

高等数学

解题方法技巧归纳

(与同济大学数学系编·七版配套) 上册

◎毛纲源 编著

- △ 专题讲解 涵盖重点难点
- △ 通俗易懂 帮助记忆理解
- △ 同步学习 深入辅导指点
- △ 复习迎考 获益效果明显



回复“高等数学上册”
获精品课程

买书送课：配套精品课程讲解



华中科技大学出版社

<http://www.hustp.com>

高等数学

解题方法技巧归纳

(与同济大学数学系编·七版配套) 上册

毛纲源 编著

图书在版编目(CIP)数据

高等数学解题方法技巧归纳. 上册/毛纲源编著. —武汉: 华中科技大学出版社, 2017. 2

ISBN 978-7-5680-2595-9

I. ①高… II. ①毛… III. ①高等数学-研究生-入学考试-题解 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 034145 号

高等数学解题方法技巧归纳(上册)

毛纲源 编著

Gaodeng Shuxue Jieti Fangfa Jiqiao Guina

策划编辑: 王汉江

责任编辑: 王汉江

特约编辑: 陈文峰

封面设计: 杨 安

责任监印: 朱 霞

出版发行: 华中科技大学出版社(中国·武汉) 电话: (027)81321913

武汉市东湖新技术开发区华工科技园 邮编: 430223

录 排: 世纪文都教育科技集团股份有限公司

印 刷: 北京市兴城福利印刷厂

开 本: 787mm×960mm 1/16

印 张: 30.25

字 数: 557 千字

版 次: 2017 年 2 月第 1 版第 1 次印刷

定 价: 52.00 元



本书若有印装质量问题, 请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线: 400-6679-118 竭诚为您服务
版权所有 侵权必究



「作者简介」

毛纲源教授，毕业于武汉大学，留校任教，后调入武汉工业大学（现合并为武汉理工大学）担任数学物理系系主任，在高校从事数学教学与科研工作40余年，除出版多部专著和发表数十篇专业论文外，还发表了10余篇考研数学论文。他主讲微积分、线性代数、概率论与数理统计等课程。理论功底深厚，教学经验丰富，思维独特。曾多次受邀在各地主讲考研数学，得到学员的广泛认可和一致好评：“知识渊博，讲解深入浅出，易于接受”“解题方法灵活，技巧独特，辅导针对性极强”

“对考研数学的出题形式、考试重点难点了如指掌，上他的辅导班受益匪浅”……同样，他所编著的十余本考研辅导书籍也受到读者的极高评价，认为是“目前市面辅导书中解题归纳最优的书”“选题不偏不怪，方法全面”，甚至被称为“神书”，有兴趣的读者可以上网查询有关对他所著图书的书评。

