

哈尔滨理工大学
制造科学与技术系列专著

薄壁件加工过程 动力学特性研究

吴 石 著



科学出版社

哈尔滨理工大学制造科学与技术系列专著

薄壁件加工过程 动力学特性研究

吴 石 著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书结合理论分析和实验研究,对叶轮加工过程的动力学特性进行深入分析,阐述了薄壁件加工过程的动力学特性,主要分析了薄壁件铣削颤振稳定域的建模和刀具磨损量对铣削稳定性的影响,采用非线性参数估计方法,定性分析铣削颤振各阶段行为,给出李雅普诺夫指数、转速和切深的三维关系图。本书以五轴机床加工闭式叶轮为研究对象,建立面向薄壁件加工系统的综合刚度场模型,同时着重分析了主轴-刀柄-刀具结合面的接触刚度。最后,进行相应的泵轮加工制造的实验研究,并基于理论研究成果进行系统集成与应用软件开发研究,开发铣削系统动力学测试仿真软件,实现信号分析及动力学仿真,其功能模块扩充了现有动力学软件的功能。

本书可作为从事金属切削力学和动力学、数控加工技术等相关领域的科研工作者和工程技术人员参考用书,也可以作为高等学校相关专业研究生、高年级本科生及教师的工具书。

图书在版编目(CIP)数据

薄壁件加工过程动力学特性研究/吴石著.—北京:科学出版社,2017.3
(哈尔滨理工大学制造科学与技术系列专著)
ISBN 978-7-03-050389-3

I. ①薄… II. ①吴… III. ①薄壁件-加工 IV. ①TH136

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 257557 号

责任编辑:张 震 杨慎欣 / 责任校对:彭 涛
责任印制:张 伟 / 封面设计:无极书装

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京厚诚则铭印刷科技有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017 年 3 月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2017 年 3 月第一次印刷 印张:11

字数:210 000

定价:75.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

航空、航天是国防工业和制造业重要的组成部分，许多航空、航天零件采用薄壁件，薄壁件具有曲面复杂、变厚度、质量轻、刚性差等特点。加工过程中，由于薄壁结构零件外轮廓尺寸相对截面尺寸较大，易变形，铣削加工余量大，加工工艺性较差，在较大的动态切削力作用下很容易发生加工颤振，导致不稳定性加工。金属切削过程中刀具与薄壁件之间铣削振动的产生原因和发生、发展规律与铣削加工过程本身及金属切削机床动态特性都有着内在联系，其影响因素很多，是一个非常复杂的非线性机械振动现象。如何针对工件和机床的特点，在加工中使机床性能得到最大限度的发挥，加工效率得到最大限度的提高，并尽量减少对机床、工件、刀具的振动，使走刀运动光滑、平稳，加工的工件能够做到控形、控性，这是高性能加工过程动力学涉及的主要问题。

本书在总结过去研究工作的基础上阐述薄壁件铣削加工过程的颤振稳定性理论及参数优化，为薄壁件铣削加工稳定性和工艺参数优化提供理论依据。薄壁件加工精度和加工稳定性保持下的加工效率最大化是高性能加工的目标所在，工艺系统动力学模型和加工稳定性是高性能加工的核心。本书围绕高性能加工的目标与核心，从加工稳定性这个层面着重阐述薄壁件加工过程动力学特性。本书以球头铣刀五轴侧铣薄壁叶片为研究对象，根据未变形切屑厚度模型建立切屑厚度矢量表达式，通过关联计算两个刀具的刀心点，得到切屑厚度的解析表达式，为薄壁件动力学特性分析奠定基础。本书主要通过全离散法对铣削过程的颤振稳定域与表面位置误差进行预测，并考虑各种状况下（如铣刀的磨损、刀柄-刀具结合面的接触刚度、系统综合刚度等）颤振稳定域的变化，最后根据钛合金闭式泵叶轮结构特点与材质特性，有针对性地对叶片型腔进行粗、精加工。精加工中采用可变轮廓铣削，保证样件与数学模型的一致性，提高叶片的成型质量，并对钛合金闭式泵叶轮进行动力学分析。最后，本书还建立了薄壁件铣削系统的仿真软件。

本书的研究工作得到了国家自然科学基金项目（编号：51275139）、中国博士后基金项目（编号：20110491098）的资助，特此向支持和关心作者研究工作的所有人员表示衷心的感谢。特别感谢教育、支持、帮助作者多年的导师刘献礼教授和对本书写作提供大力支持的姜彦翠老师，以及作者的学生们。书中有部分内容参考了有关单位或个人的研究成果，均在参考文献中列出，在此一并感谢！

本书的宗旨是阐述和介绍薄壁件加工过程动力学的一些进展，希望能够提供一些有借鉴、应用意义和价值的思路和方法，使读者有所启发。多轴联动高速加工薄壁件需要现代较新的理论和方法，这为本书的撰写增添了难度。书稿虽几经修改，但因作者水平有限，书中错误和缺点在所难免，欢迎广大读者不吝赐教。

