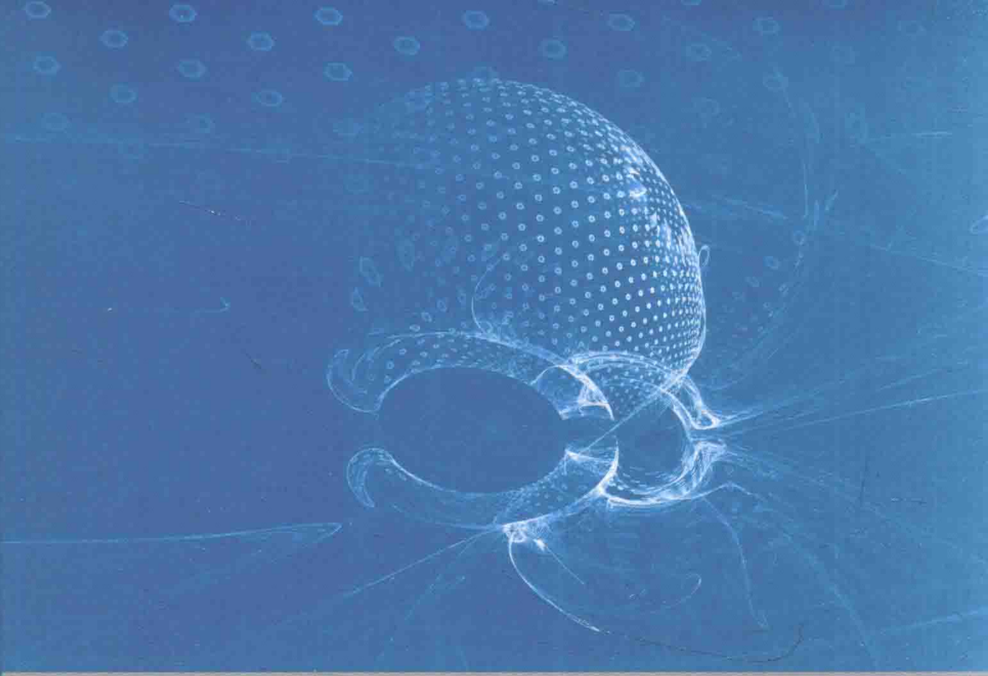

基于弱交叉克尔非线性的量子信息处理

修晓明 董莉 李微 郑军 刘旭阳 著

東北大學出版社
Northeastern University Press

基于弱交叉克尔非线性的量子信息处理

修晓明 董莉 李微 郑军 刘旭阳 著

东北大学出版社

·沈 阳·

图书在版编目（CIP）数据

基于弱交叉克尔非线性的量子信息处理 / 修晓明等著. — 沈阳：东北大学出版社，2017. 5
ISBN 978-7-5517-1582-9

Ⅰ. ①基… Ⅱ. ①修… Ⅲ. ①量子力学—信息处理 Ⅳ. ①O413. 1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 109430 号

出 版 者：东北大学出版社
地址：沈阳市和平区文化路三号巷 11 号
邮编：110819
电话：024-83687331（市场部）　83680267（社务办）
传真：024-83680180（市场部）　83687332（社务办）
网址：http://www.neupress.com
E-mail：neuph@neupress.com
印 刷 者：沈阳市第二市政建设工程公司印刷厂
发 行 者：东北大学出版社
幅面尺寸：170mm × 240mm
印　　张：8.75
字　　数：184 千字
出版时间：2017 年 5 月第 1 版
印刷时间：2017 年 5 月第 1 次印刷
策划编辑：王兆元
责任编辑：潘佳宁
责任校对：叶　子
封面设计：潘正一
责任出版：唐敏志

ISBN 978-7-5517-1582-9　　定 价：35.00 元

前　言

量子力学、信息科学在各自发展成熟之后，在20世纪80年代交叉融合，诞生了一门新的学科——量子信息学，这是信息科学史上的一次革命。量子信息学是一门基于量子力学，以量子纠缠、量子关联等作为主要物理资源，研究信息处理的一门新兴前沿学科。原则上，它可以实现绝对安全的通信与经典计算机无法企及的运算能力。

