

山东科技大学学术著作出版基金资助出版

# 并联机器人 弹性动力学

Elastic Dynamics Analysis of Parallel Robot

陈修龙 吴良凯 贾永皓 董芳杞 梁小夏 著



中国电力出版社  
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

# 并联机器人 弹性动力学

Elastic Dynamics Analysis of Parallel Robot

陈修龙 吴良凯 贾永皓 董芳杞 梁小夏 著



中国电力出版社  
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

## 内 容 提 要

随着并联机器人相关研究的深入, 并联机器人型装备正在向高速与高精度应用领域发展, 并联机器人弹性动力学研究对设计研发具有高速、轻质、高性能和高精度特点的高速空间并联机器人型装备具有十分重要的意义。本书主要介绍并联机器人弹性动力学理论, 内容包括: 并联机器人刚体动力学建模、并联机器人弹性动力学建模、并联机器人弹性动力学行为分析、并联机器人弹性动力学灵敏度分析、并联机器人弹性动力学优化设计。

本书可供从事机械工程和动力学研究与应用的科技工作者及工程技术人员阅读使用, 也可作为机械和力学相关专业的大学教师、研究生和本科生的教学参考书。

### 图书在版编目 (CIP) 数据

并联机器人弹性动力学/陈修龙等著. —北京: 中国电力出版社, 2017. 4  
ISBN 978-7-5198-0533-3

I. ①并… II. ①陈… III. ①机器人技术—弹性动力学 IV. ①TP24

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 058349 号

---

出版发行: 中国电力出版社

地 址: 北京市东城区北京站西街 19 号 (邮政编码 100005)

网 址: <http://www.cepp.sgcc.com.cn>

责任编辑: 周巧玲

责任校对: 常燕昆

装帧设计: 郝晓燕 左 铭

责任印制: 吴 迪

---

印 刷: 北京传奇佳彩印刷有限公司

版 次: 2017 年 4 月第一版

印 次: 2017 年 4 月北京第一次印刷

开 本: 710 毫米×980 毫米 16 开本

印 张: 12.5

字 数: 219 千字

定 价: 35.00 元

---

版 权 专 有 侵 权 必 究

本书如有印装质量问题, 我社发行部负责退换

并联机器人具有结构紧凑、刚度高、承载能力强、累积误差小、速度快、精度高，系统惯性小、动态响应灵敏、各向同性好等优点。从 20 世纪 70 年代以来，并联机器人一直是先进制造和机器人领域的研究热点，在需要高刚度、高精度、高负载而无须很大工作空间的领域得到了广泛的应用，并联机器人弹性动力学研究对设计研发具有高速、轻质、高性能和高精度特点的高速空间并联机器人型装备有着十分重要的意义。

本书突破传统等效线性化的弹性动力学研究模式，在新的非线性研究框架内对并联机器人弹性动力学理论进行了系统深入的研究，是作者近十年来在并联机器人弹性动力学理论研究方面取得研究成果的总结。

本书所涉及的研究成果是在国家自然科学基金“高速空间并联式坐标测量机非线性动力学行为分析与优化”(No. 51005138)、山东省高等学校科技计划资助项目(J09LD54)、山东科技大学杰出青年科学基金(2011KYJQ102)等项目支持下完成的，在此对给予支持的相关单位表示感谢。同时也感谢研究生李云峰、张中供、高庆、魏德勇、冯伟明、李文彬等对本书成果做出的贡献；感谢山东科技大学著作出版基金对本书的资助。

并联机器人弹性动力学是机器人动力学研究的前沿领域，研究涉及跨学科的知识领域，限于作者水平所限，书中不妥和疏漏之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

陈修龙

2017 年 2 月 25 日于山东科技大学

前言	
第 1 章 概述	1
第 2 章 并联机器人刚体动力学建模	3
2.1 4-UPS/UPU 并联机器人刚体动力学建模	3
2.2 4-UPS/RPS 并联机器人刚体动力学建模	24
第 3 章 并联机器人弹性动力学建模	40
3.1 考虑几何非线性的 4-UPS/UPU 并联机器人弹性动力学建模	40
3.2 不考虑几何非线性的 4-UPS/RPS 并联机器人弹性动力学建模	58
第 4 章 并联机器人弹性动力学行为分析	71
4.1 4-UPS/UPU 并联机器人的动力学行为分析	71
4.2 4-UPS/RPS 并联机器人的动力学行为分析	94
第 5 章 并联机器人弹性动力学灵敏度分析	117
5.1 4-UPS/UPU 并联机器人弹性动力学灵敏度方程	117
5.2 4-UPS/UPU 并联机器人动应力的灵敏度分析	129
5.3 4-UPS/UPU 系统频率特性的灵敏度分析	137
第 6 章 并联机器人弹性动力学优化设计	140
6.1 4-UPS/UPU 并联机器人弹性动力学优化设计	140
6.2 4-UPS/RPS 并联机器人弹性动力学优化设计	156
参考文献	187

# 第 1 章

## 概 述

并联机器人是动平台和定平台通过至少两个独立的运动链相连接，机构具有两个或两个以上自由度，且以并联方式驱动的一种闭环机构。从 20 世纪 70 年代以来，并联机器人一直是先进制造和机器人领域的研究热点。并联机器人与串联机器人在哲学上呈对立统一的关系，相对于已经取得广泛应用的串联机器人，并联机器人具有结构紧凑、刚度高、承载能力强、累积误差小、速度快、精度高，系统惯性小、动态响应灵敏、各向同性好等优点。串、并联机器人各自特点对比鲜明，二者在机构和性能特点上的对偶关系使其在应用上不是替代关系而是优势互补。在需要高刚度、高精度、高负载而无须很大工作空间的领域，例如运动模拟器、并联机床、微操作机器人、力传感器、医疗机械、天文望远镜、可视化触觉装置、空气动力学试验车、绳索吊车机器人等，并联机器人充分发挥其独特性能得到了独特和广泛的应用。并联机器人型装备正向高速度、高加速度和高精度的应用领域迈进，设计研发具有高速、轻质、高性能和高精度特点的高速并联机器人型装备是实现技术创新、产品升级的有效途径，将有力促进机器人机构设计与分析技术、控制技术、信息集成技术的发展及各学科之间的交叉与融合，具有重要的理论意义和实用价值。

