$[\boldsymbol{abc}]=[\boldsymbol{bca}]=[\boldsymbol{cab}].$$

混合积的几何意义是以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$为棱的平行六面体的体积，且$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$按右手系排列时，$[\boldsymbol{abc}]$为正；$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$按左手系排列时，$[\boldsymbol{abc}]$为负(图 1.6).

(6) **三重向量积** 设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$是三个向量，称

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} \tag{1.18}$$

为三个向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$的**三重向量积**.

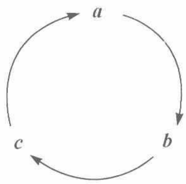

图 1.5

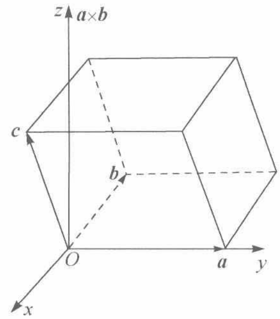

图 1.6

由向量积的定义，$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ 垂直于向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，故 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ 位于向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 所确定的平面上.

定理 1.1 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是三个向量，则

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}.$$

定理 1.1 表明，三重向量积 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ 可以表示为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的线性组合. 定理 1.1 的证明从略.

例 1.2 设电流 I 沿半径为 R 的圆柱体轴线通过，电流密度 $\delta=\dfrac{I}{\pi R^2}$ 为常数，根据物理学中的定律，电流 I 形成的磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 的模为

$$|\boldsymbol{H}|=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\delta r, & r\leqslant R,\\[2mm] \dfrac{1}{2r}\delta R^2, & r>R,\end{cases}$$

其中 r 为磁场中任意点 M 到圆柱体轴线的距离，$r=\sqrt{x^2+y^2}$，求磁场强度 $\boldsymbol{H}$.

解 选取坐标系 $Oxyz$, 使 Oz 轴与圆柱体轴线方向一致，指向电流 I 的方向(图 1.7)，设 $M(x,y,z)$ 为磁场中一点，取 $\boldsymbol{r}$ 为圆柱体轴线指向 M 的向量，$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$, 因磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 与电流 I 的方向按右手法则确定，故 $\boldsymbol{H}$ 与向量

$$
\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 0 & 0 & 1\\ x & y & 0\end{vmatrix}=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}
$$

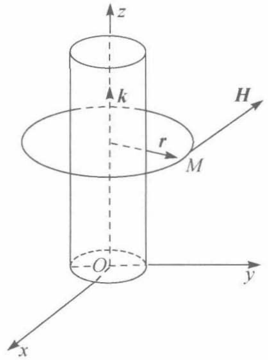

图 1.7

的方向一致，故

$$
\boldsymbol{H}^0=\frac{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}|}=\frac{1}{r}(-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}),
$$

于是

$$
\boldsymbol{H}=|\boldsymbol{H}|\boldsymbol{H}^0=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\delta(-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}), & r\leqslant R,\\ \dfrac{1}{2r^2}\delta R^2(-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}), & r>R.\end{cases}
$$

练习 1.2　设 $\boldsymbol{a}=[2,-1,-3]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b}=[1,1,-1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{c}=[1,1,-1]^{\mathrm{T}}$，(1) 求 $3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；(2)设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的起点均在同一点，证明它们的终点在同一平面.

练习 1.3　证明向量 $\boldsymbol{a}=\left[3,-\dfrac{1}{3},2\right]^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{b}=[4,6,-5]^{\mathrm{T}}$ 正交.

练习 1.4　证明向量 $\boldsymbol{a}=[4,10,6]^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{b}=[8,20,12]^{\mathrm{T}}$ 平行.

1.2　向 量 函 数

1.2.1　向量函数的概念

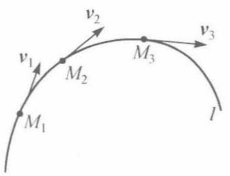

图 1.8

向量分为常向量和变向量. 我们把模和方向都不变的向量称为常向量(零向量的方向是任意的，可视为一个特殊的常向量)，把模和方向或其中之一改变的向量称为变向量. 例如，当质点 M 沿曲线 l 运动时，其速度 $\boldsymbol{v}$ 就是一个变向量(图 1.8).

下面引进向量函数的概念.

