ZHENDONG YU SHENGJICHU

振动与声基础

◎ 张揽月　张明辉　编著

HEUP 哈尔滨工程大学出版社

振动与声基础

张揽月　张明辉　编　著

HEUP 哈尔滨工程大学出版社

内容简介

本书包括振动与声学的一般理论和一些技术应用的基础理论。

全书共分7章。振动涉及集中参数机械振动系统的振动和完全弹性介质中的弹性波；声学涉及声波的产生、传播和接收问题，理想连续介质中的波动方程和声传播的一般规律，声波在界面上的反射和折射及声波在波导中的传播，声波的辐射、声波的散射和声波的接收，以及声波在非理想介质中传播时的声吸收。

本书可作为声学和水声学专业本科生的教材，也可作为从事声学专业人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

振动与声基础/张揽月，张明辉编著. —哈尔滨：哈尔滨工程大学出版社，2016.12

ISBN 978-7-5661-1430-3

Ⅰ.①振… Ⅱ.①张… ②张… Ⅲ.①振动 ②声波 Ⅳ.①O32 ②O422

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第320633号

选题策划：宗盼盼
责任编辑：张忠远
封面设计：博鑫设计

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区东大直街124号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传　　真 0451-82519699
经　　销 新华书店
印　　刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本 787 mm×1 092 mm 1/16
印　　张 16.75
字　　数 440千字
版　　次 2016年12月第1版
印　　次 2016年12月第1次印刷
定　　价 34.00元
http://www.hrbeupress.com
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前言

本书作为声学和水声学专业的入门书籍，阐述振动与声学的基本概念，建立解决振动和声学问题的一般方法，揭示振动和声学的基本规律。全书由浅入深，各章包括基本概念、原理和处理方法。

本书阐述振动与声学问题的基本原理和基本规律，振动包括集中参数机械振动系统的振动和完全弹性介质中的弹性波；声学以波动方程的推导和波动方程的求解为主线，由三个基本方程推导出波动方程，之后是波动方程在不同条件下的求解，涉及平面波、球面波、柱面波，声波在界面上的反射、折射和声波在波导中的传播，以及声波的辐射和散射问题，都是波动方程在某种条件下的求解。

全书共分 7 章。第 1 章是关于集中参数机械振动系统的振动，采用振动体位移方程求解方法和机电类比方法分析机械系统的振动特性；第 2 章介绍了完全弹性介质中的弹性波传播、弹性介质中的波动方程、细棒的纵振动和弯曲振动、声波在流体－弹性介质分界面上的反射和折射；第 3 章是理想流体中小振幅波的基本规律，介绍了流体介质中的波动方程，平面波、柱面波和球面波，声波在介质分界面上的反射、折射问题和声波在波导中的传播；第 4 章是声波的辐射，介绍了均匀脉动球的声辐射、偶极子源声辐射、摆动球的声辐射与均匀脉动柱的辐射问题的求解和辐射场的特点，以及亥姆霍兹积分公式；第 5 章是声波的散射，介绍了圆球的散射、圆柱的散射和圆盘的散射；第 6 章是声波的接收，介绍了接收器表面振速信号畸变的原因和减少畸变的措施；第 7 章是介质对声波的吸收和吸声材料及吸声结构，介绍了声吸收机制和典型吸声结构。

本书参照了孙辉教授多年从事振动与声基础课程教学的讲义，并在孙辉教授的悉心指导下完成编写，在此向孙教授表示衷心感谢！

书中部分图片由陈文剑老师绘制，在此表示深深的谢意！

由于作者水平有限，书中难免有不当之处，欢迎读者批评指正！

编　者

2016 年 11 月

目录

第 1 章　集中参数机械振动系统的振动

运动是物质存在的形式,机械运动是普遍常见的物质运动。机械运动是指物质(或物体)空间位置的变化。因此,表示物体机械运动的基本物理量是描述物体位置随时间变化的空间坐标或空间坐标随时间变化的一阶或二阶导数(物体的运动速度或加速度)。在运动速度远小于光速(约 3×10^{8} m/s)条件下,物质(体)机械运动规律遵循牛顿力学基本定律。

机械振动是一种特殊方式的机械运动,是指物体在平衡点附近的往复运动。分析物体的振动是研究"声学"的基础,这是因为,声波是物质(声介质或简称介质)中相邻质团间振动的传递。并且,通常声波的产生也源于介质中物体的振动。

机械振动系统由具有不同力学性质的器件组成。一般情况下机械振动系统至少应由两类器件构成:①具有惯性(质量)的器件;②能使具有惯性(质量)的器件受到恢复力作用的器件。恢复力是总是指向平衡位置的力。

机械振动系统分两类,即集中参数系统和分布参数系统。**集中参数系统**就是假设构成振动系统的物体如质量块、弹簧等,不论其几何大小如何都可以看成是一个物理性质集中的系统。对于这种系统,质量块的质量认为是集中在一点的,这就是说,构成整个振动系统的质量块与弹簧,它们的运动状态都是均匀的,这种振动系统也称为质点振动系统。

如图 1-1 中的弹簧振子系统,弹簧连接一个钢块,弹簧是弹性元件,钢块是质量元件,将钢块沿 x 方向位移后,钢块便在 x 方向做机械振动。弹簧振子系统中,钢块的质量远大于弹簧本身的质量,而钢块的硬度比弹簧大得多,所以弹簧本身的质量和钢球的形变对系统振动的影响均可忽略不计,这时弹簧视作弹性元件而忽略其质量,钢块视作质量元件而忽略其弹性。虽然上面所述的系统是理想化的,然而一定的条件下,它可以被看成是实际系统的近似模型,而且在上述的假设下,数学处理可以大大简化,而研究所得的振动规律的图像又比较清晰和直观,因而对这种集中参数振动系统的研究十分重要。

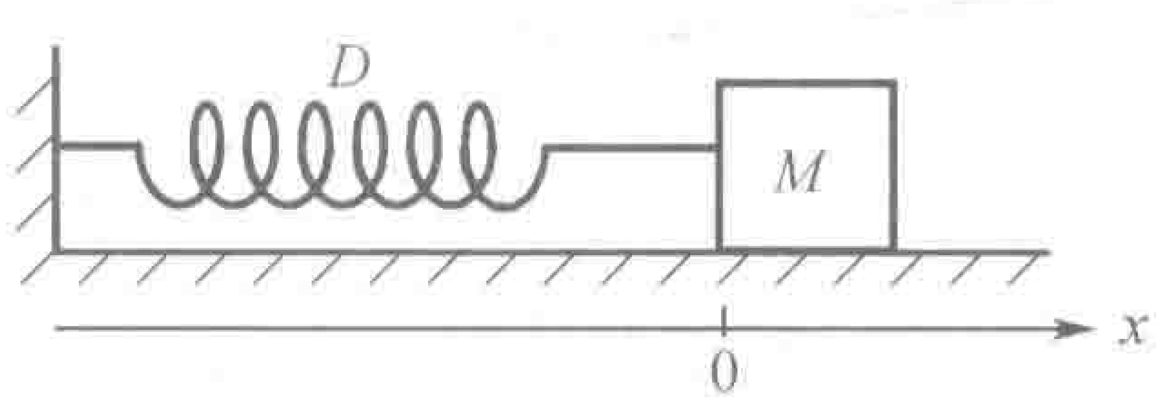

图 1-1　单自由度弹簧振子系统

实际上,常有另外一些振动系统,其中每一部分都具有惯性、弹性和消耗能量的性质,这样的系统称作**分布参数系统**。如振动的鼓膜,膜的每一部分都有质量,同时又有弹性,它不能分为单独的质量、弹性等元件来讨论。

描述集中参数振动系统运动所需要的独立空间变量的个数称为该振动系统的自由度。只需用一个独立空间变量即可描述系统运动的振动系统称作单自由度振动系统。如图 1-1 介绍的弹簧振子系统即为单自由度振动系统。再比如钟摆的摆动始终在一弧线内,为了

描述某一时刻摆所在的位置，只要用摆离开平衡位置的距离 x 表示即可，因此钟摆摆动系统也为单自由度振动系统。在实际工作中，常见的机械振动系统可能是具有更多个自由度的振动系统。单自由度振动系统是最简单的机械振动系统，也是研究多自由度振动系统振动的基础；通过对它的分析，可了解振动系统振动的基本特性。

