



数学·统计学系列

College Geometry

大学几何学

[美] N·A·考特 著 赵勇 译



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



数学·统计学系列

College Geometry 大学几何学

● [美] N. A. 考特 著 ● 赵勇 译



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书是一部久负盛名的欧氏几何学名著。

书中的第一部分强调作图问题,继之概括论述了相似和位似、三角形和四边形的性质,以及调和分割。随后的章节研究了包括反演点、正交圆、共轴圆及阿波罗尼斯圆等内容的圆的几何学。三角形几何学集中讨论了莱莫恩几何和布洛卡几何、等角共轭线、塔克圆以及垂极点。贯穿全书还给出了大量不同难度的习题。

本书适合大、中学师生以及几何爱好者学习和研究。

图书在版编目(CIP)数据

大学几何学/(美)N·A·考特著;赵勇译. —哈尔滨:
哈尔滨工业大学出版社,2017.1

书名原文:COLLEGE GEOMETRY

ISBN 978-7-5603-6261-8

I. ①大… II. ①N…②赵… III. ①几何学
IV. ①O18

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 254700 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 张永芹 刘家琳

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 19.75 字数 371 千字

版 次 2017 年 1 月第 1 版 2017 年 1 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-6261-8

定 价 78.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

翻译说明

本书的英文名是 *College Geometry: An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle*^①, 简称为 *College Geometry*. 作者是波兰裔美籍几何学家内森·阿尔特席勒·考特(Nathan Altshiller Court).

本书作者 N·A·考特是世界著名的三角形几何学家. 1881 年出生于波兰华沙, 1911 年在比利时根特大学(University of Ghent)获得理学博士学位. 随后不久即赴美, 在美国的多所大学进行过教学. 1917 年进入俄克拉荷马大学(University of Oklahoma), 在那里任数学教授直到 1951 年退休. 1919 年加入美国国籍. 1968 年在美国俄克拉荷马州诺曼(Norman)去世.

这本书是一本久负盛名的近世几何学名著. 原书第一版出版于 1925 年, 到 1952 年被作者进行修订和增补时, 已在美国作为标准的大学水平的教科书使用长达四分之一世纪. 该中译本就是根据 Barnes & Noble 股份有限公司^② 1952 年出版的第二版进行翻译的. R·A·约翰逊在为自己的著作 *Modern Geometry*^③ 所写的序言中称这本书是“一本新的、成功的美国课本, 我们希望能与它进行友好的竞争.” 加拿大几何学家 R·洪斯贝格在 *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*^④ 的序中则写到“大约在 1875 年, 欧氏几何学经历了一场快速的复兴, ……这一领域中两本杰出的著作是 N·A·考特的 *College Geometry* 和 R·A·约翰逊的 *Advanced Euclidean Geometry*^⑤.” 而当代著名的三角形几何学家, 美国伊凡斯维尔大学(University of Evansville)的数学教授 Clark Kimberling 评论该书“可能是三角形几何学这一学科最常引用的书”.

① 可以译为《大学几何学: 三角形和圆的近代几何学导引》.

② Barnes & Noble 不仅出版图书, 也是美国最大的实体书店, 全美拥有将近 800 家店面, 公司亦是全球仅次于 Amazon(亚马逊)的第二大网上书店.

③ 即单增先生翻译的《近代欧氏几何学》, 哈尔滨工业大学出版社, 2012 年 3 月第 1 版.

④ 该书由本书译者译出, 中文名《十九和二十世纪欧氏几何学中的片段》, 即将由哈尔滨工业大学刘培杰数学工作室出版.

⑤ 就是上面的 *Modern Geometry*, 这是该书 1929 年初版时使用的书名, 再版时更名为 *Advanced Euclidean Geometry*.