信息可以用物理系统作为载体进行编码，传送被编码的物理系统即是信息的传送，能够实现计算功能的物理系统即是“计算机”，对其进行可控性的演化即是信息处理，信息的提取通过测量编码物理系统得以实现。量子信息包括量子通信（Quantum communication）与量子计算（Quantum computation）。

在众多的量子信息载体中，光子是最有希望的候选者之一。光具有真空中最快的传输速度，光子与环境的耦合作用弱，具有较长的退相干时间以及光电转换与全光技术成熟、易于操控等优势。然而，由于光子之间的相互作用极其微弱，因此要应用它们构造量子纠缠态是非常困难的。如果不能使得多个光子纠缠在一起，具有强大运算潜力的量子并行计算与高速安全分布式量子通信网络将无法实现。

E. Knill，R. Laflamme 与 G. J. Milburn 建立了线性光学的标准模型。基于线性光学标准模型，光子之间产生相互作用，使得构造光子逻辑线路、完成量子信息处理任务成为可能。但是，线性光学线路也存在一些缺点：线路繁琐复杂、成功概率低，导致相应的量子信息处理任务完成效率低、物理资源浪费严重。由此看来，如果只是依靠线性光学标准模型，要想完成高效率的光子量子信息处理任务是十分困难的。

突破实现概率低这一瓶颈的方法之一是应用非线性光学方法。当用强光照射光学介质时，由于三阶非线性电极化作用，介质的折射率发生

感应变化，称为光学克尔非线性效应，包括自克尔非线性效应与交叉克尔非线性效应。交叉克尔非线性效应是指一个单光子对另一个单光子的相位调制。由于实际的交叉克尔非线性强度较弱，因此直接用于构造量子逻辑门等量子信息处理任务是不可能的。退而求其次，可以应用一个辅助的相干态作为桥梁（总线），使两个光子通过与它的相互作用而间接地产生相互作用。具体地，让两个光子与辅助相干态共同进入克尔介质，在一定的线路（光子路径）布局下，借助交叉克尔非线性相互作用，处于某些特殊路径的两个光子将使辅助相干态产生微小的相位移动。在对辅助相干态执行测量之后，根据测量结果执行经典反馈操作，使得光子产生期望的空间（路径）自由度纠缠，合理线路布局转换纠缠模式——空间自由度与极化自由度。这种弱交叉克尔非线性方法的优点是所需要的非线性强度较低，具有一定的实验实现可行性。在此基础上构造量子线路、完成量子信息处理任务，具有效率高、线路简单、成功率高、抵抗退相干等优点。例如 Nemoto 和 Munro 的两光子控制非门的理论构造方案，基于弱交叉克尔非线性，借助辅助光子，执行经典反馈，方案几近确定。

在国内外相关研究人员的努力之下，基于光学的量子信息处理及相关问题得到了一定程度的进展。基于交叉克尔非线性的量子信息处理方案比基于线性光学标准模型的量子信息处理方案有较大进步，线路相对简单，成功概率大幅提高，但要求系统具有较强的三阶光学非线性。基于弱交叉克尔非线性的量子信息处理方案，降低了非线性强度，但需要线路布局复杂，在完成某些量子信息处理任务时，尤其是较为复杂的量子信息处理任务时，会出现诸多问题——成功概率不高、可扩展性差、信息容量低、容错能力弱等。而且，目前所提出的量子信息处理方案多为理想情况下的理论方案，与实际应用尚有不小的距离，处于起步阶段，对环境条件要求高。解决这些问题的道路是荆棘密布的，尚无普适的方法能够完全排除所有困难障碍，不能一蹴而就。

本书研究基于弱交叉克尔非线性的量子信息处理，主要包括四个方面的内容。首先，基于弱交叉克尔非线性效应所实现的量子非破坏宇称分析，本书提出了量子密钥分发、量子隐私比对协议，其间考虑了窃听者可能实施的窃听方案以及相应的对策。其次，本书构造了两光子、三