吴 石

2016 年 8 月 20 日于哈尔滨

目 录

前言

第 1 章 绪论	1
1.1 切削过程动力学模型	3
1.2 非线性铣削系统再生颤振的研究	5
1.3 非线性铣削系统分叉与混沌的研究	7
1.4 铣削系统综合刚度场建模研究	10
1.5 本书的主要内容	11
参考文献	12
第 2 章 球头铣削未变形切屑厚度的建模	16
2.1 球头铣刀刀刃滞后角计算	17
2.2 刀具和工件空间坐标变换	18
2.2.1 各坐标系的定义	18
2.2.2 刀具-工件坐标系的转换	19
2.2.3 相邻刀心点间的坐标变换	20
2.3 未变形切屑厚度的求解	22
2.3.1 切屑厚度控制点 A 的求解	23
2.3.2 切屑厚度控制点 B 的求解	23
2.3.3 控制点 A 和 B 的关联计算及未变形切屑厚度	26
2.4 本章小结	28
参考文献	28
第 3 章 铣削颤振稳定域研究基础	30
3.1 铣削动力学模型	30
3.1.1 铣削刚性件的 dynamics 模型	30
3.1.2 铣削柔性件的 dynamics 模型	32

3.2	全离散法	35
3.3	本章小结	40
	参考文献	40
第 4 章	轴向力和陀螺效应对铣削颤振稳定域的影响	42
4.1	交变轴向力对系统固有频率的影响	42
4.2	陀螺效应对铣削系统固有频率的影响	44
4.3	轴向力和陀螺效应对稳定域的影响	46
4.4	实验验证及分析	50
4.5	本章小结	52
	参考文献	53
第 5 章	铣刀磨损量对颤振稳定域的影响	54
5.1	铣刀不同磨损阶段的铣削力系数	54
5.2	基于全离散法的颤振稳定域预测	57
5.3	基于全离散法的动态加工误差同步预报	60
5.4	实验验证及分析	63
5.5	本章小结	65
	参考文献	65
第 6 章	铣削颤振过程的非线性振动行为	67
6.1	铣削非线性振动行为分析方法	67
6.1.1	铣削振动信号 Lyapunov 指数分析	67
6.1.2	铣削振动信号分形维数分析	68
6.1.3	铣削振动信号近似熵分析	69
6.2	铣削振动信号的非线性行为分析	70
6.3	铣削颤振非线性特征提取方法研究	72
6.3.1	铣削颤振特征的连续小波变换提取	72
6.3.2	基于高阶谱分析的铣削颤振特征提取	75
6.4	本章小结	77
	参考文献	78

第 7 章 薄壁件铣削颤振稳定域的非线性判据实验研究	79
7.1 颤振过程的其他非线性分析方法	80
7.1.1 相平面作图法	80
7.1.2 Poincaré 映射	84
7.2 薄壁件铣削加工实验	84
7.3 颤振稳定域预测	92
7.4 本章小结	94
参考文献	95
第 8 章 薄壁件五轴加工系统综合刚度场分析	97
8.1 闭式叶片自适应采样及法向量计算	97
8.2 闭式叶片刚度矩阵计算	98
8.3 五轴加工系统运动链模型建立	100
8.4 五轴加工系统综合刚度场模型建立	103
8.5 综合刚度场特性分析	106
8.5.1 加工系统的刚度性能分析	106
8.5.2 面向实际加工的系统综合刚度性能分析	109
8.6 本章小结	116
参考文献	116
第 9 章 考虑结合面的主轴系统动力学特性研究	118
9.1 主轴系统结构件的动力学建模	118
9.2 主轴结合面的动力学建模	121
9.2.1 考虑轴向铣削力的主轴结合面刚度计算	124
9.2.2 考虑离心力的主轴结合面刚度计算	128
9.3 主轴系统的整体动力学建模	129
9.4 主轴系统的固有频率	130
9.4.1 考虑轴向铣削力的主轴系统固有频率	130
9.4.2 考虑离心力的主轴系统固有频率	131
9.5 主轴系统频响函数分析	132
9.5.1 考虑轴向铣削力的主轴系统频响函数	133

9.5.2	考虑离心力的主轴系统频响函数	133
9.5.3	考虑预紧力和刀具参数的主轴系统频响函数	134
9.6	本章小结	136
	参考文献	137
第 10 章	钛合金泵叶轮加工	139
10.1	加工工艺实验	139
10.1.1	泵叶轮简介	139
10.1.2	泵叶轮加工工艺规划	140
10.2	钛合金闭式泵叶轮的动力学分析	142
10.3	钛合金闭式泵叶轮的加工制造	146
10.4	泵叶轮的工艺优化分析	148
10.5	本章小结	149
第 11 章	铣削过程动力学行为预测软件开发	150
11.1	系统开发环境	150
11.2	模块简介	151
11.2.1	系统登录管理模块	151
11.2.2	表面加工模块	152
11.2.3	薄壁件铣削稳定性预测模块	153
11.2.4	多轴系统刚度场建模模块	158
11.2.5	振动信号特征提取模块	161
11.2.6	系统帮助模块	164
11.2.7	实验信息模块	164
11.3	本章小结	166

第 1 章 绪 论

制造业的发展是推动国家经济快速增长的强大动力，其发展水平决定着一个国家的综合实力和竞争力。国家统计局统计数据显示，2015 年中国制造业对外贸易额为 19 659.3 亿美元，占出口总额的 90%以上，其中，高技术产品出口额约占 30%，为 6552.1 亿美元，机电产品出口额为 13 107.2 亿美元，占出口总额的 58%。可见，随着国际制造业产品的变革，中国正逐渐成为制造业中心，并处在由制造业大国向强国转变的关键时期。