该书被译成了多种语言，在我国就曾有过两种译本。民国二十五年（1936年），商务印书馆出版了陆钦轼先生的中译本，书名为《高级几何学》。民国三十六年（1947年），开明书店出版了蔡研深先生的中译本，书名为《纳氏平面几何学》。两种译本相比较，陆译本文言意味较重，而蔡译本较接近现在的白话文。但这两种译本早已绝版，今天的读者已很难见到。且翻译的时间距今已有七八十年之久，很多术语的译法已经与现在不一样了。这两种译本都是根据原书第一版进行翻译的。而原书在1952年经过作者修订后，内容得到了很大的扩充，增加了一章关于四边形的内容（即第4章），以及一篇很有价值的“历史与文献的注释”，而且对其余几乎所有的内容都进行了修订，这一点原作者在本书的序中也进行了说明。在译者所见过的同一种书的不同版本之间，这本书的变化最大，本书的第二版与第一版相比已经几乎是“判若两书”了。鉴于这些原因，译者觉得将这第二版译成中文很有必要，也一定很有价值。

N·A·考特的这本《大学几何学》与R·A·约翰逊的《近代欧氏几何学》一样，都是使用综合的方法，将欧氏几何学在近代的复兴过程中所取得的一些主要成果演绎成一个严谨的体系，内容颇为丰富。这两本书有一些共同的东西，但也有许多彼此没有的内容，可以互相参照。《大学几何学》和《近代欧氏几何学》的一个很大不同，是比较注重作图，特别是探讨了许多类型的三角形的作图问题，而我们知道作图题往往比证明题更难。译者觉得两书相较而言，难度相当，但《近代欧氏几何学》偏重于研究，涉及的范围更加广泛一些，也正因为范围较广，对很多问题的介绍只是点到即止，不够详尽，故比较适合于有一定基础的读者；而《大学几何学》偏重于教学，对于所包含主题的讨论更为细致深入，有利于初学者的学习。当然，这二者的界限并非那么绝对。

本书篇幅不小，包含了六七百个定理和数百道习题。而译者的能力和水平都有限，所以译文中难免有不当之处，敬请读者朋友们不吝批评指正。

赵勇

2014年3月于六安东桥

序

在本书第一版出版前，即一代人之前或更早一点，现代几何学作为一门学科在美国的专科学院和大学的课程中几乎不存在。而且在学术界和出版社编辑部里教育专家的主张中几乎一致认为大学中不需要这门学科，并且即使通向这门学科的途径已向他们敞开也不予理会。

这次第二版所面对的学术氛围已经截然不同了。在这个国家绝大多数大学水平的学校里，无论大小，包括许多以技工为主的学校，大学几何都有了一个坚实的基础。有能力并且充满热情的人员能够被用来教授这门学科。

这些改变自然要求我必须考虑准备一个新的版本了。在本书的规划中，虽然为它赢得许多真诚的朋友和持续的用户的内容被完整地保留了下来，但我认为对原书几乎所有的内容进行重新修订并增加大量新材料以扩充其范围是必要的。

作图问题继续在本书的第一部分进行强调，不过一些不太重要的题目被删掉了，代之以一些其他类型的材料。原版中其他所有的论题都被进行了充实并增加了一些新主题。这些改变在涉及最近的三角形几何学的章节中显得特别明显。关于四边形的新的一章被包含了进来。

许多证明得到了简化。大量其他的证明被新的、简短的或特别吸引人的证明所取代。用来说明的例子在大多数情况下都被替换为新例子。

调和比现在在课程中被较早地引入。这些改变为简化一些论题的叙述提供了机会，并增加了它们的趣味性。

通过加入许多不同难度的习题，本书的内容得到了丰富。它们中相当大的一部分，本身就是值得注意的命题，如果篇幅许可的话，它们在正文中也应该能够拥有自己的一席之地。那些使用本书作为参考的人可以利用这些习题作为教学资料的便利来源。

N. A.-C.
Norman, Oklahoma

鸣 谢

我非常高兴地向我的朋友，亚利桑那州立大学的数学教授 J. H. Butchart 博士，以及俄克拉荷马州农工大学数学系的教授兼主任 L. Wayne Johnson 博士，致以我的感激之情。他们极其仔细地阅读了原稿并提出了许多重要的建议和出色的补充。对于他们的倾情帮助，我表示深深地感谢。

我还想对 Butchart 博士和我的同事 Arthur Bernhart 博士在审读证明的劳神工作中做出的帮助表示感谢。

最后我要向 Barnes and Noble 股份有限公司的编辑部在对待手稿时既严谨又宽厚的风格，以及在本书付印过程中表现出来的无限耐心，表示我的感谢。

N. A.-C.

致教师

本书包含许多超过一门正常大学课程(假定为一个学期,每周三节)所能够涵盖的资料.一些教师通过依着本书从开始教到在一学期时间里所能够到达的任意部分来规避这一困难.认同这一做法可以称得上是一个好的处理方法.