光子极化比特量子逻辑门：两光子极化比特控制非门、两光子极化比特控制任意相位门以及三光子极化比特 Fredkin 门。最后，基于两光子极化比特控制相位反转门以及单光子操作，本书提出了光子极化纠缠簇态的制备、链接、解链等方案；应用多个纠缠进程模块，本书提出了三光子极化比特完美 W 态的制备方案。上述方案应用弱交叉克尔非线性，而不是强交叉克尔非线性，降低了实验要求。应用前馈技术，纠正错误结果，提高了方案实现的效率。合理化线路布局，简化了方案实现的线路。应用适合的测量方案，增加了方案应用的灵活性。

本书内容共分为五章，章节内容安排如下。

第一章为量子信息学基础。介绍量子信息学中的基本概念和基础知识，包括量子力学基础：量子力学的建立、量子力学的基本原理、量子测量、量子态叠加原理、量子不可克隆定理、时间演化算符与定态薛定谔方程的解、密度算符与密度矩阵；信息学基础：经典信息科学的建立、信息量与香农熵、冯·诺依曼熵；量子信息学基本概念：量子比特与布洛赫球、EPR 佯谬、Bell 不等式与 CHSH 不等式、薛定谔猫、量子纠缠与量子纠缠态、保真度、量子逻辑门、量子信息研究进展。

第二章简述可用于量子信息处理的线性光学方法与交叉克尔非线性光学方法。

第三章提出基于弱交叉克尔非线性的量子密钥分发、量子隐私比对协议。第一节提出常见的量子密钥分发协议、量子安全直接通信协议与量子隐形传态协议；应用基于弱交叉克尔非线性实现的非破坏宇称分析，第二节与第三节分别提出确定与随机的量子密钥分发协议与第三方辅助的两方量子隐私比对协议。

第四章提出基于弱交叉克尔非线性的两光子、三光子极化比特量子逻辑门。第一节与第二节分别提出基于弱交叉克尔非线性的两光子极化比特控制非门、相位门的构造方案；第三节提出三光子极化比特 Fredkin 门的构造方案。

第五章提出基于弱交叉克尔非线性的极化纠缠态的制备。基于控制相位反转门、分布纠缠门以及简化纠缠门等基本逻辑门，第一节提出极化纠缠簇态的制备、链接、解链等方案；基于空间纠缠、极化纠缠、路径合并三个进程，第二节提出三光子极化比特完美 W 态的制备方案。

本书中的主要成果来自国家自然科学基金项目（11674037，11544013，11305016，61301133）、辽宁省教育厅优秀人才支持计划（LJQ2014124）。本书的出版也得到了以上项目的资助，在此表示感谢。

在本书的写作过程中，得到了研究生王俊喜、李庆洋、林艳芳的帮助，作者们在此深表感谢。此外，我们还感谢渤海大学数理学院、科技处以及其他相关单位的同事给予我们的支持与鼓励。

囿于著者学识水平，书中必有不妥之处，恳请读者不吝赐教、批评指正。

著 者

2017 年 3 月

目 录

第一章 量子信息学基础

量子信息学是以量子力学作为主要理论基础，辅以信息学的交叉学科领域。

本章分为三节：第一节阐述量子信息学的量子力学基础。介绍量子力学的建立、量子力学的基本原理——五大公理假设、量子测量、量子态叠加原理、量子不可克隆定理、时间演化算符与定态薛定谔方程的解以及描述纯态和混态的密度算符和具体表象下所对应的密度矩阵等。第二节简述信息学基础，介绍经典信息科学的建立、通信中的信息度量概念：信息量与香农熵、冯·诺依曼熵。第三节介绍量子信息学常用概念：量子比特与布洛赫球、EPR 佯谬、Bell 不等式、CHSH 不等式与薛定谔猫与量子纠缠、常见的纠缠态、量子逻辑门以及量子信息研究进展等。

第一节 量子力学基础

在人们研究微观尺度的物质时，曾经在宏观世界创造辉煌的经典物理学失去了效力。在寻求对微观世界的合理解释时，量子理论应运而生。在玻尔、爱因斯坦、薛定谔、海森堡、狄拉克、冯·诺依曼等科学家的贡献下，量子力学从诞生走向成熟。量子力学是描述微观世界的物理理论，虽然现在还有人对它的基础提出质疑，但是以其原理为基础的实验事实都无可辩驳地证明了它的正确性。作为量子力学的重要应用，量子信息处理技术将成为未来国防、金融、科学研究、日常生活发展提高的主要推动力。