图 1-1~图 1-6 所示为几种广泛应用的并联机器人。

并联机器人中各零部件的刚度相差较大，其中运动支链中轻质杆件的刚度远远低于动平台和定平台的刚度。所以，并联机器人在高速和高加速度工况下，由于受到高幅、高频惯性力及外载荷的作用，各轻质杆件将产生一定程度的弹性变形，从而引起机器人的支链及整体的弹性振动，这是导致机器人动力学性能下降的主要因素之一。由于存在由并联机器人机构杆件弹性变形产生的几何非线性效应和变形杆件的刚弹运动耦合效应及刚弹运动耦合导致的时变动力学行为，使得高速并联机器人系统本质上是一个多闭环、多柔体与刚体耦合的动力学系统，表现出复杂的动力学特征。因此，迫切需要开展并联机器人的弹性动力学研究，以准确地预测其动力学行为和指导动力学设计。



图 1-1 飞行模拟器

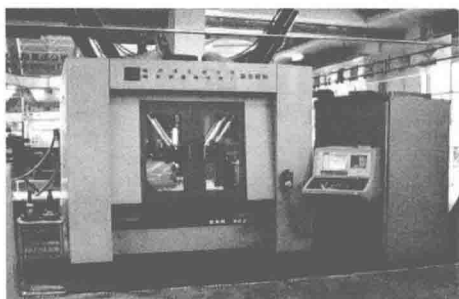


图 1-2 并联机床



图 1-3 微动并联机器人

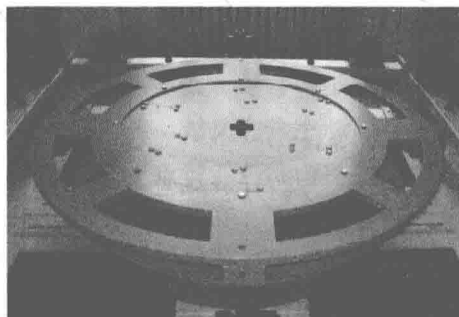


图 1-4 六维力传感器



图 1-5 工业机器人

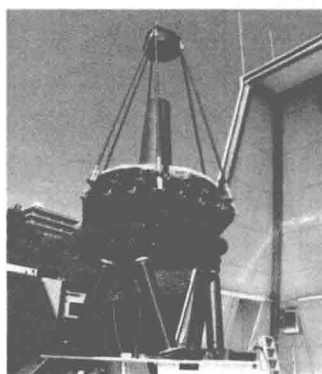


图 1-6 天文望远镜

## 第 2 章

# 并联机器人刚体动力学建模

本章主要建立 4-UPS/UPU 并联机器人和 4-UPS/RPS 并联机器人的刚体动力学模型, 分别求解出并联机器人驱动杆的驱动力, 利用 Adams 对两种并联机器人虚拟样机进行动力学仿真分析, 以及验证刚体动力学模型和数值计算的正确性。

### 2.1 4-UPS/UPU 并联机器人刚体动力学建模

#### 2.1.1 并联机器人结构分析

4-UPS/UPU 并联机器人由定平台、动平台和驱动杆组成, 定平台与动平台通过 5 个独立的驱动支链相连, 即 1 个 UPU (虎克铰 - 移动副 - 虎克铰) 驱动支链和 4 个构造完全相同的 UPS (虎克铰 - 移动副 - 球面副) 驱动支链, 如图 2-1 所示。

4-UPS/UPU 并联机器人类似于 Stewart 平台, 也是闭环的, 所以其自由度可用修正的 Grubler Kutzbach 公式求解得到

$$M = d(n - g - 1) + \sum_{i=1}^g f_i + v$$
$$= 6 \times (12 - 15 - 1) + 29 + 0 = 5 \quad (2-1)$$

式中  $M$ ——机器人自由度数;  
 $d$ ——机器人的阶数;  
 $n$ ——机器人的构件总数;  
 $g$ ——机器人中运动副的总数;  
 $f_i$ ——第  $i$  个运动副的相对自由度数;  
 $v$ ——并联冗余约束。

通过以上计算分析可知, 机器人的自由度等于 5, 所以可以通过改变 5 个驱动杆杆长的变化, 实现动平台在一定范围内的三维移动和二维转动。

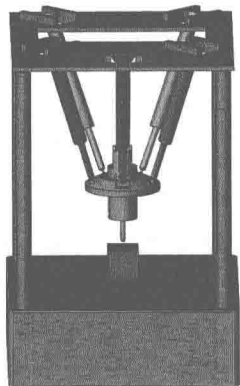


图 2-1 4-UPS/UPU 并联机器人实体模型

Fig. 2-1 Solid model of 4-UPS/UPU parallel robot



### 2.1.2 并联机器人运动学分析

#### 1. 坐标系的建立

如图 2-2 所示, 将定坐标系  $O_A-X_A Y_A Z_A$  (用  $\{A\}$  表示) 设立在 4-UPS/UPU 并联机器人的定平台上, 将动坐标系  $O_B-X_B Y_B Z_B$  (用  $\{B\}$  表示) 设立在动平台上并与动平台固连, 将支链坐标系  $C_i-X_G Y_G Z_G$  (用  $\{C_i\}$  表示) 设立在各驱动支链上。

