牛顿科学馆

Newton Science Museum

几何变换漫谈

王敬赓◎编著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

Newton
Science Museum
牛顿科学馆

几何变换漫谈

王敬赓◎编著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

几何变换漫谈/王敬赓编著. —北京:北京师范大学出版社,2017.6
(牛顿科学馆)
ISBN 978-7-303-21944-5

Ⅰ.①几… Ⅱ.①王… Ⅲ.①平面几何－普及读物
Ⅳ.①O123.1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 015849 号

营销中心电话 010-58805072 58807651
北师大出版社学术著作与大众读物分社 http://xueda.bnup.com

出版发行:北京师范大学出版社 www.bnup.com
北京市海淀区新街口外大街 19 号
邮政编码:100875

印　刷:三河市兴达印务有限公司
经　销:全国新华书店
开　本:890 mm×1240 mm 1/32
印　张:6.5
字　数:145 千字
版　次:2017 年 6 月第 1 版
印　次:2017 年 6 月第 1 次印刷
定　价:24.00 元

策划编辑:岳昌庆 责任编辑:岳昌庆 肖光华
美术编辑:王齐云 装帧设计:王齐云
责任校对:陈 民 责任印制:马 洁

序 言

按照近代数学的观点，有一类变换就有一种几何学。初等几何变换既是初等几何研究的对象，又是初等几何研究的方法。《几何变换漫谈》较为详细地介绍了平移、旋转、轴反射及位似等初等几何变换的性质，并配有应用这些变换解题的丰富的例题和习题。书中还通过平行投影和中心投影，简要地介绍了仿射变换和射影变换。最后还直观形象地介绍了拓扑变换。

哲学家笛卡儿通过建立坐标系，用代数方法来研究几何，具体说就是用方程来研究曲线，这就是解析几何方法的实质。解析几何最初就叫坐标几何。《解析几何方法漫谈》通过解析几何创立的历史，解析几何方法与传统的欧几里得几何方法的比较，对解析几何方法进行了深入的分析，并介绍了解析几何解题方法的若干技巧，如轮换与分比、斜角坐标系的应用、旋转与复数及解析几何方法的反用，等等。

为了扩大青少年朋友们关于近代几何学的视野，向他们尽可能通俗直观地介绍一点关于拓扑学——外号叫橡皮几何学——的知识，《橡皮几何学漫谈》选择了若干古老而有趣的、但属于拓扑学范畴的问题，包括哥尼斯堡七桥问题、关于凸多面体的欧拉公式以及地图着色的四色问题，等等。当然也通俗直观地介绍关于拓扑学的一些基本概念和方法，还谈到了纽结和链环等。

北京师范大学出版社将上述3本“漫谈”，收录入该社编辑的

科普丛书——“牛顿科学馆”同时出版。

努力和尽力为广大青少年数学爱好者做一点数学普及工作，是我心中的一个挥之不去的愿望，谨以上述 3 本“漫谈”贡献给广大读者。

我把这 3 本小书都取名为“漫谈”，以区别于正统的数学教科书，希望这几本小书能体现科学性、趣味性和思想性的结合，努力实现“内容是科学的，题材是有趣的，叙述是通俗直观的，阐述的思想是深刻的”这一写作目标。

著名数学教育家波利亚曾指出，数学教育的目的是“教年轻人学会思考”。因此，讲解一道题时，分析如何想到这个解法，比给出这个解法更重要。遵循波利亚这一教导，在各本“漫谈”的叙述方式上，都力求尽可能说清楚“如何想到的”。始终不忘“训练思维”这一核心宗旨，这也可以说是上述 3 本“漫谈”的一个显著特点。总结起来就是从引起兴趣入手，通过训练思维，从而达到提高能力的目的。

王敬赓

2016 年 6 月于北京师范大学

前言

苏联几何学家亚格龙曾指出："在初等几何中，除去一些具体的定理之外，还包含了两个重要的有普遍意义的思想，它们构成了几何学的一切进一步发展的基础，其重要性远远超出了几何学的界限。其中之一是演绎法和几何学的公理基础；另一个是几何的变换和几何学的群论基础。这些思想都是内容丰富和卓有成效的。"笔者认为亚格龙的上述见解，抓住了初等几何的根本，为我们学习平面几何指明了方向。