（关键词搜索：毛纲源 论坛）

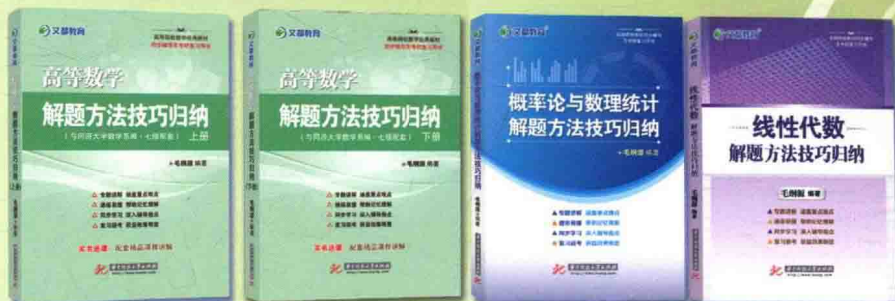
文都教育

毛纲源系列精品图书

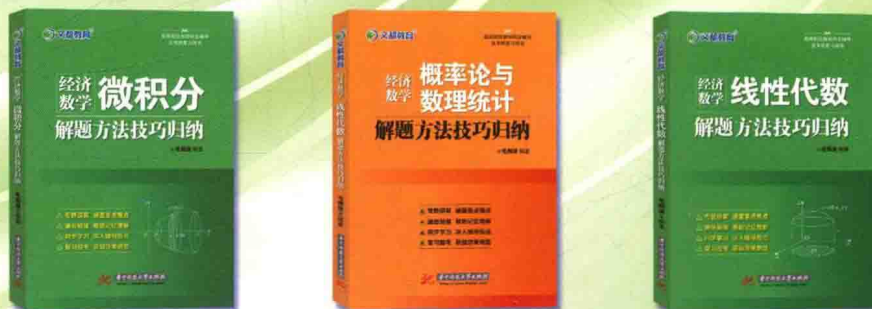
1. 考研数学辅导系列



2. 理工类数学辅导系列



3. 经济类数学辅导系列



郑重声明

买正版图书 听精品课程

毛纲源编著的《高等数学解题方法技巧归纳(上册)》《高等数学解题方法技巧归纳(下册)》《线性代数解题方法技巧归纳》《概率论与数理统计解题方法技巧归纳》等系列图书因其通俗易懂、解题方法技巧独特而深受广大考生欢迎。

但当前某些机构和个人非法盗印毛纲源老师的图书,这类图书印制质量差,错误百出,不仅使考生蒙受金钱与精力的损失,而且误导考生,甚至毁掉考生前程。

为了保障考生、作者及出版社等多方的利益,文都教育特发如下郑重声明:

1. 对制作、销售盗版图书的网店、个人,一经发现,文都教育将严厉追究其法律责任;
2. 凡文都图书代理商、合作单位参与制作、销售盗版图书的,立即取消其代理、合作资格,并依法追究其法律和相关经济责任;
3. 对为打击盗版图书提供重要线索、证据者,文都图书事业部将给予奖励;若举报者为参加考研的考生,文都图书事业部将免费提供考研图书资料和考前预测试卷;
4. 全国各地举报电话:010-88820419,13488713672
电子邮箱:tousu@wendu.com

为方便考生使用考研数学系列正版图书,特提供网上增值服务,考生登录文都教育在线(www.wendu.com)可听取文都名师精品课程。

华中科技大学出版社
世纪文都教育科技集团股份有限公司
授权律师:北京市安诺律师事务所

刘岩

2017年2月

前 言

高等数学(即微积分)是高校理工科最主要的基础课之一. 学生对它掌握得如何, 不仅直接关系到后续课程的学习, 而且对今后的提高与发展, 以及工作中的贡献, 都有着深远的影响. 为帮助广大学生和自学者学好高等数学, 为给他们备考研究生入学考试提供一份复习资料, 编写了这套《高等数学解题方法技巧归纳》(上、下册).

本书自出版以来, 深受读者欢迎, 多次重印, 畅销全国. 本书的修订广泛听取了读者的意见, 对前一版本的内容作了适当的调整、充实和删改.

本书将高等数学的主要内容按问题分类, 通过引例归纳总结各类问题的解题规律、方法和技巧. 它不同于一般的教科书和习题解答, 自具特色.

本书注重一题多解, 注意分析各种解题方法的特点与联系, 分析题中条件与所得结果之间的联系, 灵活地将解题方法和技巧与所学基本理论联系起来. 这样不仅可以培养读者的灵活思维能力, 达到化难为易、举一反三的学习效果, 而且在学会解题的同时, 也必将会提高分析问题和解决问题的能力.

本书还注重各种重要题型的解法技巧的归纳和总结. 试题是无限的, 而题型是有限的, 只有掌握好各类题型的解法与技巧, 才能以不变应万变, 找到解题的切入点 and 突破口.

此外, 还在不少例题后加写“注意”部分, 内容涉及基本概念和基本理论的深入理解、解题方法小结及常见错误的剖析、某些例题中结论的推广等.

本书实例较多, 且类型广、梯度大. 例题和习题中一部分取材于面向 21 世纪课程教材《高等数学》(上册·第七版)(同济大学数学系编, 高等教育出版社)中的典型习题; 另一部分取材于历届全国硕士研究生入学统一考试数学试卷中的考题.

考研试题既反映了“数学考试大纲”对考生的要求, 又蕴涵着在大纲指导下的命题思想. 通过对考研试题的研讨, 使有志于攻读硕士学位的学生“平战结合”, 了解考研试题的特点及其逐年发展趋势, 从知识上、题型上、方法和技巧上做好应试准备. 若把这些考研试题全部理解消化, 将为考研成功打下坚实的基础.