一、量子力学的建立[1]

17 世纪建立起来的力学体系——牛顿力学以及分析力学、19 世纪建立起来的电动力学——麦克斯韦电磁场理论，以及唯象热力学和统计物理学，使得经典物理学几近完美，自然界所发生的物理现象几乎都可以从中获取解答。在力学中，基于三个牛顿运动定律的牛顿力学以及以最小作用量原理为基础的分析力学已经完全可以解决所遇到的问题。麦克斯韦创立的电磁场理论能够解释分析所有电磁现象，亦可给出波动光学所涉及问题的答案。唯象的热力学与基于等概率原理的统计力学足可以解释和描述物质热运动、热现象的宏观物理规律以及相关的微观统计规律。

因此，19 世纪末的物理学家认为基于牛顿力学与分析力学、麦克斯韦电磁场理论和经典热力学与统计力学的经典物理学大厦已然建成，甚为宏伟壮观。然而，远见睿智的科学家意识到经典物理学的危机，“两朵乌云”笼罩在经典物理学的大厦之上：第一朵是指迈克尔逊-莫雷实验否定以太漂移理论，而第二朵是应用热学的能均分定理无法解释出现在气体比热容与热辐射能谱相关实验中的现象，最为著名的是出现在黑体辐射理论中的“紫外灾难”。寻找以太的否定结果诞生了“相对论”，颠覆了牛顿的绝对时空观，创建了爱因斯坦的相对时空观，描述了高速的宏观物理世界。“紫外灾难”诞生了“量子论”，在众多科学家的努力之下建立了描述微观世界的量子力学。

这里仅简要回顾在“第二朵乌云”中诞生的量子力学的发展进程。首先，简单描述黑体辐射与“紫外灾难”。物体中的原子、分子的热振动引发的发光过程称为热辐射，如白炽灯的发光。相同温度下，不同物体所反射的光的颜色和亮度一般不同。颜色较浅的物体吸收光的能力相对较弱、反射光的能力相对较强；反之，颜色较深的物体吸收光的能力相对较强、反射光的能力相对较弱。例如，白纸等物体的反射率比较高——接近八成，而煤炭等物体对光的吸收率很高。所谓“黑体”（维恩，1894），是指吸收率为百分之百的理想物体，它能够将入射到它上面的光（即电磁波）全部吸收而没有任何反射和透射。当然，真正的“黑体”在实际世界中并不存在。物理学所指的“黑体”是一种近似的黑体，即表面开有一个小孔的空腔。通过小孔入射到空腔中的光，在空腔中经过若干次反射，几乎消耗殆尽，最后只能以几乎为零的概率从小孔出射，这种开有小孔的空腔就可以视为一个“黑体”。在研究黑体辐射的理论与实验中，人们遇到了很大的困难。

德国物理学家维恩在 1896 年建立了黑体辐射的公式——维恩公式，该公式给出辐射能量是按波长分布的，但只适用于波长比较短、温度比较低的情况，而在长波长、高温度时与实验事实相矛盾。1900 年与 1905 年，英国物理学家瑞利与英国天文学家、物理学家琴斯提出了瑞利-琴斯公式，能够较好地解释在长波长与高温情况下黑体辐射的实验事实。然而，在短波长（高频率）的区域，应用瑞利-琴斯公式所得出的结论是：辐射的强度可以无止境地增加，这与实验数据以及物理常识严重不符，即是埃伦·菲斯特命名的“紫外灾难”，无法应用经典物理学的知识解释，给经典物理学提出了一大难题，震撼了整个物理学界。

为了解决“紫外灾难”的难题，德国物理学家普朗克在 1900 年提出了一个两变量的黑体辐射公式，该公式与实验观测极为符合，即为著名的普朗克公式。次年，他提出能量量子化假说（Quantum assumption），并以此为依据推出黑体辐射公式。能量量子化假说认为：物体吸收或发射的热辐射能量只能取一系列分立的值，即能量是“量子化”的，不是经典理论所认为的连续取值。笃信经典物理学的科学家是无法接受能量不连续这一概念的，但是“能量量子化”这一概念的引入使得黑体辐