航空、航天产业为国防工业和制造业最重要的组成部分，决定了整个民族的现代化程度，随着现代工业的快速发展和激烈的市场需求，其产品不断向高精度和高效率制造技术方向发展^[1]。实现高性能复杂曲面零件的高效、精密多轴加工是提高中国航空、航天复杂零部件整体制造水平和重大装备自主研制能力的核心关键技术。其中，钛合金以其质轻、承载力强、抗疲劳裂纹扩展能力强在航空、航天等领域中占主要地位。航空、航天典型零件形状复杂、刚性差、切削力大的特点，以及机床结构系统本身的复杂性，使得在多种激励强耦合作用下切削过程的动态特性和失稳机制变得十分复杂，如果不能准确地进行切削动态稳定性预测，一旦铣削发生混沌振动甚至颤振而导致不稳定切削，就会影响加工精度和产品质量。几种典型钛合金零件如图 1-1 所示。



图 1-1 几种典型航空、航天钛合金零件

实验加工半开式叶轮如图 1-2 所示，当叶片受到切削力后会产生受迫振动，这种刀具及叶片的耦合颤振严重影响叶片的表面加工质量，使叶片表面出现鱼鳞状缺陷，导致叶尖段多次加工不到位、表面出现振纹等问题，如图 1-3 所示。