定义 1.1　设有实变量 t 和变向量 $\boldsymbol{F}$，如果对于 t 在某个范围 G 内的每一个数值，$\boldsymbol{F}$ 都有一个确定的向量与之对应，则称 $\boldsymbol{F}$ 为实变量 t 的**向**

量函数，记为

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(t), \tag{1.19}$$

并称 G 为向量函数 $\boldsymbol{F}(t)$ 的**定义域**.

向量函数 $\boldsymbol{F}(t)$ 在直角坐标系 $Oxyz$ 中的三个坐标都是 t 的函数：$F_x(t), F_y(t), F_z(t)$, 从而向量函数 $\boldsymbol{F}(t)$ 的坐标表示式为

$$\boldsymbol{F}(t)=F_x(t)\boldsymbol{i}+F_y(t)\boldsymbol{j}+F_z(t)\boldsymbol{k} \tag{1.20}$$

或

$$\boldsymbol{F}(t)=[F_x(t),F_y(t),F_z(t)]^{\mathrm{T}}, \tag{1.21}$$

其中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 是沿 x,y,z 三个坐标轴正向的单位向量. 可见，一个向量函数 $\boldsymbol{F}(t)$ 与三个有序的实数量函数 $F_x(t), F_y(t), F_z(t)$ 建立了一一对应的关系.

1.2.2 矢端曲线

为了直观地表示向量函数 $\boldsymbol{F}(t)$ 的变化状态，我们把 $\boldsymbol{F}(t)$ 的起点放在坐标原点. 这样当 t 变化时，$\boldsymbol{F}(t)$ 的终点 M 就描绘出一条曲线 l（图 1.9），曲线 l 称为向量函数 $\boldsymbol{F}(t)$ 的**矢端曲线**, 也称为向量函数 $\boldsymbol{F}(t)$ 的图形，同时称 (1.20) 式和 (1.21) 式为此曲线的**向量方程**.

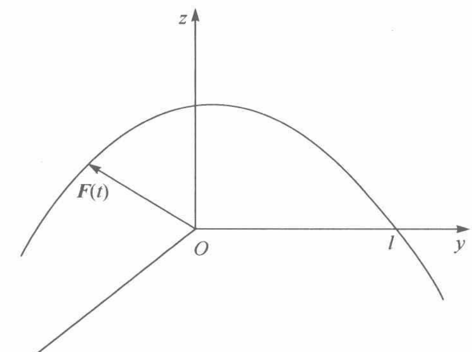

图 1.9

当我们把向量函数 $\boldsymbol{F}(t)$ 的起点放在坐标原点时，$\boldsymbol{F}(t)$ 就是其终点 M 的向径向量，$\boldsymbol{F}(t)$ 的三个坐标 $F_x(t), F_y(t), F_z(t)$ 恰好等于其终点 M 的三个坐标 x,y,z，即有

$$x=F_x(t), \quad y=F_y(t), \quad z=F_z(t), \tag{1.22}$$

(1.22) 式是曲线 l 以 t 为参数的**参数方程**.

显然，曲线 l 的向量方程 (1.20) 或 (1.21) 与曲线 l 的参数方程 (1.22) 有着一一对应的关系，只要知道其中一个，就可以写出另外一个.

例 1.3 平面曲线l的参数方程为

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t,$$

则l的向量方程为

$$\boldsymbol{r} = a\cos t\,\boldsymbol{i} + b\sin t\,\boldsymbol{j},$$

该曲线是xOy平面上的椭圆.

例 1.4 已知圆柱螺旋线(图 1.10)的参数方程为

$$x = a\cos\theta, \quad y = a\sin\theta, \quad z = b\theta,$$

则其向量方程为

$$\boldsymbol{r} = a\cos\theta\boldsymbol{i} + a\sin\theta\boldsymbol{j} + b\theta\boldsymbol{k}.$$