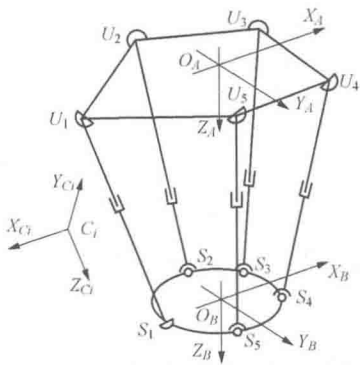


图 2-2 4-UPS/UPU 并联机器人坐标系

Fig. 2-2 Coordinate systems of 4-UPS/UPU parallel robot

在定平台上, 定坐标系  $\{A\}$  的原点  $O_A$  位于由 4 个虎克铰  $U_2, U_3, U_4, U_5$  确定的四边形外接圆的圆心处,  $X_A$  轴穿过虎克铰  $U_1$ ,  $Y_A$  轴平行于  $U_2, U_5$  的连线,  $Z_A$  轴垂直定平台向下。虎克铰  $U_1$  位于定坐标系  $\{A\}$  的  $X_A$  轴负方向  $L_{U1}$  处, 另外 4 个虎克铰  $U_2, U_3, U_4, U_5$  均匀分布在以  $O_A$  为圆心,  $r_A$  为半径的圆上, 角度间隔为  $90^\circ$ 。并联机器人定平台上铰链分布见表 2-1。

表 2-1 并联机器人定平台上铰链分布

Tab. 2-1 The distribution of the hinge on the fixed platform of parallel robot mm

铰链类型	$U_1$	$U_2$	$U_3$	$U_4$	$U_5$
分布半径	720	645	645	645	645
分布角度	$\pi$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$

在动平台上, 将动坐标系  $\{B\}$  的原点  $O_B$  设定在动平台的正中央处, 在运动的起始状态, 假设动坐标系和定坐标系位姿保持一致, 且其各坐标轴分别对应平行。虎克铰  $U_1'$  到动坐标系  $\{B\}$  所在平面的垂直距离是  $H_{U1'}$ , 虎克铰  $U_1'$  投影到动坐标系  $\{B\}$  所在平面的点位于动坐标系  $\{B\}$  的  $X_B$  轴负方向  $L_{U1'}$  处, 4 个球面副  $S_2, S_3, S_4, S_5$  均位于以  $O_B$  为圆心、 $r_B$  为半径的圆上, 虎克铰  $U_1'$  在动坐标系  $\{B\}$  所在平面上的投影点与 4 个球铰均匀分布, 角度间隔为  $72^\circ$ 。并联机器人动平台上铰链分布见表 2-2。为方便表述, 将虎克铰  $U_1'$  用  $S_1$  表示。

表 2-2

并联机器人动平台上铰链分布

Tab. 2-2 The distribution of the hinge on the moving platform of parallel robot mm

铰链类型	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	S <sub>4</sub>	S <sub>5</sub>
分布半径	202	202	202	202	202
分布角度	$\pi$	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{9\pi}{5}$	$\frac{7\pi}{5}$

在 4-UPS/UPU 并联机器人的各支链上建立支链坐标系  $C_i$ - $X_G Y_G Z_G$ ,  $Z_G$  轴沿杆件的方向,  $Y_G$  轴为  $Z_G$  轴与  $Z_A$  轴的叉积方向,  $X_G$  轴符合右手定则。

## 2. 坐标变换矩阵的建立

机器人的动坐标系  $\{B\}$  在定坐标系  $\{A\}$  下的位姿可采用  $X$ - $Y$ - $Z$  欧拉角方式表达: 首先绕  $X_A$  轴转  $\alpha$  角, 然后绕  $Y'_B$  轴转  $\beta$  角, 最后绕  $Z'_B$  轴转  $\gamma$  角。动坐标系  $\{B\}$  相对定坐标系  $\{A\}$  的旋转矩阵为

$$\begin{aligned}
 {}^A_B \mathbf{R}(\alpha, \beta, \gamma) &= \mathbf{R}(X, \alpha) \mathbf{R}(Y, \beta) \mathbf{R}(Z, \gamma) \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-2) \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & -\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

4-UPS/UPU 并联机器人中, 由于 UPU 支链上虎克铰含有约束, 可得  $\gamma = 0^\circ$ , 所以动坐标系  $\{B\}$  对于定坐标系  $\{A\}$  的旋转矩阵可写成

$${}^A_B \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta & \cos \alpha & -\sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

并联机器人支链坐标系  $\{C_i\}$  的位姿可通过定坐标系  $\{A\}$  的三次欧拉角转换表述: 先绕  $Z_A$  轴转动  $\varphi_i$ , 再绕  $Y'_G$  转动  $\psi_{1i}$ , 再绕  $X''_G$  转动  $\psi_{2i}$ 。支链坐标系  $\{C_i\}$  相对定坐标系  $\{A\}$  旋转矩阵为

$$\begin{aligned}
 {}^A_{C_i} \mathbf{R}_i(\varphi_i, \psi_{1i}, \psi_{2i}) &= \mathbf{R}(Z, \varphi_i) \mathbf{R}(Y, \psi_{1i}) \mathbf{R}(X, \psi_{2i}) \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i & 0 \\ \sin \varphi_i & \cos \varphi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi_{1i} & 0 & \sin \psi_{1i} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi_{1i} & 0 & \cos \psi_{1i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi_{2i} & -\sin \psi_{2i} \\ 0 & \sin \psi_{2i} & \cos \psi_{2i} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\varphi_i \cos\psi_{1i} & -\sin\varphi_i \cos\psi_{2i} + \cos\varphi_i \sin\psi_{1i} \sin\psi_{2i} & \sin\varphi_i \sin\psi_{2i} + \cos\varphi_i \sin\psi_{1i} \cos\psi_{2i} \\ \sin\varphi_i \cos\psi_{1i} & \cos\varphi_i \cos\psi_{2i} + \sin\varphi_i \sin\psi_{1i} \sin\psi_{2i} & -\cos\varphi_i \sin\psi_{2i} + \sin\varphi_i \sin\psi_{1i} \cos\psi_{2i} \\ -\sin\psi_{1i} & \sin\psi_{1i} \sin\psi_{2i} & \cos\psi_{1i} \cos\psi_{2i} \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