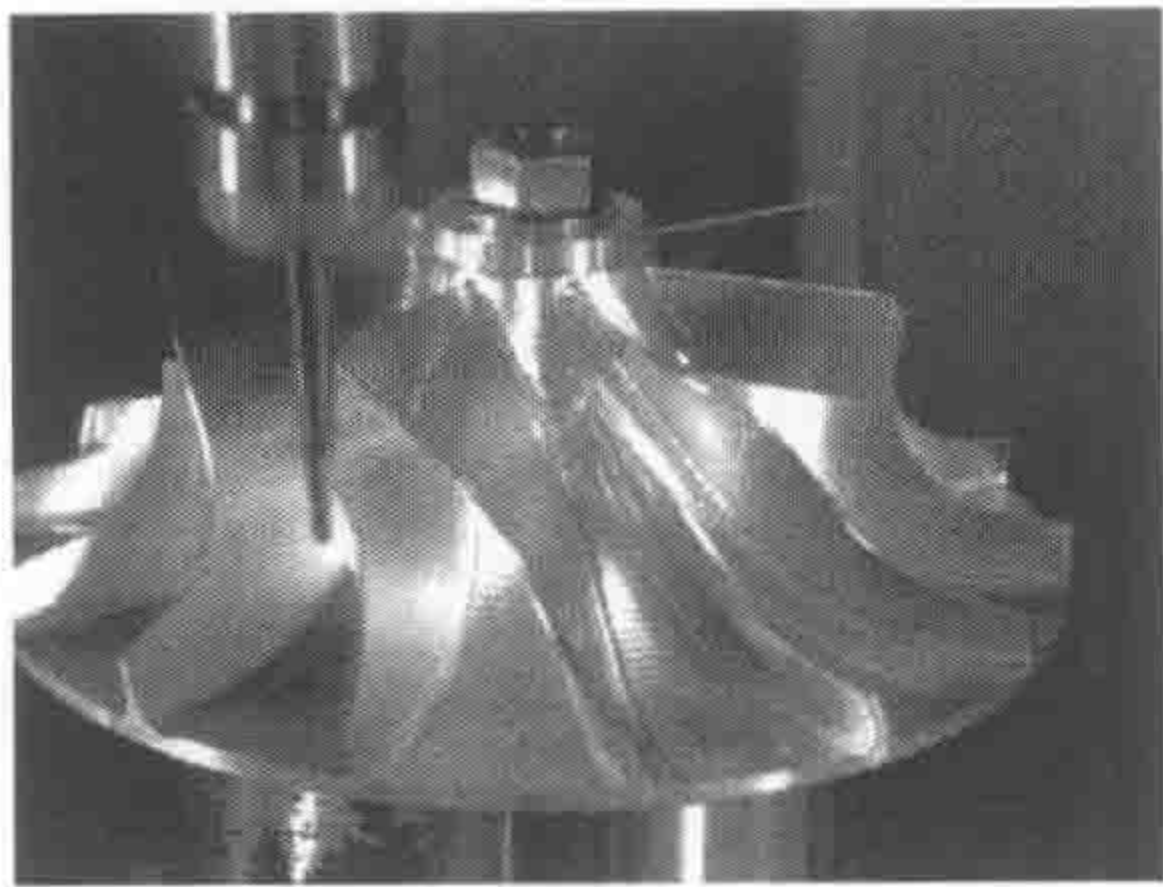


图 1-2 实验加工叶轮

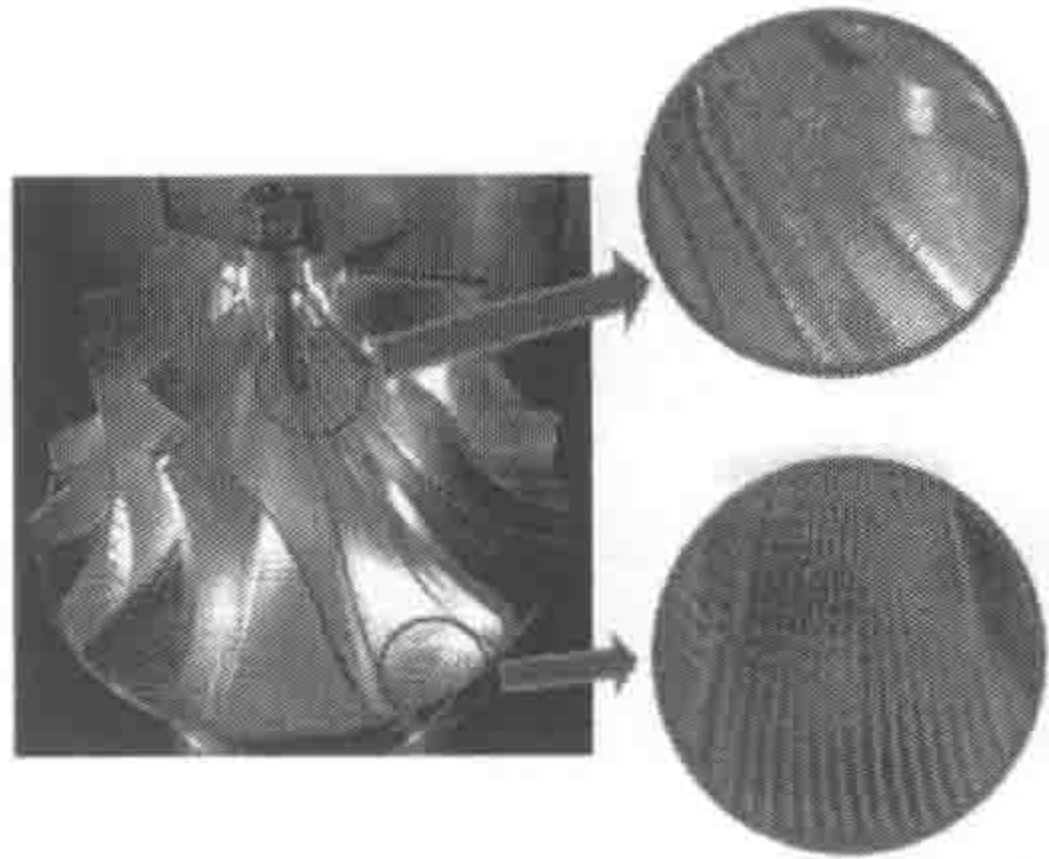


图 1-3 叶轮中产生振纹的叶片

高速铣削作为一种高效切削方式，具有较大的材料去除率、高加工精度以及加工成本低等优点，被广泛应用于航空、航天、船舶、汽车关键零部件及模具加工等领域。可是，高速/超高速加工工况不断趋于极限，在高速、离心力、陀螺效应和动态切削力等多种激励强耦合作用下，切削过程的动态特性和失稳机制变得十分复杂。如果不能准确地进行切削动态稳定性预测，一旦刀具发生颤振将导致不稳定切削，会影响加工精度和产品质量。颤振是一种不稳定的自激振动，国内外学者对铣削过程稳定性分析的研究工作集中在从铣削过程动力学模型出发寻找加工过程多工艺参数耦合的精确稳定域边界。同时，高速铣削过程即使不发生颤振，加工过程的受迫振动也会影响工件的加工精度，主要影响表面位置误差 (surface location error, SLE)^[2]和表面粗糙度。因此，加工过程铣削动力学是优化工艺参数和实现高效率、高精度铣削的重要研究方向。

目前，在铣削动力学的研究中大部分理论是基于线性理论，但实际加工中主轴-刀具-工件-夹具系统是复杂的非线性系统^[3]，传统线性理论对于切削厚度较小的非线性系统采用线性理论近似就可以满足要求。但是，随着高速铣削的发展，采用传统理论已经不能保证所建模型的精度，难以准确预测颤振临界值、工件的表面位置误差和粗糙度等。非线性切削颤振理论可以更好地解释颤振发生、发展和自稳定的全过程^[4]，如颤振振幅会稳定在一定水平上而不会无限地增大，切削颤振发生与消失阈值的分离特性，以及稳定域边界的振动分叉、混沌振动的产生等。

1.1 切削过程动力学模型

按照铣削颤振机理的不同,颤振类型可以分为再生型颤振、摩擦型颤振、模态耦合型颤振以及力热型颤振。就铣削加工过程而言,再生颤振是引起加工过程失稳及降低零件加工质量和生产效率的主要因素^[5]。影响非线性再生型颤振模型的主要因素如下:机床或结合面非线性刚度和非线性阻尼因素;切削热与力耦合因素;具有非光滑特性的切削力因素;刀刃振离工件产生大振幅因素;以及各种因素的耦合。

为简化起见,设铣削系统是一个单自由度系统,如图1-4所示。 $R(t)$ 是系统在模态方向上的动态位移,与 x 轴的夹角为 α 。考虑机床结构非线性刚度的单自由度铣削动力学模型可以表示为

$$m\ddot{R}(t) + c\dot{R}(t) + k[R(t) + \beta R^3(t)] = \frac{1}{2}a_p a_0 [R(t) - R(t-T)] \quad (1-1)$$

式中, a_p 为铣削深度; m 为铣削系统的质量; c 为铣削系统的阻尼系数; $a_0 = a_{11} \cos^2 \alpha + a_{12} \sin \alpha \cos \alpha - a_{21} \sin \alpha \cos \alpha - a_{22} \sin^2 \alpha$, 其中, $a_{ij}(t)$ 为时变铣削力系数, $i, j = 1, 2$; T 为主轴转动周期, $R(t-T)$ 为时滞项。式(1-1)以线性项和立方项之和来表示源于中性轴伸长和对称的转轴材料物理非线性因数,由此对应的铣削系统弹性力可以表示为 $F_k = k[R(t) + \beta R^3(t)]$, 其中, k 和 k_1 分别为铣削系统的线性和非线性刚度项系数,线性刚度与非线性刚度系数的比值 $\beta = k_1 / k$ 。