1.1 单自由度机械振动系统的振动

自由振动是指振动系统无外力作用下的振动，是指在振动过程中不受外力作用。系统发生振动的原因是系统有初始机械能。首先考虑单自由度振动系统在无阻尼条件下的自由振动。

1.1.1 单自由度机械振动系统的自由振动

1. 无阻尼振动系统自由振动

(1) 无阻尼单自由度振动系统

如图 1－1 所示就是一个无阻尼单自由度振动系统，它由一个弹簧和一个质量块组成。弹簧的弹性系数为 D(忽略弹簧质量)，质量块的质量为 M(忽略质量块的弹性)，质量块在运动过程中不受阻力作用。弹簧的弹性系数 D 在数值上等于弹簧产生单位长度变化所需作用力的大小，D 的倒数 $C_m=\dfrac{1}{D}$称为弹簧的柔顺系数，它表示弹簧在单位力作用下能产生位移的大小。取质量块 M 的静止位置或称平衡位置为坐标原点 0。如果初始时因外力作用弹簧伸长(或压缩)使质量块 M 偏离平衡位置，那么外力撤销后，质量块 M 就会在弹簧的弹性力作用下，在平衡位置附近做往返的运动，即发生振动。若质量块 M 具有初始速度，质量块 M 也会在弹簧的弹性力作用下，在平衡位置附近做往返的运动。

(2) 无阻尼振动系统运动方程及其解

首先推导质量块 M 的运动方程，然后解出其振动位移。对图 1－1 中的质量块进行力分析，当质点 M 位于平衡点 0 时，质点 M 受力为 0，当质点 M 偏离平衡位置时受到弹簧的弹性恢复力。分析 M 的受力，根据胡克定律：弹簧形变不大时，弹性力与弹簧两端的相对位移成正比，而力的方向与位移的方向相反。在这里，弹簧一端固定，因此其两端的相对位移(以后简称为弹簧的位移)和 M 的位移 x 相等。所以弹性力的大小与 x 成正比，它作用在质量块 M 上而方向与位移 x 相反。弹性力表示为

$$f=-Dx \quad \text{(小振幅条件下的胡克定律)} \tag{1-1}$$

式中，D 为弹簧系数，其量纲为 $T^{-2}M^1L^0$，SI 中，其单位为 kg/s^2。

根据牛顿第二定律，M 的运动方程为

$$M\frac{d^2x}{dt^2}=-Dx \quad \text{(二阶常系数线性齐次常微分方程)} \tag{1-2}$$

令 $\omega_0^2=\dfrac{D}{M}$，则式(1－2)可化为

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+\omega_0^2 x=0 \tag{1-3}$$

式中，$\omega_0=\sqrt{\frac{D}{M}}$，是只决定于元件参数$(D,M)$的常数。方程式(1－3)的特征方程为$\lambda^2+\omega_0^2=0$，得到$\lambda=\pm \mathrm{j}\omega_0$，所以，方程式(1－3)的复数形式的解为

$$x(t)=\widetilde{A}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t}+\widetilde{B}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t} \tag{1-4}$$

式中，$\widetilde{A}$，$\widetilde{B}$为复常数，取决于初始条件；而ω_0是由系统参数决定的，与初始条件无关。

若关于$x(t)$的初始条件为实数，则$x(t)$的另一种表示为

$$x(t)=C_1\cos(\omega_0 t)-C_2\sin(\omega_0 t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi) \tag{1-5}$$

式中，$C_1=A\cos\varphi$，$C_2=A\sin\varphi$。C_1，C_2或A，φ由初始条件决定。

结论1.1　无阻尼振动系统的自由振动是一个简谐振动。

简谐振动（谐和振动）是指正弦或余弦振动。对于式(1－5)表示的简谐振动，其振动幅度为A（简称振幅为A），振动的初始相位角为φ（简称初相位为φ）。

$$\omega_0=\sqrt{\frac{D}{M}}=2\pi f_0$$

式中，f_0即为振动频率。所以系统做自由振动的频率是由系统本身的参数D和M决定的常数。f_0又称为系统的固有频率，不同的参数的系统具有不同的固有频率。

常数C_1，C_2的数值由M的初始激发条件决定。一般情况下，开始$(t=0)$$M$被引离平衡位置，给以初始位移$x_0$，同时给以初始速度$v_0$。有

$$\begin{aligned} x(t)\big|_{t=0}&=x_0 \\ v(t)\big|_{t=0}&=\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=v_0 \end{aligned} \tag{1-6}$$

则可得

$$\begin{aligned} x(t)&=x_0\cos(\omega_0 t)+\frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) \\ &=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}\cos\left(\omega_0 t-\arctan\frac{v_0}{\omega_0 x_0}\right) \end{aligned} \tag{1-7}$$

令

$$A=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2},\varphi=-\arctan\frac{v_0}{\omega_0 x_0}$$

则$x(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi)$。在图1－2单自由度无阻尼自由振动的简谐振动中给出了单自由度无阻尼振动系统的振动随时间的变化曲线。

$x(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi)$表示一个简谐振动（也称谐和振动）。此振动的周期为$T=\frac{2\pi}{\omega_0}$，周期的量纲为$\mathrm{T}^1\mathrm{M}^0\mathrm{L}^0$，SI中，周期的单位为s。此振动的频率为$f_0=\frac{1}{T_0}=\frac{\omega_0}{2\pi}$，频率的量纲为$\mathrm{T}^{-1}\mathrm{M}^0\mathrm{L}^0$，SI中，周期的单位为1/s，称作赫兹，记为Hz。ω_0称作角频率，单位为rad/s；A称作振幅；$\omega_0 t+\varphi$称作相位；φ称作初相位。