然而,从本书的不同部分进行合理的选择能带给学生们关于近代几何学研究范围的一个比较好的观念,且非常有助于他们几何观点的扩展.

教师更喜欢这种能按自己需要和兴趣进行选择 and 省略的做法.作为一个不成熟的、尝试性的指南,建议省略以下内容.第2章的条目 27, 28, 43, 44, 51~53. 第3章的条目 70, 71, 72, 78, 83, 84, 91~93, 102~104, 106~110, 114, 115, 130, 168, 181, 195~200, 203, 205, 211~217, 229~239. 第4章. 第5章的条目 284~287, 292, 298~305. 第6章的条目 308, 323, 324, 337~344. 第8章的条目 362, 372, 398, 399, 418~420, 431, 432, 438, 439, 463~470, 479~490, 495, 499~517. 第9章. 第10章的条目 583~587, 591, 592, 595, 596, 614~624, 639~648, 658~665, 672~683.

本书的正文不依赖于习题,因此本书可以不参照习题来读.但事实上对于初学者来说做一些不需要情节的练习是必不可少的.

中等的学生预计能解答直接列在本书各分部后面的习题组中的大部分.补充练习旨在挑战比较勤奋、比较有雄心的学生.在标题“复习题”和“习题集锦”下列出的问题,主要吸引那些对近代几何学这门学科有着持久兴趣的人,他们要么是专业人士,要么是业余爱好者.

致学生

正文. 数学证明这门艺术的初学者有时可能会形成一种观点,认为记忆力在数学中不起任何作用.他们认为数学结论是由推理得到的,而且总可以通过适当的证明将它们还原.显然,这种观点是肤浅的.一个命题的数学证明就是论证这个新命题是一些已经公认正确的定义和定理的推论的一种尝试.如果解题者在头脑中没有合适的命题可以利用,则他面对的任务纵然不是完全没有可能,也几乎是没有希望的.

开始学习大学几何的学生应该都有容易理解的关于中学几何的书,在那段快乐的中学时光里这是更适合他自己的课本.每当《大学几何学》中的一个陈述明确地或者隐含地涉及初级课本中的一个命题时,学生指出这个命题的出处,并在用来保存的笔记中,或者大学课本的空白处写下精确的引用是有益的.在中学课本相应命题的空白处标出对《大学几何学》的参考是有价值的.

本书的交叉引用是对于正文的前面部分.例如条目 189 重新提到条目 73.当阅读条目 189 时,记录下与条目 73 相关的这一事实是有价值的.这种“向前”引用的体系有助于回顾课程,并能促进对课本内容的消化吸收.

插图. 学生们在阅读本书时,养成自己画图,并为每一个命题作出一幅单独插图的习惯是有好处的.在许多情形中,一幅粗略的随手画出的草图就足够了.在一个要求的比较复杂的图形中,本书中的相应插图可以作为各部分和各元素布局的指南来查阅.这样的练习有助于这些命题在读者头脑中的巩固.

练习. 在数学学习中练习的意义通常表现在两方面.它们为读者对这门课程内容的掌握情况提供了检查,以及为检验通过运用本书中给出的方法使用资料的能力提供了机会.当然,这两方面不是毫无关联的.

不言而喻,如果一名学生不能明白问题说的是是什么,他是不可能解决这个问题的.提出相反的意见简直是荒谬的.然而根据经验,强调这一点也许是有益的.我们从那些毫无疑问理解其内容的简单命题开始解题之旅.当最终条件完全改变了的时候,习惯使然,我们继续假定一个对问题陈述的瞬间理解.