在平面几何中加强几何变换的内容是当今世界中学平面几何教学改革的方向。

我国教育部最新颁布的《义务教育数学课程标准》(2011年版)中，在课程内容部分，强调"应当注重发展学生的空间观念"，其中专门列出"描述图形的运动和变化"。具体到初中阶段(7～9年级)的"几何与图形"部分(相当于初中平面几何)的教学内容中，"图形的变化"是初中几何三大块内容之一(其余两大块是"图形的性质"和"图形与坐标")分别讨论图形的轴对称、平移、旋转(包括中心对称)、相似(包括位似)和投影(也涉及平行投影和中心投影)。可见几何变换在新课标中举足轻重的地位。

而有关几何变换的这类课外读物很少见。老师们也在寻找有关参考书。北京师范大学出版社此时出版本书，正可谓天旱逢甘霖，正合需要。

作者编写本书的目的，就是向广大中学生朋友介绍关于几何变换的思想。除了介绍平面上的平移、旋转、轴反射(轴对称)及位似等常见的初等几何变换以外，为了开拓同学们的视野，还将介绍中学几何中未涉及的几何变换——仿射变换和射影变换。当然不是抽象地一般地研究它们，而是分别介绍它们的一种特殊情形——平行投影和中心投影。形象地说，平行投影就是把图形变成它在一组平行光线照射下的影子，中心投影就是把图形变成它在由一点发出来的光线束照射下的影子。

本书一方面要介绍各种几何变换的概念和性质以及图形在各种几何变换下的不变的性质和不变量；另一方面还要介绍各种几何变换在研究解决几何问题中的应用。可能的话，也要说到在其他方面的一些应用。几何变换既是几何研究的重要内容，又是解决几何问题的重要方法。我们用变换的观点研究几何，又用变换的方法解决几何问题。

介绍近代关于几何学的观点，离不开变换群的概念，本书最后一章将尽可能简单通俗地给出变换群的概念。研究图形在一种变换群下的不变性和不变量，就构成一种几何学，这就是近代关于几何学的群论观点。用这种观点看待几何学，就把包括欧氏几何学在内的各种几何学，既区分开又统一起来了。由于全书就是按照这个观点来写的，因此具有中学水平的读者，阅读最后这一章，了解其基本思想，除了个别述语以外，我想是不会有太多困难的。该章最后还极其通俗直观地介绍了“橡皮变换”和它对应的几何学——外号叫“橡皮膜上的几何学”或径称“橡皮几何学”的拓扑学的点滴。

为了加深对各种几何变换的理解，也为了提高同学们的解题能力，书中收集了应用各种几何变换解题的丰富的例题。按照美

国著名数学教育家波利亚的说法，中学数学教育的目标是“教会年轻人思考”。基于这一认识，本书对例题的处理，不是简单地给出解答，而是引导读者寻找和发现解题的方法，因此始终把重点放在回答“这个解法是如何想到的?”这一问题上。几乎对每一个例题，我都不厌其烦地尽可能详尽地加以分析。本书在各章末配置了习题。做习题可以帮助读者掌握方法，是对读者学习能力的挑战。书末附有参考答案，但建议读者不要轻易看它。在自己独立解出之后再看它，进行比较，作用会更好。若实在做不出，也可看答案。但看完后，还需自己独立做一遍，这样可能帮助会大一点。当然，如果你不想做题，就把参考答案当作例题看也挺好。

我的老师——北京师范大学刘绍学教授对本书的编写自始至终给予指导和帮助，书中与物理有关的内容为我的朋友——北京师范大学物理系杨敬明教授所提供，中国科学院数学所的李培信教授阅读了本书的初稿，提出了许多宝贵的意见，作者向他们致以诚挚的谢意。