考研试题并非都是难题, 其突出特点是全面、准确地体现数学教学大纲和考研大纲的要求. 多做考题并由此总结、归纳解题规律、方法和技巧, 无疑对于启迪思维、开发智力、提高能力, 加深对高等数学基础知识的理解都是大有好处的.

本书也可供全日制大专院校、电大、职大、函大、夜大等广大学生学习高等数学(微积分)时阅读和参考;对于自学者和有志攻读硕士研究生学位的青年,本书更是良师益友;对于从事高等数学(微积分)教学的教师也有一定的参考价值.

编写本书时,参阅了有关书籍,引用了一些例子,恕不一一指明出处,在此一并向有关作者致谢.孙晞老师参加了书稿的校对和绘图,特此致谢.

尽管作者有过多年从事高等数学和考研数学辅导的教学实践,但由于水平有限,加之时间仓促,书中难免有不足和错误之处,恳请读者不吝指正.

另外,准备考研的朋友可以参考由本人编写、华中科技大学出版社出版的一套优秀考研书籍:

◎考研数学常考题型解题方法技巧归纳(数学一、二、三)

◎考研数学历年真题分题型详解(数学一、二、三)

学习交流群:149812311

毛纲源

2017年2月

目 录

第 1 章 函数、极限、连续	(1)
1.1 函数及其性质	(1)
1.2 极限	(25)
1.3 函数的连续性	(71)
第 2 章 导数与微分	(95)
2.1 导数定义的几点应用	(95)
2.2 分段函数可导性的判别及其导数、待定常数的求法	(101)
2.3 几类函数一阶导数的求法	(109)
2.4 高阶导数的求法	(117)
2.5 隐函数的导数求法	(122)
2.6 由参数方程所确定的函数的导数求法	(126)
2.7 导数的几何意义和物理意义的应用	(133)
2.8 微分的求法	(139)
第 3 章 中值定理及导数的应用	(144)
3.1 中值等式命题的证法	(144)
3.2 中值不等式命题的证法	(154)
3.3 区间上成立的函数不等式的证法	(159)
3.4 数值不等式的证法	(169)
3.5 利用洛必达法则求极限的若干方法与技巧	(174)
3.6 函数单调性的证法及单调区间的求法	(183)
3.7 函数极值和最值的求法	(188)
3.8 求解最值应用题应注意的几个问题	(197)
3.9 曲线的凹凸区间与拐点的求法	(202)
3.10 渐近线的求法	(209)
3.11 利用函数的性态讨论方程根的个数	(216)
3.12 利用导数作函数的图形	(222)
第 4 章 不定积分	(226)
4.1 与原函数有关的几类问题的解法	(226)
4.2 用凑微分法求不定积分的常见类型	(233)
4.3 用分部积分法求不定积分的技巧	(241)
4.4 有理函数积分的求法	(247)

4.5	三角函数有理式积分的求法	(252)
4.6	简单无理函数的不定积分的求法	(259)
第5章	定积分	(266)
5.1	应用定积分定义计算定积分,求极限	(266)
5.2	简化定积分计算的若干方法与技巧	(270)
5.3	分段函数(含绝对值的函数)的定积分的算法	(279)
5.4	变限积分函数的导数及其定积分的算法	(285)
5.5	含有变限积分函数或定积分的极限的求(证)法	(290)
5.6	变限积分函数性质的讨论与证明	(299)
5.7	与定积分或变限积分有关的方程,其根存在性的证法	(305)
5.8	常用定积分等式的证法及其在简化计算中的应用	(313)
5.9	定积分不等式的证法	(321)
5.10	反常积分(广义积分)敛散性的判别	(331)
第6章	定积分的应用	(345)
6.1	用定积分计算平面图形面积	(345)
6.2	与计算平面图形面积有关的几类综合题的解法	(349)
6.3	利用定积分计算体积的方法	(357)
6.4	与计算平面曲线弧长有关的几类问题的解法	(371)
6.5	定积分的物理应用举例	(377)
第7章	微分方程	(386)
7.1	几类可化为可分离变量方程的一阶方程解法	(386)
7.2	求解一阶线性方程及可化为一阶线性方程的方程	(391)
7.3	几类可降阶的二阶(或高阶)微分方程的解法	(398)
7.4	常系数线性微分方程的解法	(401)
7.5	已知微分方程的解,反求其微分方程	(410)
7.6	利用微分方程求解几类函数方程	(415)
7.7	微分方程在几何上的应用举例	(420)
7.8	微分方程在物理上的应用举例	(425)
7.9	欧拉方程的解法	(432)
7.10	一阶常系数线性微分方程组的解法	(435)
习题答案或提示		(440)
附录(同济大学编《高等数学》(上册·第七版)部分习题解答查找表)		(467)

第1章 函数、极限、连续

1.1 函数及其性质

高等数学研究的对象是函数,研究函数所采用的方法为极限.在讨论求函数极限的各种方法之前,理解和掌握函数的定义及其性质是十分必要的.