式中  $\varphi_i$ ——虎克铰的安装角度；

$\psi_{1i}$ 、 $\psi_{2i}$ ——虎克铰的两个转角。

支链坐标系  $\{C_i\}$  相对动坐标系  $\{B\}$  旋转矩阵为

$$\begin{aligned} {}^B C_i R_i &= {}^A B^{-1} {}^A C_i R_i \\ &= \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ \sin\alpha \sin\beta & \cos\alpha & -\sin\alpha \cos\beta \\ -\cos\alpha \sin\beta & \sin\alpha & \cos\alpha \cos\beta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \cos\varphi_i \cos\psi_{1i} & -\sin\varphi_i \cos\psi_{2i} + \cos\varphi_i \sin\psi_{1i} \sin\psi_{2i} & \sin\varphi_i \sin\psi_{2i} + \cos\varphi_i \sin\psi_{1i} \cos\psi_{2i} \\ \sin\varphi_i \cos\psi_{1i} & \cos\varphi_i \cos\psi_{2i} + \sin\varphi_i \sin\psi_{1i} \sin\psi_{2i} & -\cos\varphi_i \sin\psi_{2i} + \sin\varphi_i \sin\psi_{1i} \cos\psi_{2i} \\ -\sin\psi_{1i} & \cos\psi_{1i} \sin\psi_{2i} & \cos\psi_{1i} \cos\psi_{2i} \end{bmatrix} \quad (2-5) \\ &= [B_1, B_2, B_3] \end{aligned}$$

其中

$$B_1 = \begin{bmatrix} \cos\beta \cos\varphi_i \cos\psi_{1i} + \sin\alpha \sin\beta \sin\varphi_i \cos\psi_{1i} + (-\cos\alpha \sin\beta)(-\sin\psi_{1i}) \\ \cos\alpha \sin\varphi_i \cos\psi_{1i} + \sin\alpha(-\sin\psi_{1i}) \\ \sin\beta \cos\varphi_i \cos\psi_{1i} + (-\sin\alpha \cos\beta) \sin\varphi_i \cos\psi_{1i} + \cos\alpha \cos\beta(-\sin\psi_{1i}) \end{bmatrix} \quad (2-6)$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} \cos\beta(-\sin\varphi_i \cos\psi_{2i} + \cos\varphi_i \sin\psi_{1i} \sin\psi_{2i}) + \sin\alpha \sin\beta(\cos\varphi_i \cos\psi_{2i} + \sin\varphi_i \sin\psi_{1i} \sin\psi_{2i}) + (-\cos\alpha \sin\beta) \cos\psi_{1i} \sin\psi_{2i} \\ \cos\alpha(\cos\varphi_i \cos\psi_{2i} + \sin\varphi_i \sin\psi_{1i} \sin\psi_{2i}) + \sin\alpha \cos\psi_{1i} \sin\psi_{2i} \\ \sin\beta(-\sin\varphi_i \cos\psi_{2i} + \cos\varphi_i \sin\psi_{1i} \sin\psi_{2i}) + (-\sin\alpha \cos\beta)(\cos\varphi_i \cos\psi_{2i} + \sin\varphi_i \sin\psi_{1i} \sin\psi_{2i}) + \cos\alpha \cos\beta \cos\psi_{1i} \sin\psi_{2i} \end{bmatrix} \quad (2-7)$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} \cos\beta(\sin\varphi_i \sin\psi_{2i} + \cos\varphi_i \sin\psi_{1i} \cos\psi_{2i}) + \sin\alpha \sin\beta(-\cos\varphi_i \sin\psi_{2i} + \sin\varphi_i \sin\psi_{1i} \sin\psi_{2i}) + (-\cos\alpha \sin\beta) \cos\psi_{1i} \cos\psi_{2i} \\ \cos\alpha(-\cos\varphi_i \sin\psi_{2i} + \sin\varphi_i \sin\psi_{1i} \sin\psi_{2i}) + \sin\alpha \cos\psi_{1i} \cos\psi_{2i} \\ \sin\beta(\sin\varphi_i \sin\psi_{2i} + \cos\varphi_i \sin\psi_{1i} \cos\psi_{2i}) + (-\sin\alpha \cos\beta)(-\cos\varphi_i \sin\psi_{2i} + \sin\varphi_i \sin\psi_{1i} \sin\psi_{2i}) + \cos\alpha \cos\beta \cos\psi_{1i} \cos\psi_{2i} \end{bmatrix} \quad (2-8)$$

### 3. 驱动杆杆长反解分析

定坐标系  $\{A\}$  下定平台各铰链  $U_i$  ( $i=1, 2, 3, 4, 5$ ) 坐标为

$${}^A P_{U_i} = [{}^A P_{U_{ix}}, {}^A P_{U_{iy}}, {}^A P_{U_{iz}}]^T \quad (2-9)$$

动坐标系  $\{B\}$  下动平台各铰链  $S_i$  ( $i=1, 2, 3, 4, 5$ ) 坐标为

$${}^B P_{S_i} = [{}^B P_{S_{ix}}, {}^B P_{S_{iy}}, {}^B P_{S_{iz}}]^T \quad (2-10)$$