这 3 本“漫谈”作为北京师范大学出版社的“牛顿科学馆”科普丛书出版，作者还要感谢北京师范大学出版社。

由于作者水平所限，书中的缺点和不足之处一定不少，欢迎批评指正。

王敬赓

2016 年 5 月于北京师范大学

目　录

§1. 将图形平行移动 /001

§1.1　平面上的一一点变换 /001

§1.2　平移变换的概念和表示 /006

§1.3　图形在平移下不变的性质和不变量 /009

§1.4　应用平移解题举例 /015

习题 1　/020

§2. 将图形旋转 /022

§2.1　旋转变换的概念和性质 /023

§2.2　图形在旋转下不变的性质和不变量 /025

§2.3　应用旋转解题举例 /029

§2.4　旋转的特例——中心对称 /034

§2.5　同向等距变换和刚体的平面运动 /041

习题 2　/047

§3. 轴反射 /049

§3.1　轴反射的概念和性质 /049

§3.2　应用轴反射解题举例 /052

§3.3　轴反射和平移及旋转的关系 /058

习题 3　/066

§4. 位似变换 /069

§4.1　位似变换的概念和性质 /069

§4.2　位似变换原理的应用 /076

§4.3　应用位似变换解题举例 /082

§4.4　位似变换与其他变换的关系 /086

习题 4 /089

§5. 平行投影 /090

§5.1 平面到平面的平行投影 /090

§5.2 图形在平行投影下不变的性质和不变量 /092

§5.3 平行投影在解题中的应用举例 /102

§5.4 平面仿射变换 /110

习题 5 /123

§6. 中心投影 /125

§6.1 中心投影及无穷远点与拓广平面 /125

§6.2 图形在中心投影下不变的性质 /128

§6.3 中心投影在航空测量中的应用 /133

§6.4 巧用中心投影解题举例 /135

§6.5 平面射影变换简述 /144

习题 6 /146

§7. 用变换群的观点描述几何学 /148

§7.1 什么是变换群 /148

§7.2 用变换群刻画几何学 /151

§7.3 几何学的广阔天地 /154

习题 7 /170

习题解答 /172

习题 1/172

习题 2/176

习题 3/180

习题 4/187

习题 5/189

习题 6/194

习题 7/197

§ 1. 将图形平行移动

§ 1.1 平面上的一一点变换

1. 从一条平行辅助线看用变动的观点研究几何

回想等腰梯形的判定定理：

对角线相等的梯形是等腰梯形。

如图 1.1，已知 $AD /\!/ BC$，$AC = BD$，求证 $AB = DC$。证明的关键一步是添加平行辅助线：过 D 作 $DE /\!/ AC$，与 BC 的延长线交于 E，于是得到 $\angle 1 = \angle 2$，$\triangle ABC \cong \triangle DCB$，从而 $AB = DC$。

你能告诉我是怎样想到添加平行辅助线 DE 的吗？

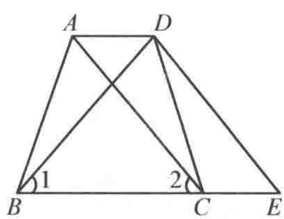

图 1.1

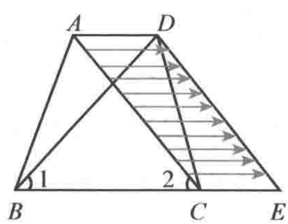

图 1.2

要证 $AB = DC$，考虑 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DCB$，已知 $AC = BD$，又 BC 是公共边，因此只需证出 $\angle 1 = \angle 2$，就有 $\triangle ABC \cong \triangle DCB$，从而就有 $AB = DC$。如何从已知条件 $AD /\!/ BC$ 及 $AC = BD$ 推出 $\angle 1 = \angle 2$ 呢？注意到 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 分别是 DB 及 AC 与 BC 的夹角，如果把 AC 沿着 BC 的方向平行推移至 DE 的位置，使它与 DB 成为 $\triangle DBE$ 的两条边（如图 1.2）。由于 AC 在平行推移过程中，与直