1.1.1 函数定义域的求法

1. 求函数的(自然)定义域

一般由数学式给出的抽象函数 $y = f(x)$, 如果没有指明自变量和因变量的具体意义(如物理意义、几何意义等)或其他声明,则约定其定义域就是使该数学式有意义的自变量的一切实数组成的集合,且称为该函数的自然定义域,以下简称定义域.下面介绍函数定义域的求法.

求法一 用排除法求之.

此法常用来求简单函数的定义域.用“排除法”求函数的定义域,顾名思义,就是去掉使数学式没有意义的自变量的取值部分,就得到该函数的定义域.常用以下几条法则去掉之.

- (1) 分式函数中分母不能为零;
- (2) 偶次根式内的量不能取负值,即应大于或等于零;
- (3) 对数的真数不能为负值和零,即必须取正值;
- (4) 函数 $y = \arcsin x, y = \arccos x$ 的定义域为 $-1 \leq x \leq 1$;
- (5) $y = \tan x$ 中的 $x \neq k\pi + \pi/2, y = \cot x$ 中的 $x \neq k\pi$, 其中 k 是整数.

例1 [1.1.1(5), (6), (7)]* 求下列函数的自然定义域:

$$(1) y = \sin \sqrt{x}; \quad (2) y = \tan(x+1); \quad (3) y = \arcsin(x-3).$$

解 (1) 为使 $y = \sin \sqrt{x}$ 有意义, x 需满足 $x \geq 0$, 则 y 的定义域为 $D = \{x \mid x \geq 0\}$.

(2) 为使 $y = \tan(x+1)$ 有意义, x 需满足 $x+1 \neq k\pi + \pi/2 (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, 则 y 的定义域 $D = \{x \mid x \neq k\pi + \pi/2 - 1, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$.

* [1.1.1(5), (6), (7)] 表示该例(或该习题)是同济大学数学系编写的《高等数学》(第七版)的第1章习题1-1的第1题中(5), (6), (7)小题.下同.

(3) 为使 $y = \arcsin(x-3)$ 有意义, x 需满足 $-1 \leq x-3 \leq 1$, 则 y 的定义域为 $D = \{x \mid 2 \leq x \leq 4\}$.

例 2 求函数 $y = \frac{1}{[x+1]}$ 的自然定义域.

解 因当 $-1 \leq x < 0$ 时, 根据整函数的定义有 $[x+1] = 0$, 由排除法知函数 $y = \frac{1}{[x+1]}$ 的自然定义域为去掉 $-1 \leq x < 0$ 的任意实数的集合, 即 $(-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$.

求法二 用交集法求之.

求复杂函数的定义域常用交集法求之, 即求解由简单函数的定义域所构成的不等式组的解集.

用交集法求定义域的函数, 常见的有下述两种类型.

(I) 函数的表示式由多个数学式组合而成.

一个函数的表示式若由几个数学式组合而成, 则这个函数的定义域必为这几个数学式允许值范围的公共部分, 为求出此交集(公共部分), 应根据各个数学式的限制条件列出不等式组, 其公共解就是所求的定义域.

正确求出这类函数的定义域的关键在于以下几点:

- (1) 搞清五类基本初等函数的定义域;
- (2) 记住分式函数的分母不能等于零;
- (3) 熟练掌握解不等式(组)的方法.

例 3 求函数 $y = 1/(1-x^2) + \sqrt{x+1}$ 的定义域.

解 要使 y 有意义, 必有 $1-x^2 \neq 0$ 且 $x+1 \geq 0$, 其交集 $\begin{cases} 1-x^2 \neq 0, \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$ 即为

所求的定义域, 解之得 $\begin{cases} x \neq \pm 1, \\ x \geq -1, \end{cases}$ 即所求的定义域为 $(-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

(II) 复合函数的定义域常用交集法求之.