射公式与实验观测之间的矛盾得到了完美解决。普朗克的能量量子化（“量子”）概念是经典物理学中所没有的，它的引入是人类认识微观世界物理规律的开端，是量子力学得以建立的基础，也是量子力学这一学科名称的由来。

1905 年，爱因斯坦首先接受了能量量子化假说，以此为基础提出了光量子（Light-quantum）的概念，认为辐射场是由光量子组成的。应用光量子的概念，爱因斯坦成功地解释了赫兹在 1887 年发现的光电效应（Photoelectric effect）。1916 年，实验验证了爱因斯坦给出的光子能量与辐射频率的关系，使得爱因斯坦获得了 1921 年的诺贝尔物理学奖。1911 年，卢瑟福根据 α 粒子散射实验提出了原子的核式模型。1913 年，玻尔针对经典电动力学与原子核式模型的矛盾，提出了原子的量子理论，很好地解释了氢原子光谱的问题，开启了认识原子的大门。玻尔的量子理论是一个半经典的理论，后来被称为“旧量子论”，它包含两条基本假设：① 定态：原子稳定地存在于具有离散能量的定态上，在定态上原子不辐射能量；② 频率条件：原子只有在两个定态之间跃迁时才会辐射或吸收电磁波，电磁波的频率由定态之间的能级差确定。

1924 年，法国物理学家德布罗意提出物质波（Matter wave）的概念，后人也称之为德布罗意波。德布罗意认为实物粒子如原子、电子也像光子一样具有波粒二象性，并给出了著名的关系式，$E = h\nu$，$p = h/\lambda$，其中 E，λ，ν 分别为实物粒子的能量、波长、频率，h 为普朗克常数。由于普朗克常数 h 很小，实物粒子的波长非常短，因此宏观物体的波动性不明显，不容易被观测出来。对于原子大小的物体，空间限度与粒子波长可以比拟，波动性不能被忽略。物质波的概念是后来提出的描述微观粒子运动规律的薛定谔方程的基础。1927 年，戴维逊和革末通过电子衍射实验精确地证实了德布罗意波的预言。

1925 年，德国物理学家海森堡建立了矩阵力学，把量子态用希尔伯特空间中的列矢量表示，力学量用矩阵表示。1926 年，奥地利的年轻物理学家薛定谔基于普朗克、爱因斯坦、玻尔、德布罗意等人的思想，在题为“量子化和本征值问题”的论文中引进了薛定谔方程，创立了波动力学。薛定谔方程描述波函数的时空变化规律，支配着微观世界的粒子运动。同年，薛定谔还证明了波动力学与矩阵力学的等价性。由于薛定谔提出的波动力学应用人们熟悉的波动表示和偏微分方程，较为适合初学者学习理解，因此成为量子理论教材以及其他基本应用的首选形式。薛定谔方程的提出为量子力学主体框架的建立奠定了坚实的基础，其地位相当于经典力学中的牛顿运动方程和经典电动力学中的麦克斯韦方程组，是量子力学的基本方程。1926 年，为了解释微观粒子的波动性，英籍德国理论物理学家波恩提出了概率波（Probability wave）的概念，给出了描述微观粒子波动性的波函数（Wave function）的统计诠释（Statistical interpretation）。该诠释认为物质波与波函数不像经典波那样代表实在物理量的波动，而是刻画微观粒子在空间概率分布的概率波。概率波的概念保留

了能量、动量等概念以及质量、电荷、自旋、寿命等内禀性质，去除了玻尔的旧量子论中轨道的概念和经典力学所采用的坐标动量来描述物质状态的概念。1927 年，海森堡提出了不确定关系，它也是量子力学所特有的，用来描述非对易共轭力学量的不确定度之间的关系。1928 年，英国物理学家狄拉克引入了量子力学的第三种描述方法——符号法，以简洁精巧的方式描述量子力学，在不涉及具体表象的情况下讨论量子力学问题。

1932 年，美籍匈牙利数学家、理论物理学家冯·诺依曼以希尔伯特空间作为量子力学的背景空间，建立了严密的量子力学体系，并对量子测量问题给予了精辟的论述。在众多量子力学奠基人的共同努力之下，量子力学的五大基本假设提出，量子力学理论逐步完善。