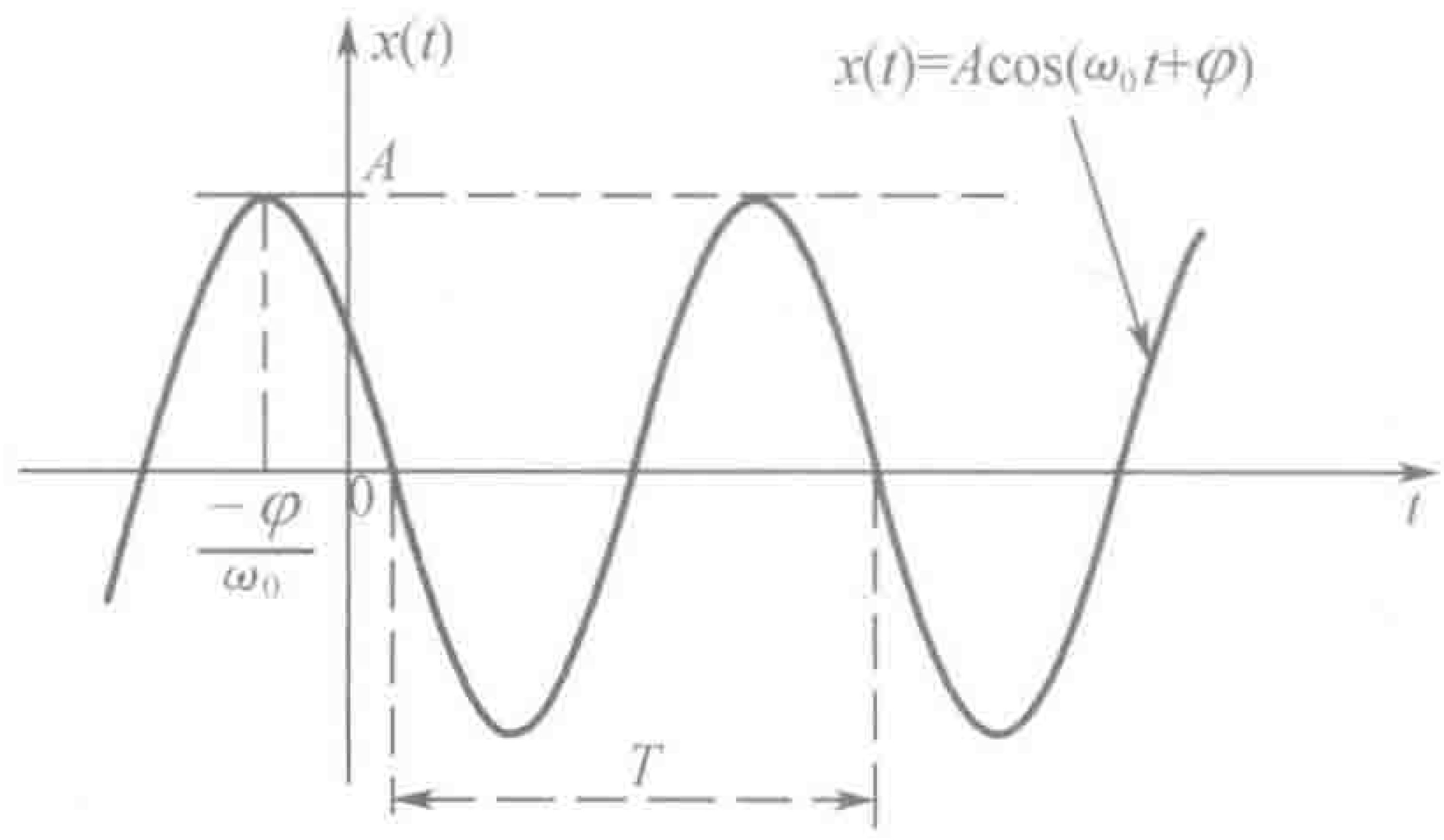

图 1-2 单自由度无阻尼自由振动的简谐振动

定义 1.1(固有频率) 振动系统自由振动时的频率为该系统的固有频率,记为f_0。

显然,根据定义 1.1 可知,$f_0=\dfrac{\omega_0}{2\pi}=\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{D}{M}}$为单自由度无阻尼振动系统的固有频率,而$\omega_0=\sqrt{\dfrac{D}{M}}$为系统的固有角频率。系统的固有频率仅由系统参数决定,与初始条件无关。

(3)无阻尼振动系统的振动速度、加速度和振动能量

质量块 M 做自由振动时,位移为

$$x(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi) \tag{1-8}$$

其瞬时速度和瞬时加速度可写成

$$v(t)=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=-A\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi) \tag{1-9}$$

$$a(t)=\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}=-A\omega_0^2\cos(\omega_0 t+\varphi) \tag{1-10}$$

位移、速度、加速度之间的相位关系为:速度的相位比位移的相位超前$\dfrac{\pi}{2}$,加速度的相位比速度的相位超前$\dfrac{\pi}{2}$,加速度和位移恰好反相。位移、速度、加速度之间的幅度关系为:位移振幅为A,振速振幅为$\omega_0 A$,加速度振幅为$\omega_0^2 A$。位移、速度、加速度之间的关系曲线如图 1-3 所示。

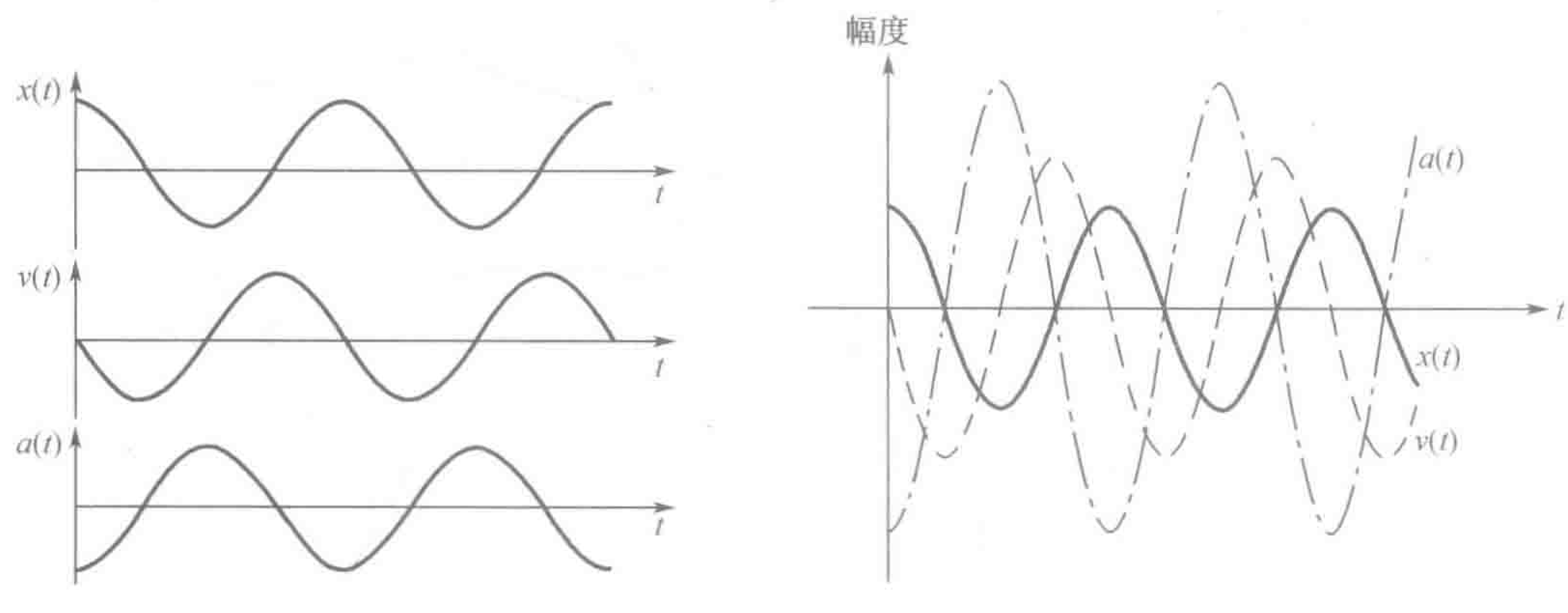

图 1-3 位移、速度、加速度之间的关系曲线

为了运算方便，对于谐和振动，可以引入复数表示，定义：若 $x(t)=\mathrm{Re}(\tilde{x}(t))$，则称$\tilde{x}(t)$为 $x(t)$的复数形式表示。显然，谐和位移、振速、加速度的复数形式分别为

复位移：$\tilde{x}(t)=A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_0 t+\varphi)}$ (1－11)

复振速：$\tilde{v}(t)=\mathrm{j}\omega_0 A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_0 t+\varphi)}$ (1－12)

复加速度：$\tilde{a}(t)=-\omega_0^2 A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_0 t+\varphi)}$ (1－13)

用复平面上旋转复矢量表示谐和振动，前面的谐和位移、振速、加速度在复平面上的旋转矢量表示如图 1－4 所示，可以更加明显看出三者之间的幅度以及相位关系。

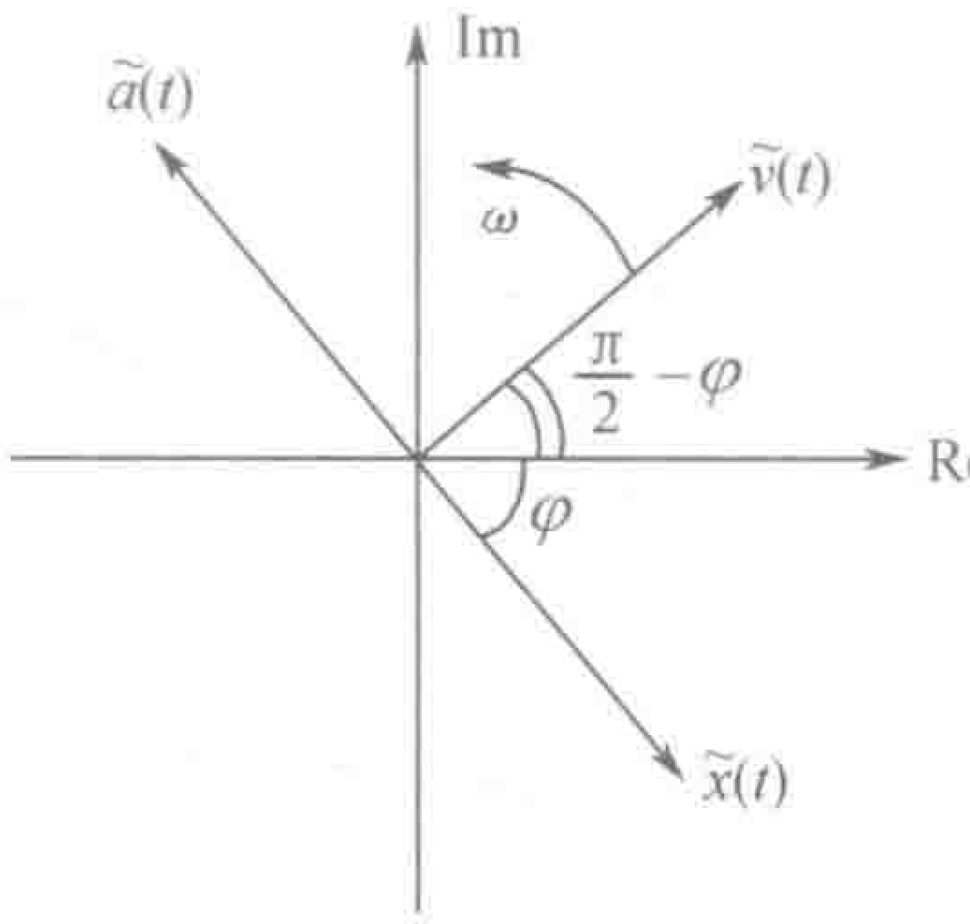

图 1－4 谐和位移、振速、加速度在复平面上的关系

振动质量块 M 的动能为

$$\begin{aligned}e_{\mathrm{k}}(t)&=\frac{1}{2}Mv^2(t)\\&=\frac{1}{2}MA^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi)\\&=\frac{1}{2}DA^2\cdot\frac{\{1-\cos[2(\omega_0 t+\varphi)]\}}{2}\end{aligned}\tag{1－14}$$