一般, 设 $f(x)$ 的定义域为 D_f , $g(x)$ 的定义域是 D_g , 则复合函数 $y = f[g(x)]$ 的定义域是 $D = D_g \cap \{x \mid g(x) \in D_f\}$.

例 4 求下列函数的定义域:

- (1) $y = 1/(\sin x - \cos x)$; (2) $y = \lg[\cos(\lg x)]$;
- (3) $y = \arcsin[\lg(x/10)]$.

解 (1) 因 $x = \pi/4 + n\pi (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时 $\sin x - \cos x = 0$, 故 y 的定义域为 $x \neq \pi/4 + n\pi (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 的一切实数.

(2) y 的定义域必使 $\cos(\lg x) > 0$, 因而必有

$$(2k - 1/2)\pi < \lg x < (2k + 1/2)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

由此解得 x 必须满足 $10^{(2k-1/2)\pi} < x < 10^{(2k+1/2)\pi}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), 此为 y 的定义域.

(3) 当 $-1 \leq \lg(x/10) \leq 1$ 时, y 有意义, 解之得到

$$-1 \leq \lg x - \lg 10 = \lg x - 1 \leq 1, \quad 0 \leq \lg x \leq 2, \quad 1 \leq x \leq 10^2,$$

故 $1 \leq x \leq 10^2$ 为 y 的定义域.

求法三 用代入法求之.

已知 $f(x)$ 的定义域, 用代入法可求出 $f[\varphi(x)]$ 的定义域.

例如, 设 $f(x)$ 的定义域为 $a < x < b$, 将 $\varphi(x)$ 替换不等式中的 x , 得到 $a < \varphi(x) < b$, 由此解出 x , 即得 $f[\varphi(x)]$ 的定义域.

例5 [1.1.12(1), (3)] 设 $f(x)$ 的定义域为 $D = [0, 1]$, 求下列各函数的定义域: (1) $f(x^2)$; (2) $f(x+a)$ ($a > 0$).

解 (1) 因 $f(x)$ 的定义域是 $D = [0, 1]$, 故 $0 \leq x^2 \leq 1, -1 \leq x \leq 1$, 所以 $f(x^2)$ 的定义域为 $\{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$.

(2) 因 $0 \leq x+a \leq 1, a > 0$, 故 $-a \leq x \leq 1-a$. 所以 $f(x+a)$ 的定义域为 $\{x \mid -a \leq x \leq 1-a, a > 0\}$.

2. 实际问题中函数定义域的确定方法

实际问题中如果函数和(或)其自变量具有物理意义或几何意义, 或题设中对它们有其他要求, 这时函数的定义域由所讨论的问题的实际意义来确定, 而不只是根据其表示式确定.

例6 [总1.7]* 把半径为 R 的一圆形铁皮, 自中心处剪去中心角为 α 的一扇形后围成一无底圆锥. 试建立圆锥的体积 V 与角 α 间的函数关系.

解 从中心处剪去中心角为 α 的扇形后, 剩余扇形的周长 $l = 2\pi R - R\alpha$. 令 r 为无底圆锥的半径, 由题意有

$$2\pi R - R\alpha = 2\pi r \quad (\text{见图 1.1.1.1}), \quad r = R[1 - \alpha/(2\pi)].$$

圆锥的高为

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = (R/2\pi) \sqrt{4\pi\alpha - \alpha^2} \quad (0 < \alpha < 2\pi),$$

圆锥的底面积为 $A = \pi r^2 = \pi R^2 [1 - \alpha/(2\pi)]^2$,

则体积 $V = A \cdot h/3 = \pi r^2 \cdot h/3$

$$= \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot \frac{(2\pi - \alpha)^2}{4\pi^2} \cdot \frac{R}{2\pi} \sqrt{4\pi\alpha - \alpha^2}$$

$$= \frac{R^3}{24\pi^2} (2\pi - \alpha)^2 \sqrt{4\pi\alpha - \alpha^2},$$

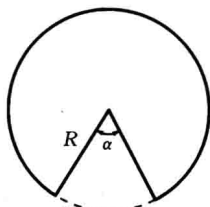


图 1.1.1.1

* [总1.7] 表示该例(或该习题)是同济大学数学系编写的《高等数学》(第七版)的总习题一的第7题. 下同.