线 BC 的夹角始终保持相等，所以 $\angle E=\angle 2$，而且长度保持不变，所以又有 $DE=AC$，因而 $\triangle DBE$ 是等腰三角形。从而 $\angle 1=\angle E$，因此得到 $\angle 1=\angle 2$。“添加平行辅助线 DE”的念头，我想大概就是这样为了证明 $\angle 1=\angle 2$ 把线段 AC 平行推移到 DE 的位置而得到的。

上面我们是用变动的观点来分析的。用变动的观点研究平面几何，就是通过将图形进行适当的变换——平移、旋转、轴反射及位似等，并运用图形在变换下不变的性质，来寻求问题的解决。例如在上例中，我们将线段 AC 进行平移，并且用到了线段在平移过程中保持长度不变，以及与另一直线的夹角也保持不变的性质。因此，用变动的观点研究几何，首先就要研究各种变换，研究图形在各种变换下有哪些性质保持不变，以及如何应用这些不变的性质来解题等。

为研究平面上的各种变换做准备，我们先来介绍平面上的一一(点)变换。

2. 平面上的一一(点)变换

设 A 和 B 是两个非空集合，如果有一个确定的法则 f，使得对于集合 A 中的每一个元素 a，依照这个法则 f，都能得到集合 B 中的唯一一个元素 b，我们就把这个法则 f 称为集合 A 到集合 B 的一个映射(或对应)，记为 f：$A\longrightarrow B$ 或 $A\xrightarrow{f}B$。并把元素 b 叫作元素 a 在映射 f 下的像，把元素 a 叫作元素 b 在映射 f 下的原像(或逆像)，记为 $b=f(a)$ 或 $a\xrightarrow{f}b$。集合 A 中所有元素的像的集合记为 $f(A)$。

例 1　集合 A 取全体自然数的集合 $\mathbf{N}$，集合 B 取全体有理数的集合 $\mathbf{Q}$，法则 f 是“取倒数”，则对于每一个自然数 n，依法则 f(即

取倒数)都得到唯一一个有理数$\frac{1}{n}$。因此取倒数这个法则就是自然数集 **N** 到有理数集 **Q** 的一个映射：$f(n)=\frac{1}{n}$。

例 2　集合 A 和 B 都取全体整数的集合 **Z**，法则 f 是“加 1”，则对于每一个整数 m，依法则 f(即加 1)，都得到唯一一个整数 $m+1$，因此，“加 1”这个法则就是整数集 **Z** 到整数集 **Z** 的一个映射，或说是整数集 **Z** 到自身的一个映射，$f(m)=m+1$。

特别地，如果在映射 f：$A \longrightarrow B$ 下，集合 A 中不同的元素在集合 B 中的像也不同，而且集合 B 中的每一个元素，在集合 A 中都有原像，我们就称这样的映射 f 为一一映射。打个比喻，电影院上映一部极好的新片，当天晚场票全部售出，买到票的观众高高兴兴进入放映厅，该场电影的观众的集合(A)和放映厅中座位的集合(B)之间的对应法则——对号入座，就是一个一一映射(因为每位观众都有唯一的一个座位，所以是一个映射，又因为没有观众同时坐一个座位，而且没有一个座位空着，所以是一一映射)。

我们来看看前面例 1 和例 2 中的映射是不是一一映射。在例 1 中，虽然两个不同的自然数，取倒数可得两个不同的有理数，但由于不是每一个有理数都是某个自然数的倒数，即不是每个有理数都有原像，因此例 1 中的映射不是一一映射，不难验证例 2 中的映射确是一一映射。

我们对一一映射特别感兴趣。因为若 f 是 A 到 B 的一一映射，则集合 B 中的每一个元素 b，在集合 A 中有唯一的原像 a，使 $f(a)=b$，这样确定的由 b 得到 a 的法则，便是集合 B 到集合 A 的一个映射，这个映射称为映射 f 的逆映射，记为 f^{-1}：$B \longrightarrow A$。这就是说，凡是一一映射必有逆映射。例如，上述例 2 中的一一

映射 f，把任一个整数 m 变成 $m+1$，即 $f(m)=m+1$，则把 $m+1$ 变成 m 的映射就是 f 的逆映射 f^{-1}，即 $f^{-1}(m+1)=m$。