弹簧形变的势能（克服弹性力所做的功）为

$$\begin{aligned}e_{\mathrm{p}}(t)&=\int_0^{x(t)}Dx\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}Dx^2(t)\\&=\frac{1}{2}DA^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi)\\&=\frac{1}{2}DA^2\cdot\frac{\{1+\cos[2(\omega_0 t+\varphi)]\}}{2}\end{aligned}\tag{1－15}$$

振动系统的总机械能为

$$E(t)=e_{\mathrm{k}}(t)+e_{\mathrm{p}}(t)=\frac{1}{2}DA^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi)+\frac{1}{2}DA^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi)=\frac{1}{2}DA^2\tag{1－16}$$

单自由度无阻尼自由振动系统的动能、势能及总机械能随时间的变化关系如图 1－5 所示。

在系统振动过程中，由于假设不受外力作用（即自由振动），弹簧施加在质量块上的力为保守力（力的大小仅由质量块的位置决定）。所以，由弹簧和质量块构成能量守恒系统，系统中能量是一定的，它取决于初始激发所给予的能量。但是在系统内部，机械能形式会转换，表现为质量块上的动能和弹簧上的势能间的转换。

无阻尼系统的自由振动过程，是系统中的质量块上的动能与弹簧上的势能相互循环转化的过程。振动过程中系统的总能量不变。

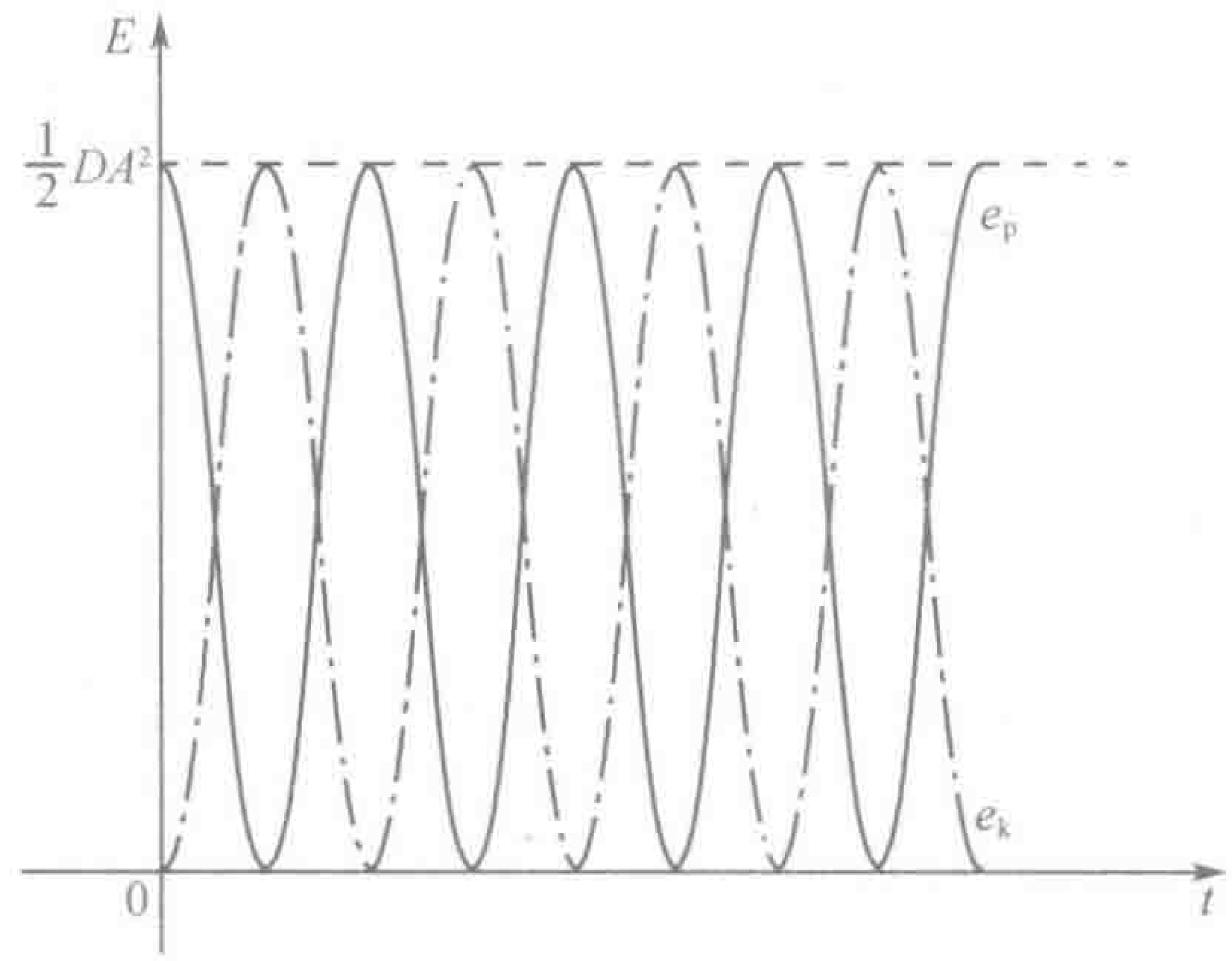

图 1－5　单自由度无阻尼自由振动系统的动能、势能及总机械能随时间的变化关系

2. 阻尼振动系统的自由振动

(1)阻尼振动系统及其解

机械振动系统的振动若有阻力作用，则为阻尼振动系统。任何一个实际机械振动系统都是阻尼振动系统。如果没有外力激励推动，由于受摩擦力或其他阻力的作用，系统的能量会不断损耗，质量块的振幅逐渐减小，以致于振动停止。如图 1－6为有阻尼时的单自由度振动系统。

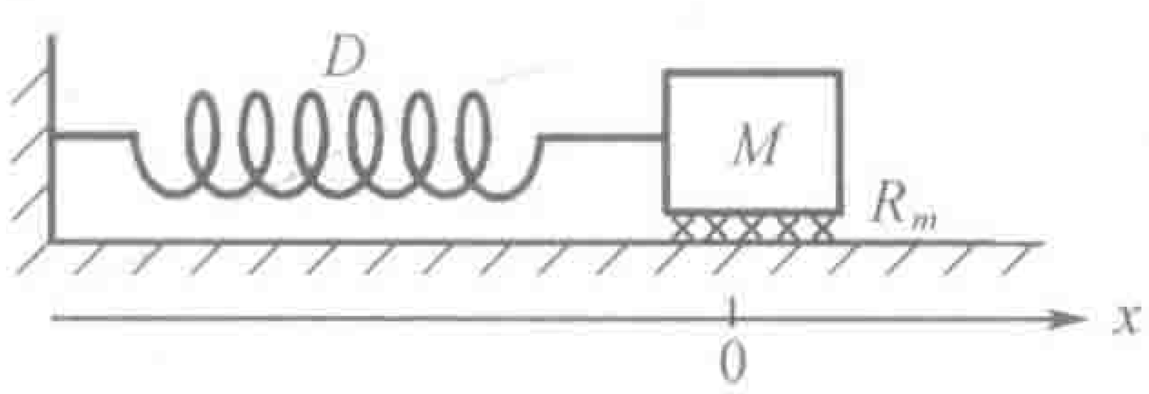

图 1－6　有阻尼时的单自由度振动系统

声学上最简单的阻尼模型是牛顿阻尼(黏滞阻尼)，即阻力正比于运动速度，方向与速度方向相反：

$$f_{阻} = -R_m v \tag{1-17}$$

式中，R_m 为阻力系数，其量纲为 $T^{-1}M^1L^0$，SI 中，单位为 kg/s，称作机械欧姆或力欧姆。

(2)阻尼系统的运动方程及其解

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -Dx - R_m\frac{dx}{dt} \tag{1-18}$$