定坐标系  $\{A\}$  中各驱动杆杆长矢量为

$$L_i = {}^A P_{S_i} - {}^A P_{U_i} = {}^A B {}^B P_{S_i} + {}^A P_{B_0} - {}^A P_{U_i} \quad (2-11)$$

其中,  ${}^A P_{BO} = [{}^A P_{BOx}, {}^A P_{BOy}, {}^A P_{BOz}]^T$  是  $\{A\}$  系下动平台中心坐标。

则 5 个驱动杆的长度为

$$l_i = |\mathbf{L}_i| = [({}^A P_{S_{ix}} - {}^A P_{U_{ix}})^2 + ({}^A P_{S_{iy}} - {}^A P_{U_{iy}})^2 + ({}^A P_{S_{iz}} - {}^A P_{U_{iz}})^2]^{1/2} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \quad (2-12)$$

#### 4. 虎克铰转角的数学模型

4-UPS/UPU 空间并联机器人由 5 个分支组成, 运用单开链法分析各个驱动支链, 如图 2-3 所示。

按照支链坐标系  $\{C_i\}$  的建立方法, 首先把定坐标系  $\{A\}$  绕  $Z_A$  轴转动角  $\varphi_i$ , 然后沿  $X'$  方向移动到各  $U_i$  点处, 可获得坐标系  $U_i - X_0 Y_0 Z_0$ ; 绕  $Y_0$  转动  $\psi_{1i}$ , 再绕  $X_0$  转动  $\psi_{2i}$ , 得到坐标系  $U_i - X_1 Y_1 Z_1$ ; 最后沿  $Z_1$  轴平移杆长  $l_i$ , 得到坐标系  $U_i - X_2 Y_2 Z_2$ , 点  $S_i$  在  $U_i - X_2 Y_2 Z_2$  坐标系中的坐标为  $[0, 0, 0]^T$ 。

坐标系  $U_i - X_0 Y_0 Z_0$  相对定坐标系  $\{A\}$  变换矩阵为

$${}^A T_0 = \begin{bmatrix} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i & 0 & {}^A P_{U_{ix}} \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i & 0 & {}^A P_{U_{iy}} \\ 0 & 0 & 1 & {}^A P_{U_{iz}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2-13) Fig. 2-3 The establishment of coordinate system

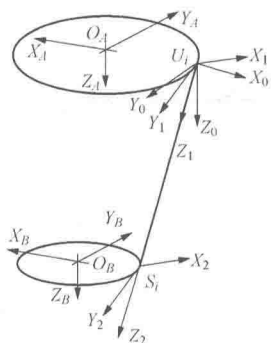


图 2-3 坐标系的建立

坐标系  $U_i - X_1 Y_1 Z_1$  相对  $U_i - X_0 Y_0 Z_0$  的变换矩阵为

$${}^0 T_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(Y, \psi_{1i}) \mathbf{R}(X, \psi_{2i}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-14)$$

其中  $\mathbf{R}(Y, \psi_{1i}) = \begin{bmatrix} \cos\psi_{1i} & 0 & \sin\psi_{1i} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi_{1i} & 0 & \cos\psi_{1i} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{R}(X, \psi_{2i}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\psi_{2i} & -\sin\psi_{2i} \\ 0 & \sin\psi_{2i} & \cos\psi_{2i} \end{bmatrix}$

坐标系  $U_i - X_2 Y_2 Z_2$  相对  $U_i - X_1 Y_1 Z_1$  的变换矩阵为

$${}^1 T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-15)$$

坐标系  $U_i - X_2 Y_2 Z_2$  相对定坐标系  $\{A\}$  变换矩阵为

$$\begin{aligned}
 {}_2^A T &= {}_0^A T_1^0 T_2^1 T = \begin{bmatrix} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i & 0 & {}^A P_{U_{ix}} \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i & 0 & {}^A P_{U_{iy}} \\ 0 & 0 & 1 & {}^A P_{U_{iz}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(Y, \psi_{1i}) R(X, \psi_{2i}) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \cos\varphi_i \cos\psi_{1i} & \cos\varphi_i \sin\psi_{1i} \sin\psi_{2i} - \sin\varphi_i \cos\psi_{2i} & \cos\varphi_i \sin\psi_{1i} \cos\psi_{2i} + \sin\varphi_i \sin\psi_{2i} & l_i \cos\varphi_i \sin\psi_{1i} \cos\psi_{2i} + l_i \sin\varphi_i \sin\psi_{2i} + {}^A P_{U_{ix}} \\ \sin\varphi_i \sin\psi_{1i} & \sin\varphi_i \sin\psi_{1i} \sin\psi_{2i} + \cos\varphi_i \cos\psi_{2i} & \sin\varphi_i \sin\psi_{1i} \cos\psi_{2i} - \cos\varphi_i \sin\psi_{2i} & l_i \sin\varphi_i \sin\psi_{1i} \cos\psi_{2i} - l_i \cos\varphi_i \sin\psi_{2i} + {}^A P_{U_{iy}} \\ \sin\psi_{1i} & \cos\psi_{1i} \sin\psi_{2i} & \cos\psi_{1i} \cos\psi_{2i} & l_i \cos\psi_{1i} \cos\psi_{2i} + {}^A P_{U_{iz}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-16)
 \end{aligned}$$

则动平台  $S_i$  点在定坐标系  $\{A\}$  中坐标为

$$({}^A P_{S_{ix}} \quad {}^A P_{S_{iy}} \quad {}^A P_{S_{iz}} \quad 1)^T = {}_2^A T (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1)^T = \begin{bmatrix} l_i \cos\varphi_i \sin\psi_{1i} \cos\psi_{2i} + l_i \sin\varphi_i \sin\psi_{2i} + {}^A P_{U_{ix}} \\ l_i \sin\varphi_i \sin\psi_{1i} \cos\psi_{2i} - l_i \cos\varphi_i \sin\psi_{2i} + {}^A P_{U_{iy}} \\ l_i \cos\psi_{1i} \cos\psi_{2i} + {}^A P_{U_{iz}} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2-17)$$