量子力学的横空出世，解决了“紫外灾难”等疑难问题，所得出的结论与实验完美符合，取得令人瞩目的成就。然而，爱因斯坦与玻尔所领导的两大学派在量子力学的理论根基等问题上进行了长达半个世纪的思辨论战。最后，在实验的证实下，量子力学取得了胜利。量子力学的非局域性、相干性为量子信息学的诞生奠定了理论基础。

二、量子力学的基本原理

量子力学是物理理论发展的一项重要成果。它为微观世界物理规律的研究提供了学术框架。在经典世界描述粒子的坐标与动量不再适用于微观世界。因此，在量子力学中要采用新的方法来描述一个微观粒子或包含多个微观粒子的微观体系的状态。学术界普遍认为量子力学的学术框架可以从以下 5 个基本假设出发，利用逻辑推理的方法得出。下面阐述量子力学的 5 条基本假设，也称为 5 条基本原理[2]。

(1) 用什么描述微观体系？微观体系的物理状态（量子态）可以用希尔伯特空间中的一个矢量 $|\psi(t)\rangle$ 来描述，$|\psi(t)\rangle$ 与 $C|\psi(t)\rangle$（C 为任意常数）描述同一物理状态。希尔伯特空间中的矢量相加得到新的矢量，相应地，任何两个量子态叠加也会得到新的量子态。线性空间理论为量子态叠加原理提供了数学基础，希尔伯特线性空间的假设与量子态叠加原理的数学意义等价。

例如，对于单量子比特系统，一个量子比特可以用一个二维的状态空间中的矢量表示。用 $|0\rangle$ 和 $|1\rangle$ 表示这个状态空间的一组正交基矢，空间中的任意状态矢量可以用式(1.1) 表示：

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \tag{1.1}$$

其中，α 和 β 是复数，满足 $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$。这与经典体系不同，经典体系只能处于或 $|0\rangle$ 或 $|1\rangle$ 的状态，而量子体系则可以处于式(1.1) 所描述的叠加态，一个既不同于 $|0\rangle$ 也不同于 $|1\rangle$ 的状态。

从波函数的统计解释来理解，可以看出波函数所对应的概率分布是对粒子测量

结果的一种预言、期望，所预言的结果是可能发生的，也可能不会发生。测量之前，测量结果并不是确定的，需要执行测量确定具体分布，而不是通过测量获知业已确定的分布。以上面的态为例，在执行 $\{|0\rangle,|1\rangle\}$ 测量后，获得 $|0\rangle$ 的概率是 $|\alpha|^2$，获得 $|1\rangle$ 的概率是 $|\beta|^2$。

(2) 如何描述可观测量？如何获取量子系统的信息？量子力学中的力学量 A，也称为可观测量，用希尔伯特空间中的厄米算符 $\hat{A}$ 表示。对力学量 A 测量所得到的结果，只可能是与该力学量对应的算符的本征值中的一个 (A_k)，测量后体系瞬间塌缩到对应的本征态 $|\psi_k\rangle$ 上，测量得到该本征态 $|\psi_k\rangle$ 的概率是 $|\langle\psi_k|\psi\rangle|^2/|\langle\psi|\psi\rangle|^2$，其中 $\langle\psi|\psi\rangle$ 是为了保证总概率为 1。对处于 $|\psi\rangle$ 态的量子体系的多个副本多次测量力学量 A，所得到的平均值是

$$\frac{\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle} \tag{1.2}$$

量子测量使得量子态受到干扰，使其突变到测量算符的与所获得的本征值所对应的本征态上，此过程即为“波包塌缩”。这一过程是随机的、不可逆的、非定域的，破坏量子相干性。

(3) 微观体系中每个粒子的直角坐标系下的正则位置算符 $\hat{X}_i$ ($i=1, 2, 3$) 与相应的正则动量算符 $\hat{P}_i$ 有如下的对易关系：

$$[\hat{X}_i,\hat{X}_j]=0,\quad [\hat{P}_i,\hat{P}_j]=0,\quad [\hat{X}_i,\hat{P}_j]=i\hbar\delta_{ij} \tag{1.3}$$

其中，$\hbar=h/2\pi$，$h=6.63\times10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$，称为普朗克常数。而不同粒子间的所有算符均相互对易。