令

$$\delta = \frac{R_m}{2M}, \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{M}} \tag{1-19}$$

式中，δ 称作系统的阻尼系数，其量纲为 $T^{-1}M^0L^0$，SI 中，单位为 1/s，则方程式(1－18)化为常系数二阶齐次常微分方程标准形式，即

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \tag{1-20}$$

其解为

$$x(t) = c_1 e^{\mu_1 t} + c_2 e^{\mu_2 t} \tag{1-21}$$

式中，μ_1, μ_2 为特征值，由特征方程 $\mu^2 + 2\delta\mu + \omega_0^2 = 0$ 决定，则

$$\mu_1, \mu_2 = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \tag{1-22}$$

分两种情况进行讨论：

①$\delta^2 > \omega_0^2$（$R_m^2 > 4MD$，大阻尼）

此时，μ_1, μ_2 为小于 0 的实数：$x(t) = c_1 e^{-|\mu_1|t} + c_2 e^{-|\mu_2|t}$，其中每一项皆按指数规律衰减。当初始条件不同时，质量块的运动变化规律也不同，图 1-7～图 1-9 中分别为大阻尼条件下不同初始条件质量块的运动变化。

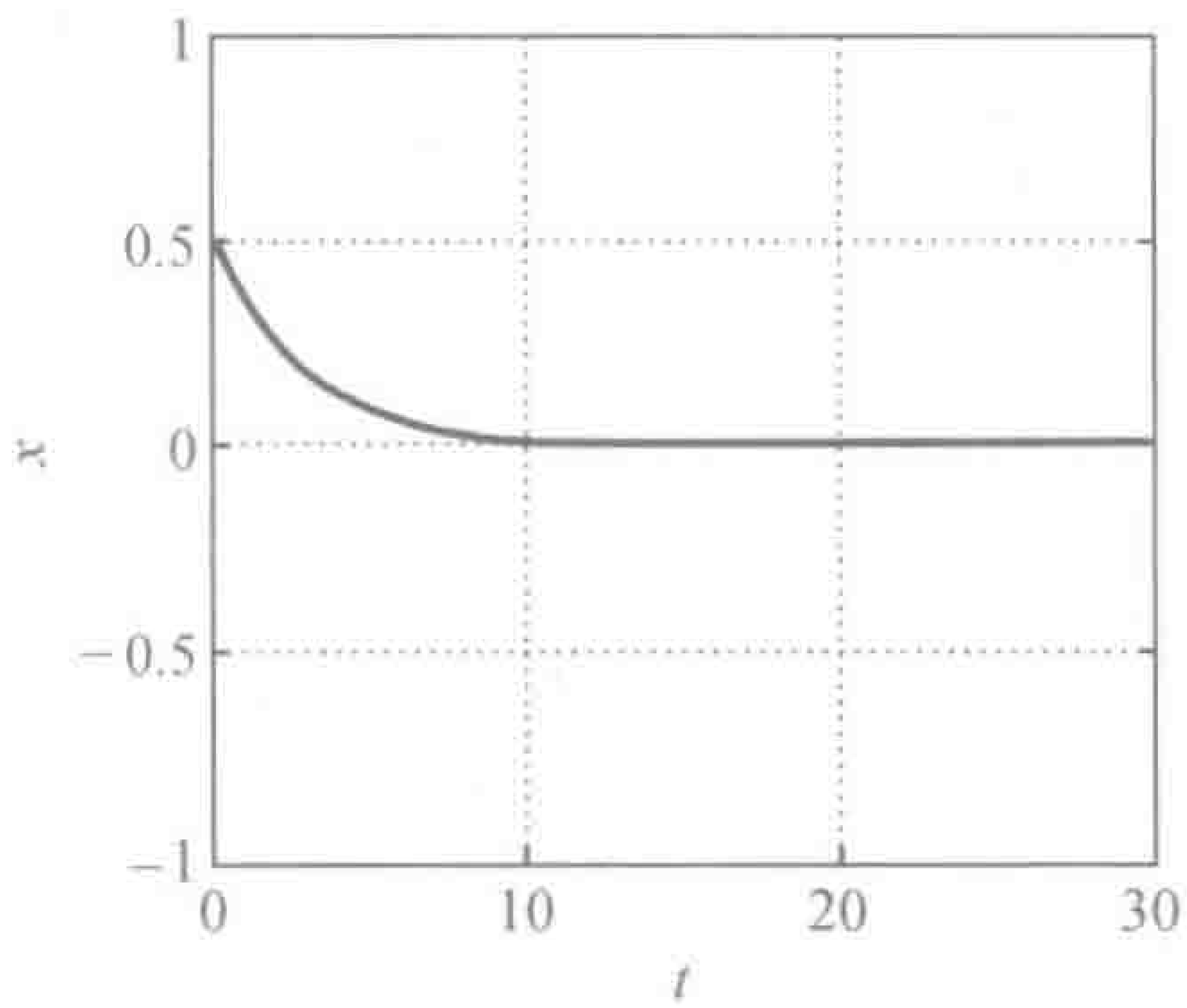

图 1-7 初始条件 $x_0 = 0.5, v_0 = 0$

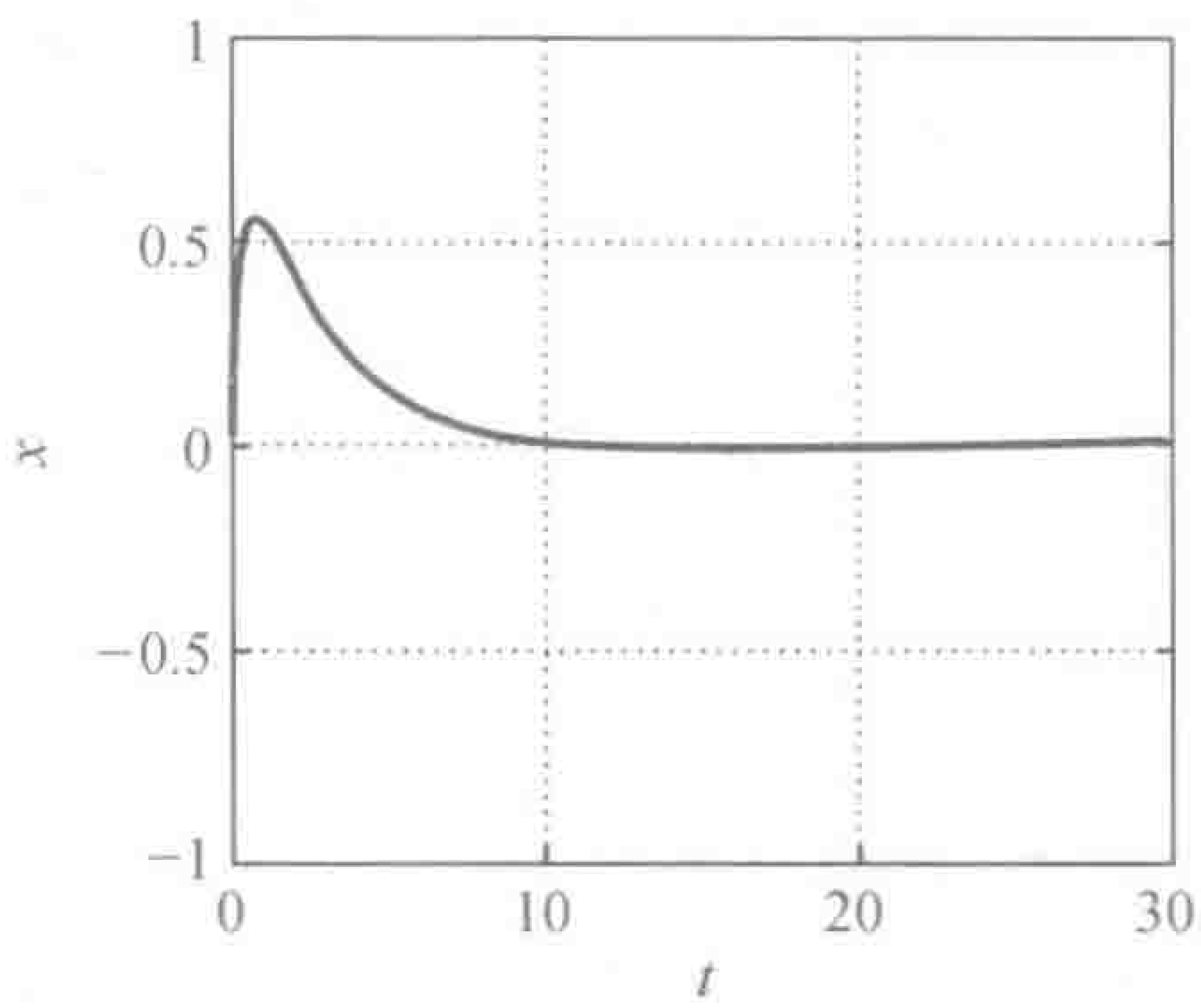

图 1-8 初始条件 $x_0 = 0, v_0 = 2$

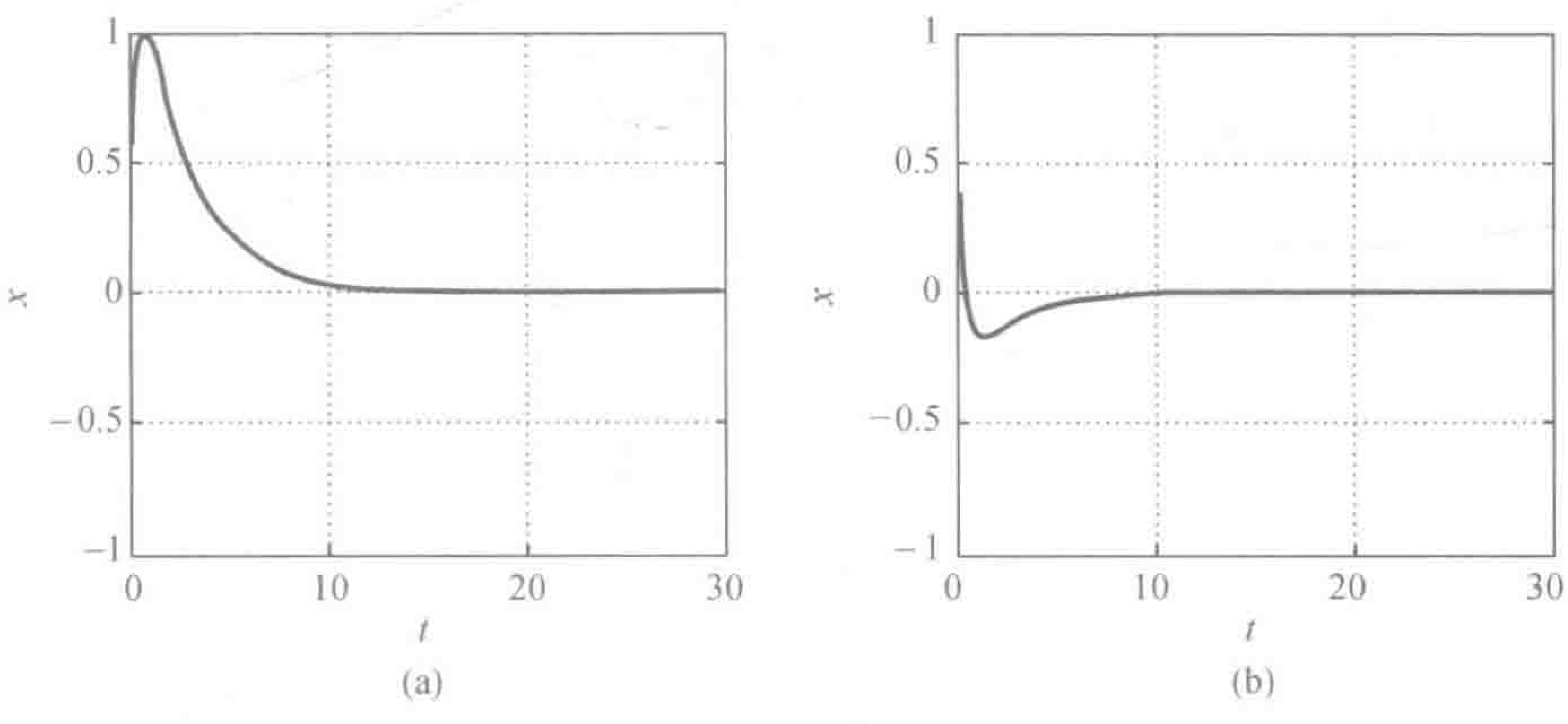