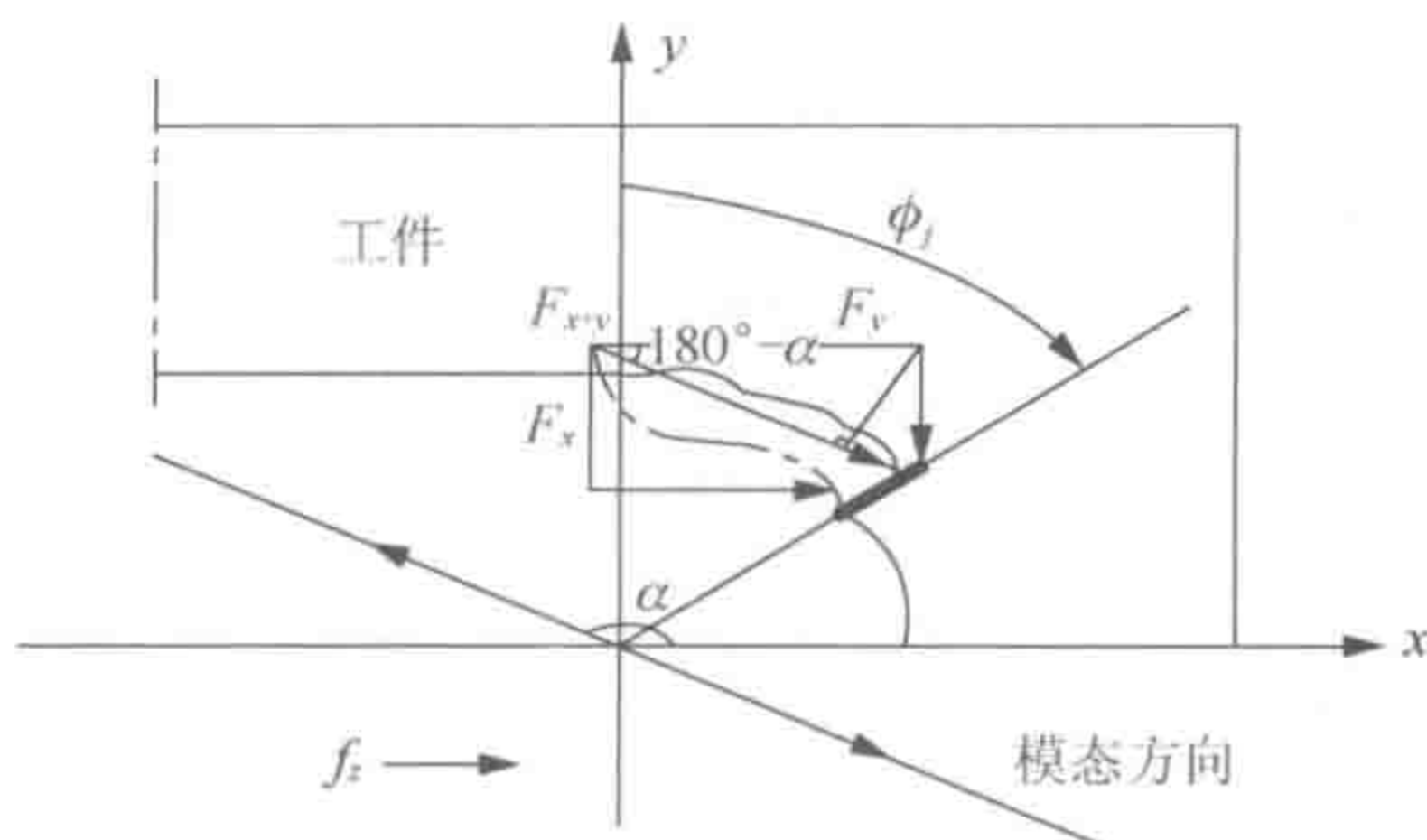


图 1-4 单自由度铣削系统振动模态示意图

当振动幅度较大时会导致刀具与工件脱离接触,即刀具的轨迹有一部分越出工件材料之外,可使切削过程自行中断,这与周期性的刀齿切削工件的参数化断续切削相比有很大区别,是非光滑非线性动态铣削力学的本质。考虑刀刃振离工

件时，第 n 个刀齿切削时的瞬时切削厚度 Δh 可以表示为

$$\Delta h = \begin{cases} R(t) - \max[R(t - T/z), R(t - 2T/z), \dots, R(t - (n-1)T/z)], & \text{当 } R(t) > R_0(t) \\ 0, & \text{当 } R(t) \leq R_0(t) \end{cases} \quad (1-2)$$

式中，表面的波形面 $R_0(t) = \max[R(t - T/z), R(t - 2T/z), \dots, R(t - (n-1)T/z)]$ ，不是最大值的部分已被后续的刀齿切掉了，不会再留在工件表面上^[4]。当切削厚度较大时，动态切削力一般是非线性的，根据实验数据对动态铣削力进行拟合，动态铣削力有的拟合和切削厚度成三次多项式的，有的拟合和切削厚度呈 0.75 次幂指数形式，还有的拟合和其他指数值^[5-7]。

非线性切削过程研究的基本路线如图 1-5 所示。一般来说，铣削过程非线性的根本来源是切削厚度的非线性时滞动态铣削力非周期性的非光滑行为，即多重再生型效应及刀具和工件的脱离接触。