可得到虎克铰两个转角的数学模型为

$$\psi_{1i} = \arctan \frac{({}^A P_{S_{ix}} - {}^A P_{U_{ix}}) \cos\varphi_i + ({}^A P_{S_{iy}} - {}^A P_{U_{iy}}) \sin\varphi_i}{{}^A P_{S_{iz}} - {}^A P_{U_{iz}}} \quad (2-18)$$

$$\psi_{2i} = \arcsin \frac{({}^A P_{S_{ix}} - {}^A P_{U_{ix}}) \sin\varphi_i - ({}^A P_{S_{iy}} - {}^A P_{U_{iy}}) \cos\varphi_i}{l_i} \quad (2-19)$$

### 5. 并联机器人驱动杆质心速度与加速度分析

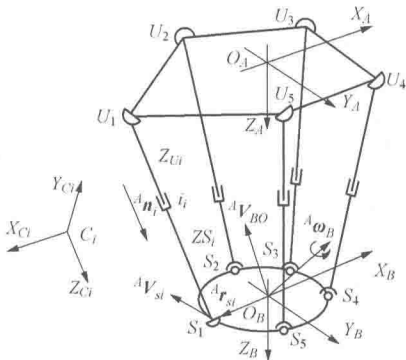


图 2-4 运动分析图

Fig. 2-4 Kinematic analysis diagram

如图 2-4 所示, 各参数均是在定坐标系  $\{A\}$  下的表示。 ${}^A \mathbf{v}_{BO}$  为动平台中心  $O_B$  的线速度； ${}^A \boldsymbol{\omega}_B$  为动平台的转动角速度； ${}^A \mathbf{v}_{S_i}$  为动平台上铰链  $S_i$  的线速度； $\dot{l}_i$  为各驱动杆的驱动线速度； ${}^A \mathbf{n}_i$  为各驱动杆的单位方向向量； ${}^A \mathbf{r}_{S_i}$  为动平台中心  $O_B$  点指向球铰点  $S_i$  的矢径。

将动平台的姿态角  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  对时间求导数， $\dot{\alpha}$  位于  $X_A$  轴上， $\dot{\beta}$  位于  $Y'_B$  轴上， $\dot{\gamma}$  位于  $Z'_B$  轴上。定坐标系  $\{A\}$  下动平台转动角速

度为

$$\begin{aligned}
 {}^A\boldsymbol{\omega}_B &= R(X, \alpha) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\alpha} + R(X, \alpha)R(Y, \beta) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\beta} + R(X, \alpha)R(Y, \beta)R(Z, \gamma) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\gamma} \\
 &= [\dot{\alpha} + \dot{\gamma}\sin\beta \quad \dot{\beta}\cos\alpha - \dot{\gamma}\sin\alpha\cos\beta \quad \dot{\beta}\sin\alpha + \dot{\gamma}\cos\alpha\cos\beta]^T
 \end{aligned} \tag{2-20}$$

由于  $\gamma=0^\circ$ ，所以  $\dot{\gamma}=0$ ，则

$${}^A\boldsymbol{\omega}_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\alpha \\ 0 & \sin\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} \tag{2-21}$$

对  $t$  求导，动平台角加速度为

$${}^A\boldsymbol{\varepsilon}_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos\alpha \\ 0 & \sin\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\sin\alpha \cdot \dot{\alpha} \\ 0 & \cos\alpha \cdot \dot{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} \tag{2-22}$$

动平台的速度可表示为

$$\begin{bmatrix} {}^A\mathbf{V}_{BOx} \\ {}^A\mathbf{V}_{BOy} \\ {}^A\mathbf{V}_{BOz} \\ {}^A\boldsymbol{\omega}_B \end{bmatrix} = \mathbf{T}_\omega \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} \tag{2-23}$$

其中

$$\mathbf{T}_\omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\alpha \end{bmatrix}$$

动平台上的各球铰点  $S_i$  的速度  ${}^A\mathbf{V}_{S_i}$  为

$${}^A\mathbf{V}_{S_i} = {}^A\boldsymbol{\omega}_B \times {}^A\mathbf{r}_{S_i} + {}^A\mathbf{V}_{BO} \tag{2-24}$$

用驱动杆的驱动速度也可表示为

$${}^A\mathbf{V}_{S_i} = {}^A\mathbf{n}_i \dot{l}_i + {}^A\boldsymbol{\omega}_i \times {}^A\mathbf{n}_i l_i \tag{2-25}$$

式中  ${}^A\boldsymbol{\omega}_i$ ——各驱动杆的角速度。

由于驱动杆 UPS 和 UPU 都不能绕自身轴线转动, 所以  ${}^A\boldsymbol{\omega}_i \perp {}^A\mathbf{n}_i$ 。  
用  ${}^A\mathbf{n}_i$  点乘式 (2-25), 得

$${}^A\mathbf{n}_i \cdot {}^A\mathbf{V}_{Si} = \dot{l}_i \quad (2-26)$$

把式 (2-24) 代入式 (2-26), 得到驱动杆的驱动线速度为

$$\begin{aligned} \dot{l}_i &= {}^A\mathbf{n}_i \cdot ({}^A\boldsymbol{\omega}_B \times {}^A\mathbf{r}_{Si}) + {}^A\mathbf{n}_i \cdot {}^A\mathbf{V}_{BO} \\ &= [{}^A\mathbf{n}_i^T \quad ({}^A\hat{\mathbf{r}}_{Si} {}^A\mathbf{n}_i)^T] [{}^A\mathbf{V}_{BO} \quad {}^A\boldsymbol{\omega}_B]^T \end{aligned} \quad (2-27)$$