图 1-9 初始条件 $x_0 = 0.5$

(a) $v_0 = 2$；(b) $v_0 = -2$

结论 1.2 大阻尼条件下，系统不会发生自由机械振动。

②$\delta < \omega_0^2$（$R_m^2 < 4MD$，小阻尼）

$$\mu_1, \mu_2 = -\delta \pm \mathrm{j}\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \tag{1-23}$$

$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2} \tag{1-24}$$

则 $\mu_1, \mu_2 = -\delta \pm j\Omega$，代入式(1－21)中得

$$x(t) = e^{-\delta t}(\widetilde{A}e^{j\Omega t} + \widetilde{B}e^{-j\Omega t}) \tag{1-25}$$

式中，δ, Ω 由系统参数决定；$\widetilde{A}, \widetilde{B}$ 由初始条件决定。

若初始条件为实数，则有 $x(t) = A_0 e^{-\delta t}\cos(\Omega t + \varphi)$，$A_0, \varphi$ 由初始条件确定。振幅随时间衰减的谐和（简谐）振动如图 1－10 所示。

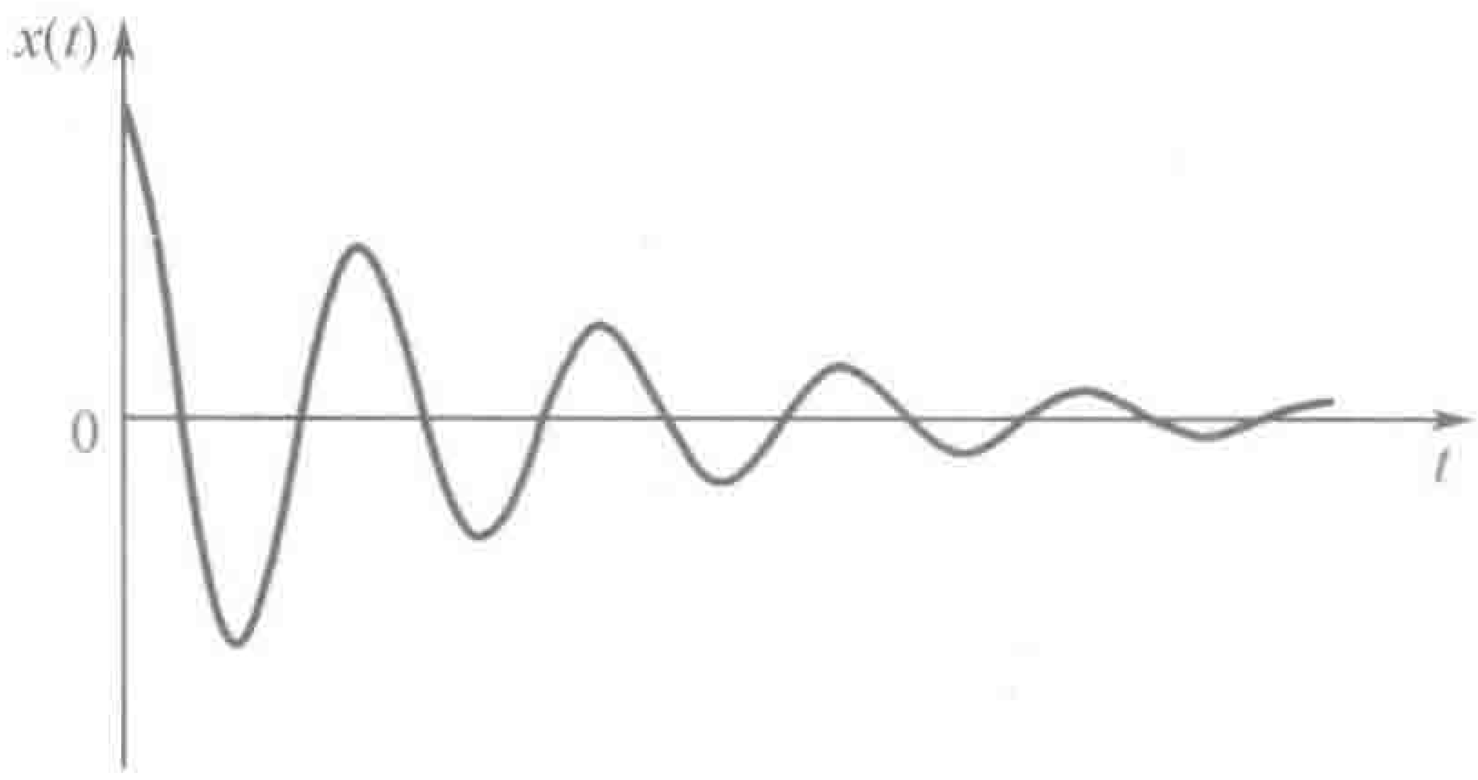

图 1－10　振幅随时间衰减的谐和（简谐）振动

显然，$x(t)$ 并不是周期的，更谈不上是简谐的。但一般，当 $\omega_0^2 \gg \delta^2$ 时（极小阻尼情况下），称 $x(t)$ 为振幅随时间衰减的简谐（谐和）振动。尽管该振动为非周期的振动，但质量块每次通过平衡位置的时间间隔相同，为 $\frac{2\pi}{\Omega}$。