特别地，我们把集合 A 到自身的映射 $f: A \longrightarrow A$ 称为集合 A 的一个变换。集合 A 到自身的一一映射称为集合 A 的一个一一变换。前面的例 2 就是整数集 $\mathbf{Z}$ 的一个一一变换。

我们把平面看成是平面上的所有点组成的集合，通常用 π 表示。并把平面 π 到自身的映射，叫作平面 π 上的点变换，把平面 π 到自身的一一映射，叫作平面 π 上的一一点变换。

以后我们讨论的变换都是平面上的点变换，并将"点"字省略。在本书 §5 和 §6 中，也要涉及两个平面之间的映射。

在今后关于变换的讨论中，还常常用到如下几个重要概念：恒同变换，一个变换的逆变换及变换的乘积。

(1)把平面上任一点都变成该点自己的变换，或者说，使平面上每一点都保持不动的变换，叫作平面上的恒同变换，记为 I。对于平面 π 上的任一点 P，$I(P)=P$。显然，恒同变换是一一变换。

(2)设 T 为平面上的一个一一变换，则平面上每一点 P' 在变换 T 下都有唯一的原像 P，使 $T(P)=P'$，于是把 P' 变成 P 也确定平面上的一个变换，称为变换 T 的逆变换，记为 T^{-1}，$T^{-1}(P')=P$。于是凡一一变换皆有逆变换，且显见其逆变换仍是一一变换。

(3)已知平面上的两个一一变换 T_1 和 T_2，对于平面上任一点 P，设 $T_1(P)=P'$，$T_2(P')=P''$，连续施行这两个变换，得 $T_2[T_1(P)]=T_2(P')=P''$。由 P 和 P'' 为一对对应点所确定的变换记为 $T_2 \cdot T_1$，即 $(T_2 \cdot T_1)(P)=T_2[T_1(P)]=P''$，称为变换 T_1 和 T_2 的复合或变换 T_1 和 T_2 的乘积。乘积 $T_2 \cdot T_1$ 中的乘法记号 $\cdot$ 通常省略不写，直接记为 T_2T_1（如同在代数中，通常将乘积

$a \cdot b$ 记为 ab 一样)。

注意 在本书中，我们约定，在变换乘积的记号中，先施行的变换在记号中排在后面。

易知，两个一一变换的乘积仍然是一个一一变换。

在平面 π 上先施行一个一一变换 T，接着再施行 T 的逆变换 T^{-1}，结果平面 π 上每一点都变成该点自己，即得到一个恒同变换。因此，对于平面上的任何一个一一变换 T，总有 $T^{-1}T=I$。

容易看到，变换的乘法满足结合律，即对于任意三个一一变换 T_1，T_2，T_3，有 $T_3[T_2T_1]=(T_3T_2)T_1$。这是因为，对于任一点 P，设 $T_1(P)=P'$，$T_2(P')=P''$，$T_2(P'')=P'''$。则有

$$(T_3[T_2T_1])(P)=T_3\{(T_2T_1)(P)\}=T_3\{T_2[T_1(P)]\}$$
$$=T_3\{T_2(P')\}=T_3(P'')=P'''。$$
$$[(T_3T_2)T_1](P)=(T_3T_2)[T_1(P)]=T_3T_2(P')$$
$$=T_3[T_2(P')]=T_3(P'')=P'''。$$

这两个结果是相同的，所以 $T_3(T_2T_1)=(T_3T_2)T_1$。由于有结合律，因此在书写三个或更多个变换的乘积时，加括号是多余的，我们把上述三个变换的乘积，简单地写成 $T_3T_2T_1$。

但一般说来，变换的乘法却不满足变换律，即连续施行的两个变换，交换次序以后，可能得到不同的变换，即 $T_2T_1\neq T_1T_2$，这是变换的乘法与通常的数的乘法不同的地方。