(4) 微观体系状态的时间演化由薛定谔方程描述：

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\psi(t)\rangle=\hat{H}|\psi(t)\rangle \tag{1.4}$$

其中，$\hat{H}$ 是描述体系能量的哈密顿算符。薛定谔方程给出量子态的演化方式，其演化过程是可逆的、定域的、决定论的，而不是随机的、不可预测的，并不破坏量子态的相干性。对演化后的量子态进行量子测量，其测量结果却是随机的，量子态随机塌缩到测量算符的本征态之一。

(5) 全同性原理：交换量子体系内任两个全同粒子，不改变体系的对称性，这种对称性决定了两种不同的统计：玻尔-爱因斯坦统计与费米-狄拉克统计。

三、量子测量[2]

封闭的量子系统按照薛定谔方程演化。当进行测量时，实验设备将与系统发生相互作用，系统将不再封闭，即不再服从幺正演化。量子测量由一组测量算符 $\{\hat{M}_m\}$ 描述，它们作用在被测量子系统的状态空间上。设测量前量子系统的状态为 $|\psi\rangle$（已归一化），测量后获得结果 m 的可能性为

$$P(m)=\langle\psi|\hat{M}_m^+\hat{M}_m|\psi\rangle \tag{1.5}$$

被测量子系统的状态塌缩为

$$\frac{\hat{M}_m|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|\hat{M}_m^+\hat{M}_m|\psi\rangle}} \tag{1.6}$$

同时，测量算符满足完备性关系：

$$\sum_m \hat{M}_m^+\hat{M}_m = I \tag{1.7}$$

这表明获得所有可能结果的概率之和为1,即是

$$\sum_m p(m) = \sum_m \langle\psi|\hat{M}_m^+\hat{M}_m|\psi\rangle = \langle\psi|\sum_m \hat{M}_m^+\hat{M}_m|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle = 1 \tag{1.8}$$

例：在对单量子比特的测量中可以选取两个测量算符：$\hat{M}_0=|0\rangle\langle 0|$；$\hat{M}_1=|1\rangle\langle 1|$，均为厄米（Hermite）算符，满足 $\hat{M}_0^2=\hat{M}_0$；$\hat{M}_1^2=\hat{M}_1$，以及完备性关系 $I=\hat{M}_0^+\hat{M}_0+\hat{M}_1^+\hat{M}_1=\hat{M}_0+\hat{M}_1$。假设被测单量子比特态可以表示为 $|\psi\rangle=a|0\rangle+b|1\rangle$，则根据上面分析，获得测量结果为0的概率为

$$p(0)=\langle\psi|\hat{M}_0^+\hat{M}_0|\psi\rangle=\langle\psi|\hat{M}_0|\psi\rangle=|a|^2 \tag{1.9}$$

同理可得，获得测量结果为1的概率为 $|b|^2$。测量所获得的状态分别为

$$\frac{\hat{M}_0|\psi\rangle}{|a|}=\frac{a}{|a|}|0\rangle,\quad \frac{\hat{M}_1|\psi\rangle}{|b|}=\frac{b}{|b|}|1\rangle \tag{1.10}$$

1. 投影测量

上面的例子描述的测量方式就是一个投影测量，它是量子力学中最为常见的一种测量方式。投影算符是由相同的基右矢 $|\phi_i\rangle$ 和基左矢 $\langle\phi_i|$ 写在一起的算符，即是

$$\hat{P}_i=|\phi_i\rangle\langle\phi_i| \tag{1.11}$$

其中，$\{|\phi_i\rangle\}$ 为空间的一组基矢。

投影算符作用在右矢 $|\psi\rangle$ 上，可得

$$\hat{P}_i|\psi\rangle=|\phi_i\rangle\langle\phi_i|\psi\rangle \tag{1.12}$$

即是基右矢 $|\phi_i\rangle$ 乘以右矢 $|\psi\rangle$ 在基左矢 $\langle\phi_i|$ 上的分量 $\langle\phi_i|\psi\rangle$。

从几何意义上说，$\hat{P}_i$ 将 $|\psi\rangle$ 投影在 $|\phi_i\rangle$ 上，其分量为 $\langle\phi_i|\psi\rangle$，因此 $\hat{P}_i$ 称为投向 $|\phi_i\rangle$ 子空间的投影算符。