和大多数几何书中的问题一样,《大学几何学》中几乎所有的问题都是用

语言来叙述的。尽管如此，也许听起来会觉得惊讶的是，明白一个已知问题是什么常常是困难的。几乎所有的努力都是要求确定它的含义。显然，在通向一个解答的任意步骤开始之前，这种理解问题的努力必须最先进行。事实上，对一个问题含义的掌握可能是其解答中最重要，通常也是最困难的一部分。

为了确定学生对问题陈述的理解，他可以不用书本，口头复述问题的原文，或者更好的，凭记忆完整写出它的原文。此外，他必须在心里特别清楚所说、所写句子的含义，能够用自己的语言对任意一个之前从未听说过该问题的人解释这个问题，要具有必要的依据。

最后，作出问题涉及的图形是必不可少的。一幅徒手画出的简单示意图通常就足够了。在许多情况中，一个仔细完成的作图会提供一些有价值的启示。

显然，无法给出一个能产生所有问题解答的绝对有效的准则。当学生已经弄明白问题的含义，准确列出了问题的已知元素和想要求的元素，在他面前已经有了一幅适当的插图时，他已经为他的任务准备好了武器，利用这些帮助，即使一个难解的问题最终也会变得比较容易处理。

学生不能期望一读完问题的正文，解答就总是被他想到。如果是这样，尽管这常常是可能的，那当然好。但是在很多情况下，一个问题要求的最重要的是耐心。一些失败的开始并没有什么不寻常，不必觉得气馁。一个成功的解题者是一个有决心的人——其克服困难的能力——随所遇阻力的增加而增强。则当困难完全突破之后，目标已然达到，巨大的满足感和成就感就是对他的奖赏。

目 录

序	iii
鸣谢	v
致教师	xiii
致学生	xv
1 几何作图	1
A. 预备知识	1
练习	2
B. 作图问题解答的一般方法	2
练习	9
C. 几何轨迹	9
练习	15, 17
D. 间接元素	18
练习	19, 20, 21, 22, 23, 24
补充练习	25
复习题	25
作图	25
命题	27
轨迹	28
2 相似与位似	30
A. 相似	30
练习	33
B. 位似	33
练习	38, 39, 42, 45
补充练习	45

3 三角形的性质	46
A. 预备知识	46
练习	49
B. 外接圆	49
练习	51, 53, 56, 56
C. 中线	57
练习	59, 60, 62
D. 切圆	63
a. 角平分线	63
练习	64
b. 切心	64
练习	68
c. 切半径	68
练习	74, 76
d. 切点	76
练习	82
E. 高	83
a. 垂心	83
练习	86
b. 垂心三角形	86
练习	88, 89
c. 欧拉线	90
练习	91
F. 九点圆	91
练习	95
G. 垂心四边形	96
练习	97, 100
复习题	101
外接圆	101
中线	101
切圆	102
高	103
九点圆	105

	习题集锦	105
4	四边形	109
	A. 一般的四边形	109
	练习	112
	B. 圆内接四边形	112
	练习	118
	C. 垂对角线四边形	118
	练习	121
	补充练习	122
5	西姆松线	123
	练习	127, 130
	补充练习	130
6	截线	132
	A. 引言	132
	练习	133
	B. 斯蒂瓦特定理	133
	练习	134
	C. 梅涅劳斯定理	134
	练习	138
	D. 塞瓦定理	139
	练习	141, 144
	补充练习	145
7	调和分割	146
	练习	148, 150
	补充练习	151
8	圆	152
	A. 反演点	152
	练习	154
	B. 正交圆	154
	练习	156
	C. 极点与极线	157
	练习	161
	补充练习	162

D. 相似中心	163
练习	167
补充练习	167
E. 点关于圆的幂	168
练习	170
补充练习	171
F. 两圆的根轴	171
练习	173, 176
补充练习	177
G. 共轴圆	177
练习	180, 184, 190
H. 三个圆	190
练习	193
补充练习	194
I. 阿波罗尼斯问题	195
练习	199
补充练习	199
9 反演	202
练习	212
10 近代的三角形几何学	214
A. 对于三角形的极点和极线	214
练习	216
B. 莱莫恩几何	217
a. 类似中线	217
练习	221
b. 莱莫恩点	221
练习	225
c. 莱莫恩圆	225
练习	228
C. 阿波罗尼斯圆	228
练习	233
D. 等角线	234
练习	236, 239