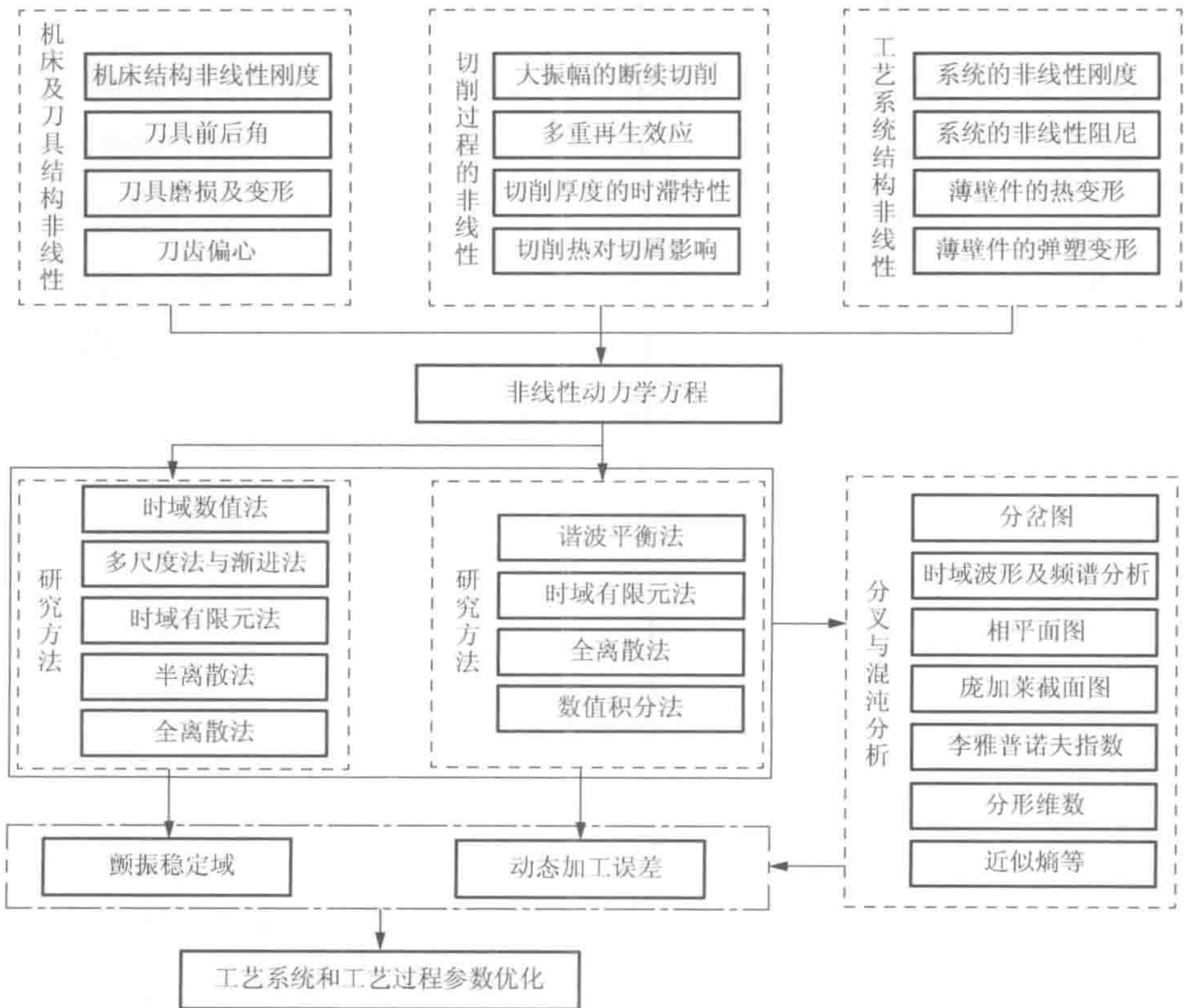


图 1-5 非线性切削过程研究的基本路线

对于非线性动力学方程的分析,研究者一般采用定性分析、定量分析和实验研究方法。定性分析主要进行稳定域分析,判定铣削过程的振动形态,识别铣削过程非线性振动特性;定量分析是利用各种求解方法,考察非线性动力学模型中各参量的变化对于振动状态的影响,以及加工系统工艺参数变化后的振动状态变化的具体情况,如周期运动、准周期运动、混沌运动等;实验方法是以一定的理论基础配合实验方式考察切削过程中具体的运动形态^[8]。

1.2 非线性铣削系统再生颤振的研究

1959年,Tobias提出了动态铣削力的非线性是影响铣削颤振模型的关键因素,并进行了证明^[9,10]。1989年,Stépán根据再生型颤振的成因将切削力的非线性引入颤振的研究中,得出在切削过程中切削厚度不但与本次切削过程还与上一次切削形成的振纹有关,以及某一时刻的状态对现在状态的影响具有时间上的滞后的结论。然后根据Tobias的研究解释了振动有限幅值不稳定性 and 分叉^[11,12]。随后,Stépán指出在刀具没有脱离工件时稳定切削时只产生一个单一的再生型效应,在颤振发生时刀具振动由稳定周期运动变成不稳定运动,并产生非光滑非线性动力学特性,当颤振振幅超过某一临界值时,刀具脱离工件材料的时间超过部分的振荡周期,会产生内在的多重再生型效应。刀具和工件之间的脱离接触会造成有限维相空间的自由振动和无限维相空间的再生切削之间间歇性切换的动态行为^[13],对于机床的时滞非线性表现为振动的失稳。2007年,Long等考虑了刀具、工件系统中四自由度系统,切削厚度在 X 和 Y 向有两种不同的时滞,以及进给量作用而变化的时滞,并利用有限差分法计算再生型时滞微分方程,得到了较精准的非线性颤振稳定瓣图^[14,15]。