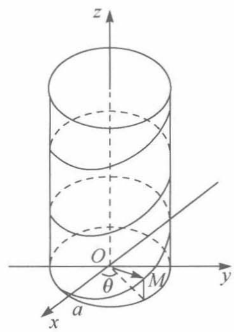

图 1.10

1.2.3 向量函数的极限和连续

定义 1.2 设向量函数$\boldsymbol{F}(t)$在t_0的某个去心邻域内有定义，$\boldsymbol{F}_0$是一个常向量，若对任意给定的$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，使得当$0 < |t - t_0| < \delta$时，有

$$\left|\boldsymbol{F}(t) - \boldsymbol{F}_0\right| < \varepsilon,$$

则称$\boldsymbol{F}_0$是向量函数$\boldsymbol{F}(t)$当$t \to t_0$时的**极限**，记为

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{F}(t) = \boldsymbol{F}_0. \tag{1.23}$$

这个定义与数量函数的极限定义完全类似，因此，向量函数也有类似于数量函数中的一些极限运算法则，例如

$$\lim_{t \to t_0} u(t)\boldsymbol{F}(t) = \lim_{t \to t_0} u(t) \lim_{t \to t_0} \boldsymbol{F}(t), \tag{1.24}$$

$$\lim_{t \to t_0} [\boldsymbol{F}(t) \pm \boldsymbol{G}(t)] = \lim_{t \to t_0} \boldsymbol{F}(t) \pm \lim_{t \to t_0} \boldsymbol{G}(t), \tag{1.25}$$

$$\lim_{t \to t_0} [\boldsymbol{F}(t) \cdot \boldsymbol{G}(t)] = \lim_{t \to t_0} \boldsymbol{F}(t) \cdot \lim_{t \to t_0} \boldsymbol{G}(t), \tag{1.26}$$

$$\lim_{t \to t_0} [\boldsymbol{F}(t) \times \boldsymbol{G}(t)] = \lim_{t \to t_0} \boldsymbol{F}(t) \times \lim_{t \to t_0} \boldsymbol{G}(t), \tag{1.27}$$

其中$u(t)$是数量函数，$\boldsymbol{F}(t), \boldsymbol{G}(t)$均是向量函数，而且当$t \to t_0$时，$u(t), \boldsymbol{F}(t), \boldsymbol{G}(t)$的极限均存在. 又由

$$\boldsymbol{F}(t) = F_x(t)\boldsymbol{i} + F_y(t)\boldsymbol{j} + F_z(t)\boldsymbol{k},$$

根据(1.25)式和(1.24)式，有

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{F}(t)=\lim_{t\to t_0}F_x(t)\boldsymbol{i}+\lim_{t\to t_0}F_y(t)\boldsymbol{j}+\lim_{t\to t_0}F_z(t)\boldsymbol{k}, \tag{1.28}$$

此式将向量函数的极限转化为三个数量函数的极限.

定义 1.3　设向量函数 $\boldsymbol{F}(t)$ 在 t_0 的某个邻域内有定义，如果有

$$\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{F}(t)=\boldsymbol{F}(t_0), \tag{1.29}$$

则称 $\boldsymbol{F}(t)$ 在 t_0 处**连续**.

显然，$\boldsymbol{F}(t)$ 在 t_0 处连续的充分必要条件是其三个坐标函数 $F_x(t), F_y(t), F_z(t)$ 在 t_0 处连续.

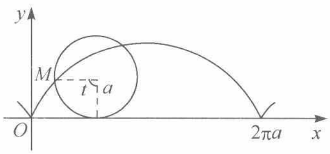

图 1.11

若向量函数 $\boldsymbol{F}(t)$ 在某个区间内的每一点处连续，则称它在**该区间内连续**.

练习 1.5　已知摆线(图 1.11)的参数方程为

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t),$$

求其向量方程.

练习 1.6　已知 $\boldsymbol{F}(t)=t^3\boldsymbol{i}+(3t-2)\boldsymbol{j}+(t+t^2)\boldsymbol{k}$，计算 $\lim\limits_{t\to 2}\boldsymbol{F}(t)$.

1.3　向量函数的导数与微分

1.3.1　向量函数的导数及其几何意义

设有起点在坐标原点 O 的向量函数 $\boldsymbol{F}(t)$，当 t 在其定义域内从 t 变到 $t+\Delta t$　$(\Delta t\neq 0)$ 时，对应的向量分别为 $\boldsymbol{F}(t)=\overrightarrow{OM}$，$\boldsymbol{F}(t+\Delta t)=\overrightarrow{ON}$ (图 1.12)，则

$$\boldsymbol{F}(t+\Delta t)-\boldsymbol{F}(t)=\overrightarrow{MN},$$

称为向量函数 $\boldsymbol{F}(t)$ 的**增量**，记作 $\Delta\boldsymbol{F}$，即

$$\Delta\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(t+\Delta t)-\boldsymbol{F}(t).$$

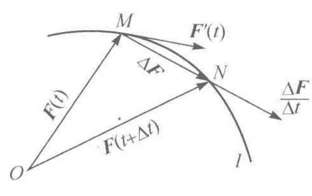

图 1.12

由此，我们给出向量函数 $\boldsymbol{F}(t)$ 导数的定义.