结论 1.3　极小阻尼条件下，阻尼振动系统的自由振动是振幅随时间衰减的简谐振动。

(3) 阻尼振动系统的能量

机械能为动能和势能之和，若 $\omega_0^2 \gg \delta^2$，并记 $A(t) = A_0 e^{-\delta t}$，则

$$x(t) = A_0 e^{-\delta t}\cos(\Omega t + \varphi) = A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega_0 t + \varphi) = A(t)\cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{1-26}$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -A_0 e^{-\delta t}\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) - A_0 e^{-\delta t}\delta\cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{1-27}$$

机械能为

$$\begin{aligned}
E(t) &= e_k(t) + e_p(t) \\
&= \frac{1}{2}Mv^2(t) + \frac{1}{2}Dx^2(t) \\
&= \frac{1}{2}M\{A_0 e^{-\delta t}[\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) + \delta\cos(\omega_0 t + \varphi)]\}^2 + \frac{1}{2}D[A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega_0 t + \varphi)]^2 \\
&= \frac{1}{2}M\left\{(A_0 e^{-\delta t}\omega_0)^2\left[\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{\delta^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi)}{\omega_0^2} + 2\frac{\delta\sin(\omega_0 t + \varphi)\cos(\omega_0 t + \varphi)}{\omega_0}\right]\right\} + \\
&\quad \frac{1}{2}D(A_0 e^{-\delta t})^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi) \\
&= \frac{1}{2}DA^2(t)\left[1 + \frac{\delta}{\omega_0}\sin(2(\omega_0 t + \varphi))\right] \quad \left(\text{略去}\frac{\delta^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi)}{\omega_0^2}\text{项}\right)
\end{aligned} \tag{1-28}$$

取 $E(t)$ 在一个周期内的平均值$\overline{E(t)}$，则式（1－28）中的第二项消失：

$$\overline{E(t)} = \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} E(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}DA_0^2\mathrm{e}^{-2\delta t} = \frac{1}{2}MA_0^2\omega_0^2\mathrm{e}^{-2\delta t} \tag{1-29}$$

即在有阻尼的系统中，每周期内平均能量随时间按指数衰减，在无阻尼情况下为常数。其能量随时间变化规律如图 1－11 所示。能量的散失是由于阻力引起的，可能变成热能形式散失；或在介质中振动时，部分消耗在系统内部变为热能，部分变为声能。

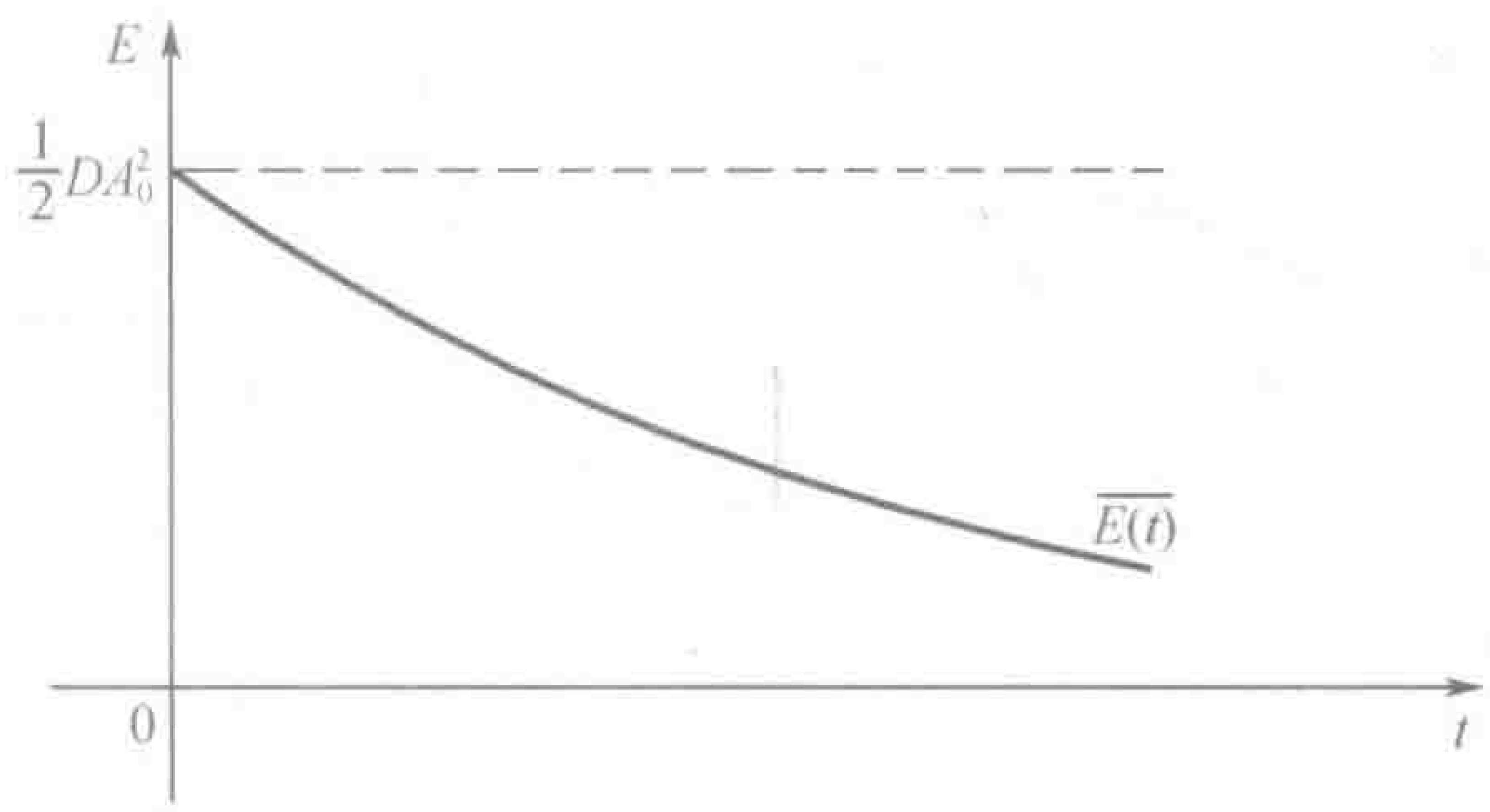

图 1－11　振幅随时间衰减的谐和（简谐）振动机械能平均衰减规律

若 ΔE 为一个周期内的能量损失，则

$$\overline{\Delta E} = \overline{E(t)} - \overline{E(t+T)} = \frac{1}{2}DA_0^2\mathrm{e}^{-2\delta t}(1-\mathrm{e}^{-2\delta T_0}) \tag{1-30}$$

一个周期内的相对能量损失为

$$\frac{\overline{\Delta E}}{\overline{E(t)}} = \frac{\frac{1}{2}DA_0^2\mathrm{e}^{-2\delta t}(1-\mathrm{e}^{-2\delta T_0})}{\frac{1}{2}DA_0^2\mathrm{e}^{-2\delta t}} = 1-\mathrm{e}^{-2\delta T_0} \approx 1-(1-2\delta T_0) = 2\delta T_0 \tag{1-31}$$