另外,有学者认为一些非线性现象能够被分成两个主要的动态系统,即切屑形成机理和热力学。Wiercigroch考虑了具有非线性切削力的机械模型,提出的模型有两个不可分开的子系统:机械子系统和热力学子系统。机械部分由两个主要的部分组成:切削力和推力产生机制(cutting thrust and force generation mechanism, CTFGM)、

机床结构 (machine tool structure, MTS)。热力学部分也由两部分组成: 热产生机理 (heat generation mechanism, HGM) 和热力学等效切屑体积。热产生机理与初始值反馈、摩擦角与剪切角及切屑当前温度的反馈部分相关^[16]。Chung 和 Geddam 从理论上分析了线性颤振与非线性颤振之间的关系, 并从稳定性上解释了线性理论无法解释的现象, 但有的现象还不能得到很好的解释^[17]。

虽然上述研究已经证明了切削力的非线性特性, 特别是切削厚度的非线性时滞是影响切削颤振模型的一个重要因素, 但有时也应考虑机床结构, 特别是刀具与主轴结合面, 以及主轴本身的非线性动态特性。华中科技大学的师汉民率先针对单自由度系统分别建立了刀尖振离工件时非线性颤振模型、机床结构刚度非线性时颤振模型, 以及非线性切削力和刀具振离工件两因素耦合时的颤振模型, 详细阐释了有限振幅不稳定性及其物理根源^[4]。20 世纪 90 年代, 西安交通大学陈花玲认为机床结合面的时滞非线性对切削加工中振动影响很大, 应用等效线性化的方法对所建模型进行解析分析, 解释了双频颤振、稳定阈的分离现象^[18]。随后, 梅志坚等提出影响机床颤振的非线性因素中切削过程的非线性占主要地位, 机床结构的非线性影响较小, 研究了刀具切削前角和后角发生变化时对铣削颤振的影响情况^[19]。近些年来, 北京理工大学龙震海等认为高速切削难加工材料时, 背吃刀量和每齿进给量之间的交互作用对切削力有显著影响, 切削力与切削用量间确实存在非线性特征规律, 切削用量对切削力的影响效应随切削用量的变化而发生改变^[20]。在相同工艺参数条件下却不一定获得完全相同的加工效果, 刘志兵和王西彬对微细铣削中振动信号的非线性特征进行了研究, 如在失稳的不同阶段, 信号时频变化情况, 探讨了微细加工中非线性特征的动态性征, 提出铣削失稳是该现象的主要原因^[21]。方喜峰等建立了非线性刚度和非光滑变系数铣削力的动力学微分方程, 通过实验手段分析了切深和切厚的非线性关系, 以及各参量对颤振的影响^[22]。目前, 研究者们对于机床的时滞反馈系统已经研究多年, 但是大部分都是对单自由度采用解析法 (或半解析法) 分析其稳定性^[23, 24], 对多自由度系统采用数值模拟进行稳定性分析^[25]。

近年来, 铣削过程稳定性分析的时域半解析方法有了新进展。Ding 等着重介

绍了在积分方程框架下的全离散法和数值积分法^[26,27]，特别是全离散法打破了经典微分方程框架，在积分方程框架下描述了铣削过程动力学的时滞积分方程，该方法适用性广，可同时预报表面位置误差（SLE），可应用于考虑指数切削力模型等。基于全离散法，综合考虑了轴向切削力和陀螺效应对单自由度颤振稳定域的影响后，某铣削系统时变的三维稳定域如图 1-6 所示，时间 t 为主轴的转动周期。