其中 $0 < \alpha < 2\pi$ (因为此时才能形成圆锥) 为函数 V 的定义域.

3. 判别两函数是否为同一函数

由函数的定义易得到, 可用下述命题判别两函数是否为同一函数.

命题 1.1.1.1 当且仅当给定的两函数, 其定义域和对应关系完全相同时, 才表示同一函数, 否则表示不同的两函数.

值得注意的是命题 1.1.1.1 说的是函数只与定义域和对应关系有关, 而与用什么字母表示自变量无关, 因而 $f(x) = f(t) = f(u) = f(v) = \dots$. 函数表示式的这种无关特性常简称为函数的“无关特性”. 在求解函数表示式时, 常用到这种“无关特性”.

例 7 [1.1.2(1), (2), (3)] 下列各题中, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同? 为什么?

$$(1) f(x) = \lg x^2, g(x) = 2\lg x; \quad (2) f(x) = x, g(x) = \sqrt{x^2};$$

$$(3) f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}, g(x) = x \sqrt[3]{x - 1}.$$

解 (1) 不同. 因为 $f(x) = \lg x^2$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 而 $g(x) = 2\lg x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 其定义域不同.

(2) 不同. $g(x) = \sqrt{x^2} = |x|$, 而 $f(x) = x$, 对应法则不同.

(3) 相同. 定义域、对应法则均相同.

1.1.2 与复合函数有关的几类函数表示式的求法

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_f , 而函数 $u = \varphi(x)$ 的值域为 Z_φ , 若 $D_f \cap Z_\varphi \neq \emptyset$ (符号 $\emptyset$ 表示空集), 则称函数 $y = f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数.

这里三个变量 x, u, y , 它们之间的关系是: y 是函数, $u = \varphi(x)$ 是中间变量而 x 是自变量. 值得注意的是, 这里 $u = \varphi(x)$ 具有双重身份: 既是 $y = f(u)$ 的自变量, 又是 x 的函数 $u = \varphi(x)$. 因而要求内层函数 $\varphi(x)$ 的值域 Z_φ 含在外层函数 $f(u)$ 的定义域 D_f 内, 这样才能构成复合函数. 如果值域 Z_φ 不含在 D_f 内, 则不能组成复合函数, 这时 $u = \varphi(x)$ 不具有双重身份. 例如 $y = \sqrt{u^2 - 2}$, $u = \sin x$ 就不能构成复合函数 $y = \sqrt{\sin^2 x - 2}$.

例 8 复合函数 $y = \sin^2 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ 是由哪些基本初等函数或多项式复合而成的?

解 从最外层看是幂函数 $y = u^2$; 再看次外层是正弦函数 $u = \sin v$, 从外向里看第三层是幂函数 $v = w^{-\frac{1}{2}}$, 最里层是多项式 $w = x^2 + 1$, w 是由幂函数与常数函数经过加法运算得到的, 所以 $y = \sin^2 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ 是由 $y = u^2, u = \sin v, v =$

$w^{-\frac{1}{2}}, w = x^2 + 1$ 复合而成.

1. 已知函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$, 求其复合函数 $f[\varphi(x)]$

常用代入法求之, 即将另一个函数 $\varphi(x)$ 的表达式替代函数 $f(x)$ 中的自变量 x 即得 $f[\varphi(x)]$. 该法适用于初等函数的复合.

当 $f(x)$ 为分段函数时, 求解 $f[\varphi(x)]$ 时常用分段代入法即分析法 (详见 1.1.4 小节).

例 9 设 $f(x) = x^2 + 1$, 求 $f(x^2 - 1)$.

解 $f(x^2 - 1)$ 是由 $y = f(u), u = \varphi(x) = x^2 - 1$ 复合而成的复合函数, 因 $f(x) = x^2 + 1$, 故 $f(u) = u^2 + 1$. 将 $u = x^2 - 1$ 代入前式即得

$$f(x^2 - 1) = (x^2 - 1)^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 2.$$

2. 已知复合函数, 求其有关函数的表示式

(I) 由复合函数求因变量关于自变量的函数表示式.

已知 $f[\varphi(x)] = h(x)$, 求 $f(x)$. 常用两法求之.