对  $t$  求导, 驱动线加速度为

$$\begin{aligned} \ddot{l}_i &= [{}^A\mathbf{n}_i^T \quad ({}^A\hat{\mathbf{r}}_{Si} {}^A\mathbf{n}_i)^T] [{}^A\mathbf{a}_{BO} \quad {}^A\boldsymbol{\varepsilon}_B]^T + {}^A\boldsymbol{\omega}_B^T {}^A\hat{\mathbf{r}}_{Si} {}^A\hat{\mathbf{n}}_i {}^A\boldsymbol{\omega}_B \\ &\quad + \frac{1}{l_i} [{}^A\mathbf{V}_{BO} \quad {}^A\boldsymbol{\omega}_B]^T [I \quad -{}^A\hat{\mathbf{r}}_{Si}]^T [I \quad -{}^A\hat{\mathbf{r}}_{Si}] [{}^A\mathbf{V}_{BO} \quad {}^A\boldsymbol{\omega}_B]^T \\ &\quad - \frac{1}{l_i} [{}^A\mathbf{V}_{BO}^T \quad {}^A\boldsymbol{\omega}_B^T] [{}^A\mathbf{n}_i \quad {}^A\hat{\mathbf{r}}_{Si} {}^A\mathbf{n}_i]^T [{}^A\mathbf{n}_i^T \quad ({}^A\hat{\mathbf{r}}_{Si} {}^A\mathbf{n}_i)^T] [{}^A\mathbf{V}_{BO} \quad {}^A\boldsymbol{\omega}_B]^T \end{aligned} \quad (2-28)$$

式中  ${}^A\mathbf{a}_{BO}$ ——动平台中心  $O_B$  加速度;

${}^A\hat{\mathbf{r}}_{Si}$ —— ${}^A\mathbf{r}_{Si}$  的反对称算子;

${}^A\hat{\mathbf{n}}_i$ —— ${}^A\mathbf{n}_i$  的反对称算子;

$I$ ——三阶单位矩阵。

用  ${}^A\mathbf{n}_i$  叉乘式 (2-25), 得

$${}^A\boldsymbol{\omega}_i = \frac{{}^A\mathbf{n}_i \times {}^A\mathbf{V}_{Si}}{l_i} \quad (2-29)$$

把式 (2-24) 代入式 (2-29), 得到驱动杆的角速度为

$$\begin{aligned} {}^A\boldsymbol{\omega}_i &= \frac{{}^A\mathbf{n}_i}{l_i} \times ({}^A\boldsymbol{\omega}_B \times {}^A\mathbf{r}_{Si} + {}^A\mathbf{V}_{BO}) \\ &= \frac{1}{l_i} [{}^A\hat{\mathbf{n}}_i \quad -{}^A\hat{\mathbf{n}}_i {}^A\hat{\mathbf{r}}_{Si}] [{}^A\mathbf{V}_{BO} \quad {}^A\boldsymbol{\omega}_B]^T \end{aligned} \quad (2-30)$$

求  $t$  求导, 驱动杆的角加速度为

$$\begin{aligned} {}^A\boldsymbol{\varepsilon}_i &= \frac{1}{l_i} \{ [{}^A\hat{\mathbf{n}}_i \quad -{}^A\hat{\mathbf{n}}_i {}^A\hat{\mathbf{r}}_{Si}] [{}^A\mathbf{a}_{BO} \quad {}^A\boldsymbol{\varepsilon}_B]^T - {}^A\hat{\mathbf{n}}_i {}^A\boldsymbol{\omega}_B^T {}^A\hat{\mathbf{r}}_{Si} {}^A\boldsymbol{\omega}_B \} \\ &\quad - \frac{2}{l_i^2} \{ [{}^A\hat{\mathbf{n}}_i \quad -{}^A\hat{\mathbf{n}}_i {}^A\hat{\mathbf{r}}_{Si}] [{}^A\mathbf{V}_{BO} \quad {}^A\boldsymbol{\omega}_B]^T [{}^A\mathbf{n}_i^T \quad ({}^A\hat{\mathbf{r}}_{Si} {}^A\mathbf{n}_i)^T] [{}^A\mathbf{V}_{BO} \quad {}^A\boldsymbol{\omega}_B]^T \} \end{aligned} \quad (2-31)$$

驱动杆由摆动杆、伸缩杆构成, 摆动杆与定平台连接, 其质心点  $Z_{Ui}$  到定平台上相对应的虎克铰  $U_i$  之间的距离是  $l_{Ui}$ ; 伸缩杆与动平台连接, 其质心点  $Z_{Si}$

距离动平台上相对应的球面副  $S_i$  的长度是  $l_{S_i}$ 。

摆动杆质心  $Z_{U_i}$  的线速度为

$${}^A \mathbf{V}_{Z_{U_i}} = {}^A \boldsymbol{\omega}_i \times {}^A \mathbf{n}_i l_{U_i} \quad (2-32)$$

摆动杆质心  $Z_{U_i}$  的线加速度为

$${}^A \mathbf{a}_{Z_{U_i}} = {}^A \boldsymbol{\varepsilon}_i \times {}^A \mathbf{n}_i l_{U_i} + {}^A \boldsymbol{\omega}_i ({}^A \boldsymbol{\omega}_i \times {}^A \mathbf{n}_i) l_{U_i} \quad (2-33)$$

伸缩杆质心  $Z_{S_i}$  的线速度为

$${}^A \mathbf{V}_{Z_{S_i}} = {}^A \mathbf{n}_i \dot{l}_i + {}^A \boldsymbol{\omega}_i \times {}^A \mathbf{n}_i (l_i - l_{S_i}) \quad (2-34)$$