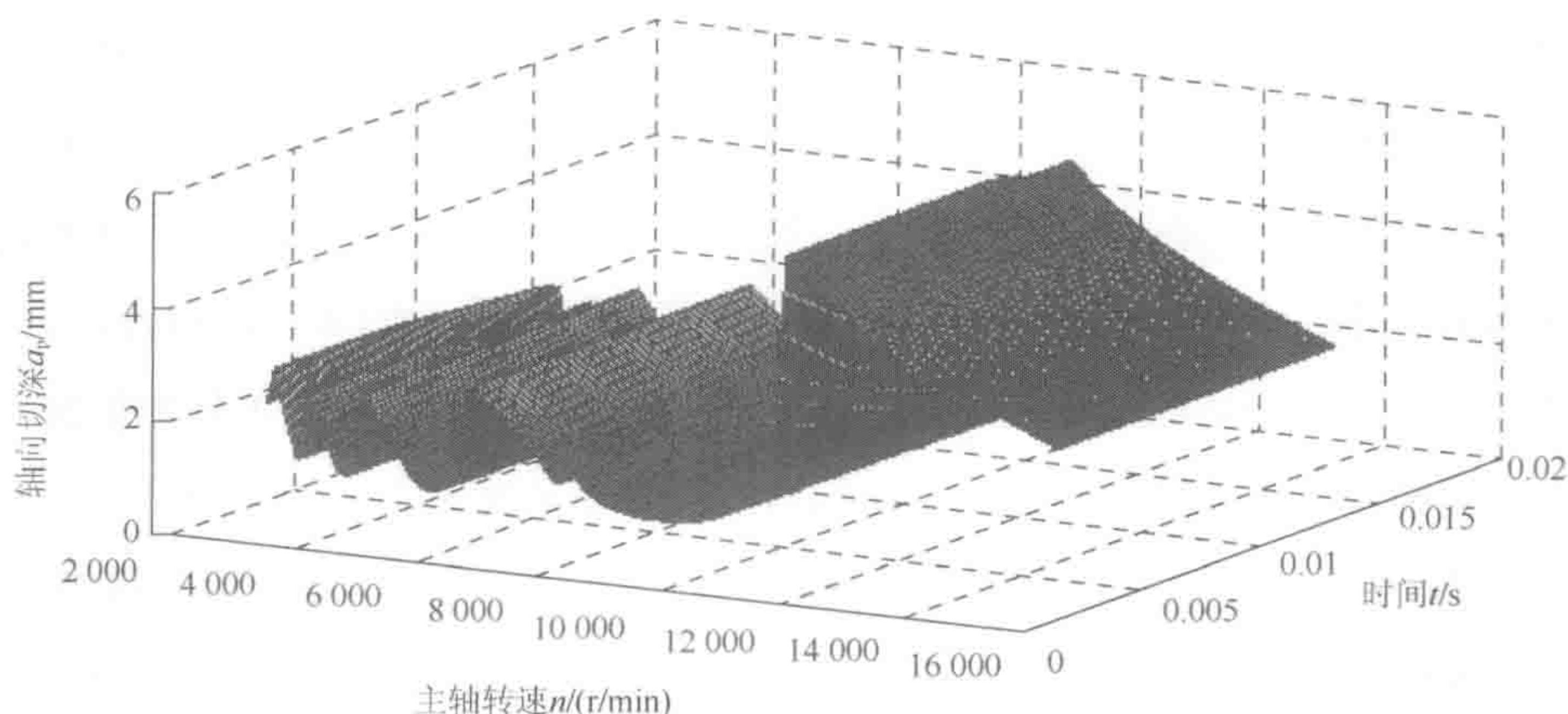


图 1-6 综合考虑轴向切削力和陀螺效应后铣削系统时变的三维稳定域

1.3 非线性铣削系统分叉与混沌的研究

由于混沌振动为非线性系统的常见运动形式，是与初始值有关的杂乱无序、不可预测的运动行为。研究铣削过程的混沌振动是进一步精确确定铣削加工稳定域、加工表面误差及其他的要求。非线性中混沌的存在，会导致所测得物理变量与切削技术参数失去确定性的关系，可以采用分岔模型及非线性定性分析方法来揭示系统受扰动后的动态行为描述^[8]。通过非线性理论分析可以发现切削加工中各种运动状态的关系、转化及扰动后的动态行为，以便在铣削过程中精确掌控振动系统的运动方式及特点。下面就非线性切削系统分叉与混沌的研究阐述国内外研究现状。

1988 年，Grabec 在研究中建立了变时滞的动力学方程，研究表明随着切削过程的进行切削中确实存在着混沌非线性现象，同时混沌现象对颤振的产生影响很

大^[28]。1995 年, Bukkapatnam 等进行了一系列实验, 探索刀具在不同磨损程度的信号特征, 采用 Poincaré 截面分析, 对利用非线性神经网络预测切削加工中的振动信号时间序列进行了研究, 发现随着刀具磨损的加剧、切削刃的变化和后面摩擦的影响, 振动信号中附加动态特性会不断增多, 呈现出混沌的非线性特性^[29]。1996~1998 年, Gradišek 等基于 Grabec 提出的非线性理论, 继续研究切削深度对切削中混沌振动的影响, 并用分岔模型进行了论证, 同时发现颤振发生时振动信号中具有低维混沌振动现象^[30, 31]。2002 年, David 和 Gilsinn 考虑非线性动态切削力建立了二阶时滞的再生型颤振模型, 并论证了系统由 Hopf 分岔进入混沌的系统运动状态, 分析了 Hopf 分岔稳定性边界条件及表征值^[32]。2004 年, Szalai 等提出高速断续切削中简化的离散数学模型, 在该非线性模型中刀具和工件的接触理解为碰撞, 证明了高速铣削时存在混沌振动, 并对稳定性边界进行了亚临界分岔分析^[33]。Stefanski 等针对非线性铣削振动指出, 动态系统的最大李雅普诺夫 (Lyapunov) 指数是分析混沌运动的一种有效方法。同时, 由于模型的相空间是多维的以及动态系统的非光滑特性, 计算两个轨迹间距离及相邻轨迹间发散度是比较困难的, 可以采用实时分析铣削系统的最大 Lyapunov 指数来进行分析^[34, 35]。2011 年, Banihasan 和 Bakhtiari-Nejad 针对铣削中混沌振动修改了刀具振动的两自由力学模型, 指出多阶段性再生效应是铣削过程非线性振动的根本原因, 进一步完善了 Long 等的 X 和 Y 向的两种不同的时间延迟。并考虑到刀具和工件参数计算了相位图、分岔图、最大 Lyapunov 指数、表面加工误差, 仿真结果也证明了高速铣削时存在混沌振动, 并对螺旋铣削加工工件表面误差的形成特征进行了研究^[36]。

对于非线性铣削系统分叉与混沌的研究, 在 20 世纪 90 年代, 华中理工大学的鲁宏伟和杨叔子根据机床的有效动柔度建立了铣削加工的二阶变时滞非线性微分方程, 进行了计算机的数值模拟, 得出了在切宽较大时非线性行为较复杂的结论, 用 Lyapunov 指数证明了混沌行为的存在^[7]。天津大学刘习军和陈予恕针对速度型切削颤振问题, 考虑了刀具子系统和工件夹具子系统在速度型非线性切削力耦合作用下的颤振模型, 应用内共振原理阐述了非线性速度型颤振的原理^[37]。近年来张智海等针对端铣加工主轴刀具复杂非线性系统考虑到两自由度延迟及断续