下面具体讨论投影算符的性质[3,4]。

（1）投影算符是厄米算符：

$$\hat{P}^+=(|\phi\rangle\langle\phi|)^+=((\langle\phi|)^+(|\phi\rangle))^+=|\phi\rangle\langle\phi|=\hat{P} \tag{1.13}$$

（2）投影算符具有幂等性：

$$\hat{P}^2=\hat{P}\hat{P}=|\phi\rangle\langle\phi|\phi\rangle\langle\phi|=|\phi\rangle\langle\phi|=\hat{P} \tag{1.14}$$

（3）投影算符具有正交性：

$$\hat{P}_i\hat{P}_j=\delta_{ij}\hat{P}_i,\quad \delta_{ij}=1(i=j);\ \delta_{ij}=0(i\neq j) \tag{1.15}$$

投影算符是线性算符，其本征值方程为

$$\hat{P}_i|\phi\rangle=|\phi_i\rangle\langle\phi_i|\phi\rangle=\lambda|\phi\rangle \tag{1.16}$$

其中，λ 和 $|\phi\rangle$ 为投影算符 $\hat{P}_i=|\phi_i\rangle\langle\phi_i|$ 的本征值和本征函数。式(1.16)同时左乘投影算符，可得

$$\hat{P}_i^2|\phi\rangle=|\phi_i\rangle\langle\phi_i|\phi_i\rangle\langle\phi_i|\phi\rangle=|\phi_i\rangle\langle\phi_i|\phi\rangle=\lambda^2|\phi\rangle \tag{1.17}$$

由以上两式可得 $\lambda^2=\lambda$，则本征值为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=0$，对应的本征函数为 $|\phi\rangle$ 和与之正交的函数。

(4) 投影算符具有完备性：

$$\sum_i\hat{P}_i=\sum_i|\phi_i\rangle\langle\phi_i|=1 \tag{1.18}$$

这在计算中很有用，可在适当的位置插入完备性关系。

(5) 投影算符是无逆算符：本征值谱中包含零本征值，因此没有逆算符。投影测量后波包塌缩，自然没有办法将其恢复为原波函数，也正因为此原因，才保证了量子通信的安全性。

(6) 投影算符具有幺迹性：

$$\begin{aligned}Tr\hat{P}_i&=\sum_n\langle n|\hat{P}_i|n\rangle=\sum_n\langle n|\phi_i\rangle\langle\phi_i|n\rangle\\&=\sum_n\langle\phi_i|n\rangle\langle n|\phi_i\rangle=\sum_n\langle\phi_i|n\rangle\langle n|\phi_i\rangle=1\end{aligned} \tag{1.19}$$

(7) 投影算符满足 $Tr\hat{P}_i^2=1$：

$$Tr\hat{P}_i^2=Tr\hat{P}_i=1 \tag{1.20}$$

(8) 力学量 F 的平均值：

$$\begin{aligned}\langle\hat{F}\rangle&=\langle\phi|\hat{F}|\phi\rangle=\sum_i\langle\phi|\phi_i\rangle\langle\phi_i|\hat{F}|\phi\rangle\\&=\sum_i\langle\phi_i|\hat{F}|\phi\rangle\langle\phi|\phi_i\rangle=\sum_i\langle\phi_i|\hat{F}\hat{P}|\phi_i\rangle\\&=Tr(\hat{F}\hat{P})\end{aligned} \tag{1.21}$$

2. 广义测量[5]

在实际应用中，由于测量仪器不可忽略，而且研究问题从封闭的小系统扩展到开放的大系统，测量问题已经不像以往那么简单了。通常考虑将所有与研究系统相关的其他系统都考虑进来，从而构成一个大系统，在此情况下，总能找到足够好的方法将这个大系统近似视为孤立体系。对孤立体系的测量一般是投影测量，当然也可采用非正交测量。如果对系统与环境所构成的大系统进行投影测量，可能的测量后的结果即为塌缩的相互正交的量子态，算符集合是相互对易的力学量完备组。然而，上述测量算符所对应的大空间中的相互正交的本征态在所研究的子系统的子空间中所对应的量子态未必相互正交。若在子系统中考虑问题，其中的观察者所看到