伸缩杆质心  $Z_{S_i}$  的线加速度为

$${}^A \mathbf{a}_{Z_{S_i}} = {}^A \mathbf{n}_i \ddot{l}_i + {}^A \boldsymbol{\varepsilon}_i \times {}^A \mathbf{n}_i (l_i - l_{S_i}) + {}^A \boldsymbol{\omega}_i ({}^A \boldsymbol{\omega}_i \times {}^A \mathbf{n}_i) (l_i - l_{S_i}) + 2({}^A \boldsymbol{\omega}_i \times {}^A \mathbf{n}_i) \dot{l}_i \quad (2-35)$$

### 2.1.3 并联机器人刚体动力学方程

#### 1. 虎克铰受力分析

4-UPS/UPU 并联机器人动平台上的虎克铰简易结构如图 2-5 (a) 所示, 虎克铰可以化简成两个彼此垂直的轴线, 如图 2-5 (b) 所示, 由于两条轴线均对称, 所以虎克铰受到大小相等且方向相反的力, 因此虎克铰可承受一定的扭矩。在并联机器人动平台上的虎克铰处建立 Hooke 坐标系  $O-XYZ$ ,  $X$ 、 $Y$  分别表示虎克铰的两个轴线的方向, 假定  $Y$  轴的方向和动坐标系  $\{B\}$  的  $Y_B$  轴方向相同。

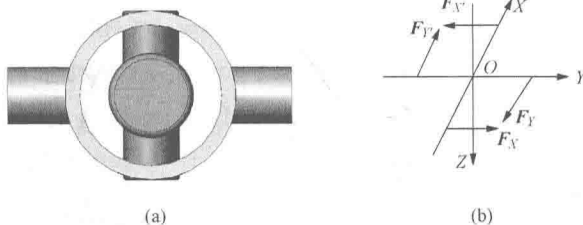


图 2-5 虎克铰的模型和受力图

Fig. 2-5 Solid model and force analysis diagram of Hooke joint

(a) 虎克铰模型; (b) 虎克铰受力图

若不计摩擦, 驱动杆受到的扭矩用矢量法可表示为

$$\mathbf{D}_X \times \mathbf{F}_X = -\mathbf{D}_Y \times \mathbf{F}_Y = \mathbf{M}_{U_i} \quad (2-36)$$

式中  $\mathbf{D}_X$ 、 $\mathbf{D}_Y$ ——轴线两端之间的矢量;

$\mathbf{F}_X$ ——驱动杆对虎克铰的作用力;



$F_Y$ ——动平台对虎克铰的作用力；

$M_{U_i}$ ——图 2-5 (b) 所建立的虎克铰坐标系下驱动杆所受的来自动平台的扭矩。

$M_{U_i}$  表达式为

$$M_{U_i} = [0, 0, M_{U_{iz}}]^T \quad (2-37)$$

将驱动杆受到的来自动平台的扭矩从虎克铰坐标系中转化到动坐标系中，其表达式为

$${}^B M_{L_i} = \text{rot}(Y, \zeta) M_{U_i} = \begin{bmatrix} \cos \zeta & 0 & \sin \zeta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \zeta & 0 & \cos \zeta \end{bmatrix} M_{U_i} \quad (2-38)$$

式中  ${}^B M_{L_i}$ —— $\{B\}$  系下动平台的扭矩；

$\zeta$ ——Hooke 坐标系绕  $\{B\}$  系  $Y_B$  轴的转角， $\zeta = \beta - \psi_{1i}$ 。

同理，在并联机器人定平台上的虎克铰上建立虎克铰坐标系  $O' - X'Y'Z'$ ， $X'$ 、 $Y'$  分别表示虎克铰的两个轴线的方向，假定  $Y'$  轴的方向和定坐标系  $\{A\}$  的  $Y_A$  轴的方向相同。 $M'_{U_i}$  为驱动杆所受的来自定平台的扭矩，其表达式为

$$M'_{U_i} = [0, 0, M'_{U_{iz}}]^T \quad (2-39)$$

驱动杆受到的来自定平台的扭矩从虎克铰坐标系中转化到支链坐标系中，其表达式为

$${}^i M_{2i} = \text{rot}(X, \psi_{2i})^{-1} M'_{U_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi_{2i} & -\sin \psi_{2i} \\ 0 & \sin \psi_{2i} & \cos \psi_{2i} \end{bmatrix}^{-1} M'_{U_i} \quad (2-40)$$

式中  ${}^i M_{2i}$ —— $\{C_i\}$  系下定平台的扭矩；

$\psi_{2i}$ ——Hooke 坐标系绕支链坐标系  $\{C_i\}$   $X_{C_i}$  轴的转角。

## 2. 支链的动力学方程

如图 2-6 所示，对 4-UPS/UPU 并联机器人各构件进行受力分析。假设  ${}^i f_i = [{}^i f_{ix} \quad {}^i f_{iy} \quad {}^i f_{iz}]^T$  为  $\{C_i\}$  系中  $i$  支链对动平台的力； ${}^A g = [0 \quad 0 \quad g]^T$  为定坐标系  $\{A\}$  下的重力加速度。

在支链系  $\{C_i\}$  中，第  $i$  支链作用于定平台上对应铰链的合外力矩  ${}^i M_G$  的表达式

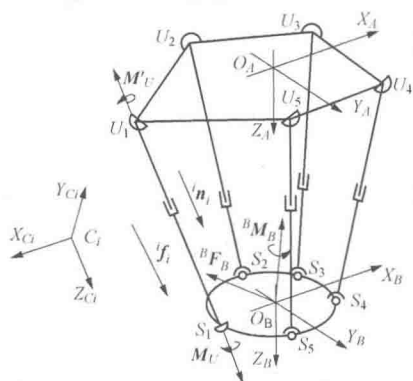


图 2-6 受力分析图

Fig. 2-6 Force analysis diagram