E. 布洛卡几何	240
a. 布洛卡点	240
练习	244
b. 布洛卡圆	244
练习	248
F. 塔克圆	249
G. 垂极点	251
练习	254
补充练习	255
历史与文献的注释	257
姓名列表	271
索引	275

第 1 章 几何作图

A. 预备知识

1. 记号. 我们将频繁地使用如下记号:

$A, B, C, \dots$ 多边形的顶点或对应的角;

$a, b, c, \dots$ 多边形的各边(在三角形的情形中, 小写字母表示由相同的大写字母所表示的顶点的对边);

$2p$ 三角形的周长;

$h_a, h_b, h_c; m_a, m_b, m_c$ 三角形 ABC 中与边 a, b, c 对应的各条高以及各条中线;

$t_a, t_b, t_c; t'_a, t'_b, t'_c$ $\angle A, \angle B, \angle C$ 的内角平分线以及外角平分线;

R, r 外接的圆和内切的圆的半径(为了简洁, 我们将使用外接圆, 外半径, 外心和内切圆, 内半径, 内心等术语);

(A, r) 以 A 为圆心且以线段 r 为半径的圆;

$M = (PQ, RS)$ 两条直线 PQ 和 RS 的交点 M .

2. 基本的作图. 常用的作图由以下各作图法构成:

分一条已知线段为给定数量的相等部分.

(i) 内分或 (ii) 外分一条已知线段成定比 (§ 54).

作三条已知线段的第四比例项.

作一个正方形使其面积等于一个已知的 (i) 长方形; (ii) 三角形.

作一个正方形使其面积等于两个、三个或更多个已知正方形面积的和.

已知两条线段的和与差, 作这两条线段.

自一个已知点作一个已知圆的切线.

作两个已知圆的内公切线与外公切线.

[1]

练习

作三角形, 已知:

1. a, b, c .

4. a, h_a, B .

6. a, B, t_b .

2. a, b, C .

5. a, b, m_a .

7. A, h_a, t_a .

3. a, B, C .

已知直角 A 及以下条件, 作直角三角形:

8. a, B .

10. a, b .

9. b, C .

11. b, c .

作平行四边形, 已知:

12. AB, BC, AC .

13. AB, AC, B .

14. $AB, BD, \angle ABD$.

作四边形 $ABCD$, 已知:

15. A, B, C, AB, AD .

16. AB, BC, CD, B, C .

17. A, B, C, AD, CD .

18. 用已知半径作一个圆, 使其分别与下列图形相切于一个已知点: (i) 一条定直线; (ii) 一个定圆.

19. 过两个已知点作一个圆, 使其分别满足: (i) 半径有定长; (ii) 圆心在一条定直线上.

20. 作一个已知圆具有给定方向的切线.

21. 内分及外分一已知线段成两已知线段 p, q 的平方之比. (提示: 如果 AD 是直角三角形 ABC 中斜边 BC 上的高, 则 $AB^2 : AC^2 = BD : DC$.)

22. 已知斜边以及两条直角边平方的比, 作出这个直角三角形.

23. 已知线段 a, p, q , 作线段 x 使得 $x^2 : a^2 = p : q$.

24. 作等边三角形与一个已知三角形面积相等.

3. 建议. 前面的大部分问题都是用约定的符号来叙述的. 用语言来叙述一下它们是有益的. 例如, 练习 4 可以叙述为: 已知一个三角形的底边, 底边上对应的高, 以及一个底角, 作出这个三角形.

[2]

B. 作图问题解答的一般方法

4. 分析法. 一些作图题是已知命题的直接应用, 它们的解答几乎是显然的. 如: 作一个等边三角形.

如果一个问题解答非常棘手, 而它的解又是已知的, 则可以由一个我们知道如何去进行的操作开始, 继之以一连串这类的操作, 直至达到目标.

这一程序称为问题解答的综合法. 它适用于给出课本中问题的解答.