根据系统固有频率的定义，小阻尼单自由度振动系统的固有频率为

$$f_0 = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}{2\pi} \tag{1-32}$$

阻尼系统的固有频率比无阻尼时的固有频率降低了，在极小阻尼条件下（$\omega_0^2 \gg \delta^2$），近似有

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{M}} \tag{1-33}$$

（3）阻尼振动系统中的阻尼量的表述

①阻力系数 R_m

R_m 是用于描述黏滞阻力的物理量。$f_{阻} = -R_m v$ 表示阻力与运动速度成线性关系（黏滞阻力特征），R_m 是阻力与运动速度的比例系数。

R_m 的量纲为 $\mathrm{M}^1\mathrm{T}^{-1}\mathrm{L}^0$，SI 中，$R_m$ 的单位为 $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-1}$（力欧姆）。

②阻尼系数 δ

δ 是解方程时引入的，$\delta = \frac{R_m}{2M}$。

分析其物理意义：$\omega_0^2>\delta^2$ 条件下，令 $A(t)=A_0e^{-\delta t}$，则质量块自由振动位移为

$$x(t)=A_0e^{-\delta t}\cos(\Omega t+\varphi)=A(t)\cos(\Omega t+\varphi) \tag{1-34}$$

所以

$$\frac{A(t)}{A_0}=e^{-\delta t}\Rightarrow\delta=\frac{1}{t}\ln\left(\frac{A_0}{A(t)}\right) \tag{1-35}$$

可见 δ 的物理意义为：小阻尼单自由度振动系统自由振动时，在单位时间内振幅相对变化量的自然对数值。δ 的量纲为 $M^0T^{-1}L^0$，在 SI 中，单位为 s^{-1}。

③对数衰减量 θ

定义 1.2（对数衰减量） 阻尼振子自由振动的振幅在一个周期内相对变化量的自然对数值为阻尼振子的对数衰减量，记为 θ。θ 的量纲为 $T^0L^0M^0$，即无量纲。根据定义有

$$\theta\equiv\delta T_0=\frac{1}{T_0}\ln\left(\frac{A_0}{A(T_0)}\right)T_0=\ln\left(\frac{A_0}{A(T_0)}\right) \tag{1-36}$$

$$\theta\equiv\delta T_0=\frac{R_m}{2M}T_0=\frac{R_m}{2Mf_0} \tag{1-37}$$

④衰减模数 τ

定义 1.3（衰减模数） 阻尼振子自由振动，振幅衰减到原来$\frac{1}{e}$倍时所需的时间，称作阻尼振子的衰减模数，记为 τ。根据定义有

$$\frac{A(\tau+t_0)}{A(t_0)}=\frac{1}{e}\Rightarrow\frac{A_0e^{-\delta(\tau+t_0)}}{A_0e^{-\delta t_0}}=\frac{1}{e}\Rightarrow\delta\tau=1\Rightarrow\tau=\frac{1}{\delta} \tag{1-38}$$

τ 的量纲为 $M^0T^1L^0$，在 SI 中，它的单位为 s。

⑤机械 Q 值 Q_m

定义 1.4（机械 Q 值） 阻尼振子自由振动，振幅衰减到原来$\frac{1}{e^{\pi}}$倍时所经历的周期数，称作系统的 Q 值，记为 Q_m，根据定义有

$$\frac{A(Q_mT_0+t_0)}{A(t_0)}=\frac{1}{e^{\pi}}\Rightarrow\frac{e^{-\delta(Q_mT_0+t_0)}}{e^{-\delta t_0}}=e^{-\pi}\Rightarrow Q_m=\frac{\pi}{\delta T_0}=\frac{\omega_0M}{R_m} \tag{1-39}$$

它由系统的 R_m,M,D 决定，反映了系统的性质，是系统参数。（注意，它与电路中的 Q 值 $Q=\frac{\omega_0L}{R}$类似。）

分析机械 Q 值的物理意义：见式(1-31)，阻尼振子自由振动，一个周期内损失能量的相对值为

$$\frac{\Delta E}{E}=1-e^{-2\delta T_0}\approx1-(1-2\delta T_0)=2\delta T_0=\frac{2\pi}{Q_m}=2\theta \tag{1-40}$$

可见，机械 Q 值的物理意义之一是，Q_m 值反比于阻尼振子自由振动时，一个周期内振动能量损失的相对值。

1.1.2 单自由度机械振动系统谐和力激励的受迫振动

一个振动系统受到阻力作用后振动不能永远维持，它要渐渐衰减到停止，因此要使振

动持续不停，就要由另一个系统不断给予激发，即不断补充能量，这种由外加作用维持的振动，称为强迫振动（受迫振动）。

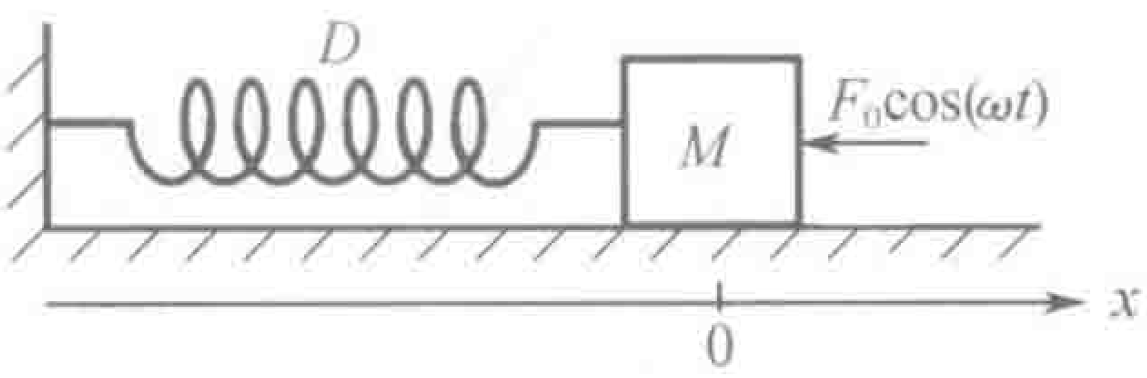

图 1－12 无阻尼系统在谐和力作用下的振动

1. 无阻尼系统在谐和力作用下的振动

如图 1－12 所示的弹簧振子，当此系统无阻尼时，质量元件 M 上受两个作用力，一个是弹性力，另一个是外加激励力。若激励力为谐和力，即力随时间的变化为正弦或余弦函数，则质量 M 的运动方程为

$$M\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}+Dx(t)=f(t)=F_0\cos(\omega t) \tag{1-41}$$

用复数表示：$x(t)=\mathrm{Re}(\tilde{x}(t))$，则方程式（1－41）化为

$$M\frac{\mathrm{d}^2\tilde{x}(t)}{\mathrm{d}t^2}+D\tilde{x}(t)=F_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \tag{1-42}$$

根据微分方程理论，方程式（1－42）的解为

$$\tilde{x}(t)=\tilde{x}_1(t)+\tilde{x}_2(t) \tag{1-43}$$

式中，$\tilde{x}_1(t)$ 为方程式（1－42）所对应的齐次方程的解（通解）；$\tilde{x}_2(t)$ 为方程式（1－42）的特解（这是非齐次微分方程解的结构）。根据 1.1.1 节的结果，有

$$\tilde{x}_1(t)=A_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_0t+\varphi)} \tag{1-44}$$

式中，$\omega_0^2=\dfrac{D}{M}$。

接下来求特解，令 $\tilde{x}_2(t)=B\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$，代入式（1－42）可得

$$B=\frac{F_0}{M(\omega_0^2-\omega^2)} \tag{1-45}$$

由式（1－43），知

$$\tilde{x}(t)=A_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_0t+\varphi)}+\frac{F_0}{M(\omega_0^2-\omega^2)}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \tag{1-46}$$

所以，实际位移为

$$x(t)=\mathrm{Re}(\tilde{x}(t))=A_0\cos(\omega_0t+\varphi)+\frac{F_0}{M(\omega_0^2-\omega^2)}\cos(\omega t) \tag{1-47}$$

式中，A_0 和 φ 由初始条件决定。式（1－47）是无阻尼系统在外加谐和力作用下的普遍解。其中第一项与自由振动解的形式相同，称为自由振动分量。第二项与外加作用力有关，且与外力的变化规律相同，称为强迫振动分量。

结论 1.4 无阻尼系统在谐和力作用下的振动为两个简谐振动的叠加。

若取初条件：$x\big|_{t=0}=0,\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}=0$，代入到式（1－47），则可得 $\varphi=0, A_0=-\dfrac{F_0}{M(\omega_0^2-\omega^2)}$，进而可得