一是用变量代换法求之. 令 $\varphi(x) = u$, 解出 x 代入所给函数, 利用函数表示法与函数的“无关特性”, 即得所求的 $f(x)$.

二是用拼凑法求之. 为此将所给的复合函数表示式 $h(x)$ 凑成对应符号 $f[\varphi(x)]$ 中间变量 $\varphi(x)$ 的函数的形式, 然后利用上述“无关特性”即可写出 $f(x)$ 的表示式.

例 10 设 $f(x + 1/x) = x^2 + 1/x^2$, 求 $f(x)$.

解一 用拼凑法求之. 令 $g(x) = x + 1/x, h(x) = x^2 + 1/x^2$, 下面将 $h(x) = x^2 + 1/x^2$ 拼凑成以 $g(x)$ 表示的代数式:

$$f(x + 1/x) = x^2 + 1/x^2 = x^2 + 1/x^2 + 2 - 2 = (x + 1/x)^2 - 2.$$

令 $t = g(x) = x + 1/x$, 则 $f(t) = t^2 - 2$, 因而 $f(x) = x^2 - 2$.

解二 用变量代换法求之. 令 $u = x + 1/x$, 解出 $x = (u \pm \sqrt{u^2 - 4})/2$. 代入原式得

$$f(u) = \frac{(u \pm \sqrt{u^2 - 4})^2}{4} + \frac{4}{(u \pm \sqrt{u^2 - 4})^2} = u^2 - 2,$$

故

$$f(x) = x^2 - 2.$$

(II) 由复合函数求因变量关于中间变量的函数表示式.

例 11 设 $f[\sin(x/2)] = 1 + \cos x$, 求 $f(\cos x)$.

解一 利用三角函数的性质求之.

$$\begin{aligned} f(\cos x) &= f[\sin(\pi/2 - x)] = f\{\sin[(\pi - 2x)/2]\} \\ &= 1 + \cos(\pi - 2x) = 1 - \cos 2x = 2\sin^2 x. \end{aligned}$$

解二 用拼凑法求之, 先求 $f(x)$.

$$f[\sin(x/2)] = 1 + \cos x = 2\cos^2(x/2) = 2[1 - \sin^2(x/2)].$$

令 $\sin(x/2) = t$, 则 $f(t) = 2(1 - t^2)$, 即 $f(x) = 2(1 - x^2)$, 故

$$f(\cos x) = 2(1 - \cos^2 x) = 2\sin^2 x.$$

解三 用变量代换法求之, 令 $t = \sin(x/2)$, 则 $x = 2\arcsin t$, 于是

$$\begin{aligned} f(t) &= \cos(2\arcsin t) + 1 = \cos^2(\arcsin t) - \sin^2(\arcsin t) + 1 \\ &= 2[1 - \sin^2(\arcsin t)] = 2(1 - t^2), \end{aligned}$$

即 $f(x) = 2(1 - x^2)$, 故 $f(\cos x) = 2(1 - \cos^2 x) = 2\sin^2 x$.

(Ⅲ) 由复合函数求中间变量关于自变量的函数表示式.

例 12 设 $f(x) = e^{x^2}$, $f[\varphi(x)] = 1 - x$, 且 $\varphi(x) \geq 0$, 求 $\varphi(x)$ 及其定义域.

解 一方面可由 $f(x)$ 求出 $f[\varphi(x)]$ 的表示式 $f[\varphi(x)] = e^{\varphi^2(x)}$, 另一方面又已知 $f[\varphi(x)]$ 的表示式 $f[\varphi(x)] = 1 - x$. 令两者相等, 得到 $e^{\varphi^2(x)} = 1 - x$, 即

$$\varphi^2(x) = \ln(1 - x), \quad \varphi(x) = \sqrt{\ln(1 - x)} \quad (\varphi(x) \geq 0).$$

$\varphi(x)$ 的定义域显然为 $(-\infty, 0]$.

(Ⅳ) 由函数所满足的方程求该函数的表示式.

此类问题常给出所求函数满足的一个方程. 作变量代换: 令此函数的中间变量等于一新变量, 得到该函数所满足的另一个方程. 将此两方程联立解之, 即可求得所求函数的表示式.

例 13 已知 $af(x) + bf\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{c}{x}$, $|a| \neq |b|$, 证明 $f(x)$ 是奇函数.