定义 1.4　设向量函数 $\boldsymbol{F}(t)$ 在 t 的某个邻域内有定义，并设 $t+\Delta t$ 也在这个邻域内，$\boldsymbol{F}(t)$ 对应于 Δt 的增量 $\Delta\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(t+\Delta t)-\boldsymbol{F}(t)$，若极限

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{F}(t+\Delta t)-\boldsymbol{F}(t)}{\Delta t}$$

存在，则称此极限为向量函数 $\boldsymbol{F}(t)$ 在 t 处的**导数**（简称**导矢**），记作 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}t}$ 或 $\boldsymbol{F}'(t)$，即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{F}(t+\Delta t)-\boldsymbol{F}(t)}{\Delta t}. \tag{1.30}$$

如图 1.12 所示，l 是 $\boldsymbol{F}(t)$ 的矢端曲线，$\dfrac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta t}$ 是在 l 的割线 MN 上的一个向量，$\Delta \boldsymbol{F}=\overrightarrow{MN}$. 当 $\Delta t>0$ 时，$\Delta \boldsymbol{F}$ 的方向与 t 值增大的方向一致；而当 $\Delta t<0$ 时（图 1.13），$\Delta \boldsymbol{F}$ 的方向与 t 值增大的方向相反，即指向 t 值减少的方向，这样 $\dfrac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta t}$ 总是指向 t 值增大的方向. 当 $\Delta t\to 0$ 时，割线 MN 的极限位置是曲线 l 在 M 处的切线，所以 $\boldsymbol{F}'(t)$（当其不为零时）是曲线 l 在 M 处的切线向量，指向对应 t 值增大的一方.

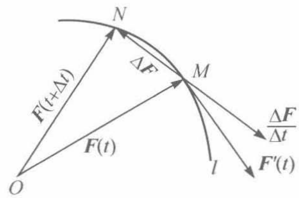

图 1.13

若 $\boldsymbol{F}(t)=F_x(t)\boldsymbol{i}+F_y(t)\boldsymbol{j}+F_z(t)\boldsymbol{k}$，且 $F_x(t), F_y(t), F_z(t)$ 均可导，则

$$\frac{\Delta \boldsymbol{F}}{\Delta t}=\frac{\Delta F_x(t)}{\Delta t}\boldsymbol{i}+\frac{\Delta F_y(t)}{\Delta t}\boldsymbol{j}+\frac{\Delta F_z(t)}{\Delta t}\boldsymbol{k},$$

令 $\Delta t\to 0$，得到 $\boldsymbol{F}'(t)$ 的坐标表示式：

$$\boldsymbol{F}'(t)=F_x'(t)\boldsymbol{i}+F_y'(t)\boldsymbol{j}+F_z'(t)\boldsymbol{k}, \tag{1.31}$$

此式将向量函数的导数转化为三个数量函数的导数.

例 1.5 已知圆柱螺旋线的向量方程为

$$\boldsymbol{r}(\theta)=a\cos\theta\,\boldsymbol{i}+a\sin\theta\,\boldsymbol{j}+b\theta\,\boldsymbol{k},$$

求 $\boldsymbol{r}'(\theta)$.

解 $\boldsymbol{r}'(\theta)=(a\cos\theta)'\boldsymbol{i}+(a\sin\theta)'\boldsymbol{j}+(b\theta)'\boldsymbol{k}=-a\sin\theta\boldsymbol{i}+a\cos\theta\boldsymbol{j}+b\boldsymbol{k}$.

例 1.6 曲线 l 的参数方程为 $l: x=t^2,\ y=2t-1,\ z=t^2-5t$，求曲线 l 在 $t=3$ 处的单位切线向量 $\boldsymbol{\tau}$.