在做了上述准备之后，我们现在可以来研究平面上的平移变换。

§1.2 平移变换的概念和表示

1. 平移变换的概念和表示

本章开头的例子中所做的将线段 AC 平行移动到 DE，实际是将线段 AC 上的每一点，沿着同一个方向（从 A 到 D 的方向）移动相同的距离（从 A 到 D 的距离），如图 1.2 中箭头所示。

把平面上的任一点 P，在该平面内，沿着一个定方向，移动定距离，变到点 P'，我们把平面上的这种（点）变换，叫作（平面上的）平移变换，简称平移。上述定方向称为平移的方向，定距离称为平移的距离。上述点 P' 称为点 P 在平移下的像，点 P 称为点 P' 在平移下的原像，点 P 和点 P' 称为平移下的一对对应点。

直观地说，平移变换就是将平面上的每一点作相同的平行移动。具体描述一个平移，既要指明平移的方向，又要指明平移的距离。

在几何上，我们常用带箭头的线段，来表示既有大小又有方向的量。既有大小又有方向的量称为向量，箭头所指的方向就是向量的方向，线段的长度就是向量的大小（也称为向量的模，或向量的长度）。以 A 为起点，B 为终点的向量（如图 1.3）用记号 $\overrightarrow{AB}$ 表示，读作"向量 AB"，它的方向是从 A 到 B，它的模记作 $|\overrightarrow{AB}|$，是线段 AB 的长度 $|AB|$。向量记号也可以用一个小写字母上方画一个箭头来表示，例如图 1.3 中的向量也可记作 $\boldsymbol{a}$（读作"向量 a"），它的模记为 $|\boldsymbol{a}|$。

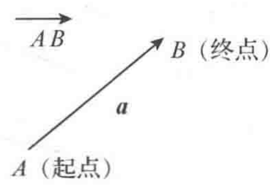

图 1.3

这样，平移的方向和距离就可用一个向量来表示。例如用平

移 $T(\boldsymbol{d})$表示这个平移的方向是 $\boldsymbol{d}$ 的方向，平移的距离是 $\boldsymbol{d}$ 的长度 $|\boldsymbol{d}|$。图 1.2 中的平移的方向和距离，可以用向量$\overrightarrow{AD}$来表示，这个平移可以记为平移 $T(\overrightarrow{AD})$。

2. 平移变换的特征

我们知道，在一个平移变换下，平面上的每一点都有唯一的像 P'，而且不同的点像也不同，不仅如此，平面上的每一点 Q'，都可以由平面上某一点 Q 平移得到，即每一点 Q'都有原像 Q，因此，平移变换是平面上的一一变换。

若在平移 $T(\boldsymbol{d})$下，点 P 的像是点 P'，点 Q 的像是点 Q'(如图 1.4)，则由平移的概念知，PP'与 $\boldsymbol{d}$ 的方向平行，且 $|PP'|=|\boldsymbol{d}|$，同样，QQ'也与 $\boldsymbol{d}$ 的方向平行，且 $|QQ'|=|\boldsymbol{d}|$。于是有 $PP' /\!/ QQ'$ 且 $|PP'|=|QQ'|$。这样我们就得到平移有如下特点：在平移下，每一对应点的连线都互相平行(平行于平移的方向)，每一对应点之间的距离都相等(等于平移的距离)。或者说，在平移下，每一对对应点所连线段平行且相等。

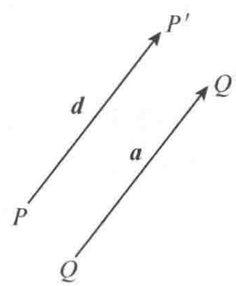

图 1.4

反之，若平面上的一个一一变换，使每对对应点的连线都互相平行，且每对对应点之间的距离都相等，则这个变换一定是一个平移(以对应点连线的共同方向为平移方向，以对应点之间的共同距离为平移距离所决定的平移)。

因此，根据平移变换的上述特征，我们要证明平面上的一一变换是平移，只需证明该变换下的任意两对对应点 P 与 P'，Q 与 Q'，有 $PP' \mathrel{\underline{\underline{/\!/}}} QQ'$。即可得该变换为平移。