证 下面证 $f(-x) = -f(x)$. 为此先求出 $f(x)$.

注意到所给等式中函数 f 的自变量为 x , 其中间变量为 $1/x$, 若令一新变量 t 等于中间变量, 即令 $t = 1/x$, 代入原方程可得另一方程:

$$af(1/t) + bf(t) = ct, \quad \text{即} \quad af(1/x) + bf(x) = cx.$$

将原方程及上面方程的两端分别乘 a, b 然后相减, 得到

$$a^2 f(x) - b^2 f(x) = \frac{ac}{x} - bcx = \frac{ac - bcx^2}{x},$$

因 $|a| \neq |b|$, 故有 $f(x) = \frac{ac - bcx^2}{(a^2 - b^2)x}$, 于是

$$f(-x) = \frac{ac - bc(-x)^2}{(a^2 - b^2)(-x)} = -\frac{ac - bcx^2}{(a^2 - b^2)x} = -f(x).$$

1.1.3 三类反函数的求法

设函数 $y = f(x)$ 是由其定义域 $D(f)$ 到值域 $f(D)$ 的一一映射, 即对于 $f(D)$ 中每个 y 值在 D 中都有唯一 x 与之对应, 其对应法则记为 f^{-1} . 于是根据函数的定义, 得到一个以 $f(D)$ 为定义域、 D 为值域的函数, 记为 $x = f^{-1}(y)$, 称其

为 $y = f(x)$ 的反函数. 习惯上, 常用 x 表示自变量, 用 y 表示因变量, 因此用 $y = f^{-1}(x)$ 表示 $y = f(x)$ 的反函数.

由上述定义可知, 为求 $y = f(x)$ 的反函数, 先从方程 $y = f(x)$ 中解出 x , 得到用 y 表示 x 的式子 $x = f^{-1}(y)$, 然后将 x 与 y 互换, 即得所求的反函数 $y = f^{-1}(x)$.

反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的定义域有两种求法. 一是直接求法, 二是求出 $y = f(x)$ 的值域即得 $y = f^{-1}(x)$ 的定义域.

函数 $y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y)$ 的图形是同一条曲线, 但 x 与 y 互换后得到函数 $y = f^{-1}(x)$, 其图形一般不再是函数 $y = f(x)$ (即 $x = f^{-1}(y)$) 的图形, 它们关于直线 $y = x$ 对称.

例 14 [1.1.9(6)] 求函数 $y = \frac{2^x}{2^x + 1}$ 的反函数及其定义域.

解 首先求出函数 $y = \frac{2^x}{2^x + 1}$ 的值域. 因为 x 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 所以当 x 取值越来越小, 且无限接近于定义区间 $(-\infty, +\infty)$ 的左端点时, y 接近于 0 且大于 0; 而 x 取值越来越大, 无限接近右端点时, y 接近于 1, 于是 y 的值域为 $(0, 1)$. 由 $y = \frac{2^x}{2^x + 1}$ 得 $2^x = y/(1 - y)$, 即

$$x = \log_2[y/(1 - y)],$$

故函数 $y = \frac{2^x}{2^x + 1}$ 的反函数为 $y = \log_2[x/(1 - x)]$. 由于反函数定义域是函数 $y = \frac{2^x}{2^x + 1}$ 的值域, 故其反函数的定义域为 $0 < x < 1$.

上述反函数的定义域也可直接求出, 事实上由 $x/(1 - x) > 0$ 且 $x \neq 1$, 即得

$$\begin{cases} x > 0, \\ 1 - x > 0, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x < 0, \\ 1 - x < 0, \end{cases} \quad \text{后者无解, 前者的解为 } 0 < x < 1.$$

下面介绍三类常用函数的反函数的求法.

1. 分段函数的反函数求法

求分段函数的反函数, 要分别求出各区间段的反函数及其定义域.

设分段函数在各分段区间上都是单调函数, 则分别求出各个分段区间上的反函数就得到该分段函数的反函数, 且每段函数的值域就是分段区间上反函数的定义域, 而各区间段上反函数的定义域就是原来函数对应区间段上的值域.

例 15 求函数 $y = f(x) = \begin{cases} x, & -\infty < x < 1, \\ x^2, & 1 \leq x \leq 4, \\ 2^x, & 4 < x < +\infty \end{cases}$ 的反函数及其定义域.