普通高等学校省级规划教材
应用型本科教育数学基础教材

应用高等数学

下册

巢湖学院应用数学学院 ◎ 编

中国科学技术大学出版社

普通高等学校省级规划教材
应用型本科教育数学基础教材

应用高等数学

下册

巢湖学院应用数学学院◎编

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

《应用高等数学》是安徽省应用型本科高校联盟教材，分上、下两册出版. 上册的主要内容为函数与极限、一元函数微分学、一元函数积分学、常微分方程；本书为下册，主要内容为向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线与曲面积分、无穷级数、MATLAB在高等数学中的应用. 以案例教学为中心，注重培养学生运用数学知识和方法解决问题的能力. 结合多年培养应用型本科人才的教学实践经验，在体系、内容和方法方面做了有益的改革. 每章节末附有应用型习题.

本书可作为应用型本科院校非数学类专业教材，也可作为高等数学课程学习的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

应用高等数学. 下/巢湖学院应用数学学院编. —合肥：中国科学技术大学出版社，2017.2

ISBN 978-7-312-04133-4

Ⅰ. 应…　Ⅱ. 巢…　Ⅲ. 高等数学—高等学校—教材　Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 009276 号

出版　中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号，230026
http://press.ustc.edu.cn

印刷　安徽省瑞隆印务有限公司

发行　中国科学技术大学出版社

经销　全国新华书店

开本　710 mm×960 mm　1/16

印张　17.5

字数　304 千

版次　2017 年 2 月第 1 版

印次　2017 年 2 月第 1 次印刷

定价　36.00 元

总　序

1998年以来，出现了一大批以培养应用型人才为主要目标的地方本科院校，且办学规模日益扩大，已经成为我国高等教育的主体，为实现高等教育大众化作出了突出贡献.但是，作为知识与技能重要载体的教材建设没能及时跟上高等学校人才培养规格的变化，较长时间以来，应用型本科院校仍然使用精英教育模式下培养学术型人才的教材，人才培养目标和教材体系明显不对应，影响了应用型人才培养质量.因此，认真研究应用型本科教育教学的特点，加强应用型教材研发，是摆在应用型本科院校广大教师面前的迫切任务.

安徽省应用型本科高校联盟组织联盟内13所学校共同开展应用数学类教材建设工作，成立了“安徽省应用型高校联盟数学类教材建设委员会”，于2009年8月在皖西学院召开了应用型本科数学类教材建设研讨会，会议邀请了中国高等教育学著名专家潘懋元教授作应用型课程建设专题报告，研讨数学类基础课程教材的现状和建设思路.先后多次召开课程建设会议，讨论大纲，论证编写方案，并落实工作任务，使应用型本科数学类基础课程教材建设工作迈出了探索的步伐.

即将出版的这套丛书共计6本，包括《高等数学(文科类)》、《高等数学(工程类)》、《高等数学(经管类)》、《高等数学(生化类)》、《应用概率与数理统计》和《线性代数》，已在参编学校使用两届，并经过多次修改.教材明确定位于“应用型人才培养”目标，其内容体现了教学改革的成果和教学内容的优化，具有以下主要特点：

1. 强调“学以致用”.教材突破了学术型本科教育的知识体系，降低了理论深度，弱化了理论推导和运算技巧的训练，加强对“应用能力”的培养.

2. 突出“问题驱动”.把解决实际工程问题作为学习理论知识的出发点和落脚点，增强案例与专业的关联度，把解决应用型习题作为教学内容的有效补充.

3. 增加“实践教学”.教材中融入了数学建模的思想和方法，把数学应用软件的学习和实践作为必修内容.

4. 改革“教学方法”.教材力求通俗表达,要求教师重点讲透思想方法,开展课堂讨论,引导学生掌握解决问题的精要.

这套丛书是安徽省应用型本科高校联盟几年来大胆实践的成果.在此,我要感谢这套丛书的主编单位以及编写组的各位老师,感谢他们这几年在编写过程中的付出与贡献,同时感谢中国科学技术大学出版社为这套教材的出版提供了服务和平台,也希望我省的应用型本科教育多为国家培养应用型人才.

当然,开展应用型本科教育的研究和实践,是我省应用型本科高校联盟光荣而又艰巨的历史任务,这套丛书的出版,用毛泽东同志的话来说,只是万里长征走完了第一步,今后任重而道远,需要大家继续共同努力,创造更好的成绩!

2013 年 7 月

前　言

高等数学是高等院校开设的一门重要的基础理论课程,其内容、思想、方法和语言已广泛渗入自然科学、工程技术、经济和社会科学等领域中,成为现代文化的重要组成部分.在我国高等教育大众化深入发展的背景下,结合理工类应用型人才培养要求和教学特点,我们在教材编写过程中力求体现以下特色:

(1) 注重从案例引入数学概念,将数学知识应用于处理各种生活和工程实际问题,用实例和示例加深对概念、方法的理解,以案例驱动,更具应用性.

(2) 为了使教材通俗易懂,注重对定理的内涵、背景与实际应用的介绍,删除一些过于繁琐的推理,淡化运算技巧的训练,在保证科学性的基础上,尽可能将枯燥的数学表述通俗化,增强教材的可读性,体现数学的亲和力.

(3) 添加了 MATLAB 在高等数学中的应用章节,利用 MATLAB 软件在计算和绘图方面的优势,增强学生对数学的兴趣和提高解决实际问题的能力.

《应用高等数学》分为上、下两册,上册的主要内容为函数与极限、一元函数微分学、一元函数积分学、常微分方程;本书为下册,主要内容为向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、MATLAB 在高等数学中的应用.每章节均配有一定数量的习题.编写起点适中,内容层次分明,方便选择性教学和学生自学.本书能培养学生一定的数学素养,为学生的后续专业课程学习及应用打下良好的数学基础.

本书由巢湖学院应用数学学院教师编写.学院高度重视高等数学课程教材改革工作,成立了应用高等数学教材编写小组,祝家贵教授任组长,赵开斌教授任副组长,并由祝家贵教授负责本书的大纲设计、修改和审定工作.陈侃(第 1 章、第 8 章)、徐富强(第 2 章、第 9 章)、陈淼超(第 3 章、第 11 章)、陈佩树(第 4 章、第 10 章、第 12 章)、侯勇超(第 5 章)、彭维才(第 6 章)、戴泽俭(第 7 章)编写初稿,祝家贵统稿并修改写成第 2 稿.在本书第 2 稿(讲义)的试用过程中,许多授课教师提出

了反馈意见,并提供了有价值的修改建议,最后本书由祝家贵定稿.

在本书编写过程中,我们得到了巢湖学院承担高等数学课程教学工作的老师的大力支持和帮助,在此对吴永生、陶有田、王珺等相关任课教师表示感谢.我们还参考了国内外许多与高等数学相关的优秀教材,从中选取了一些例子和习题,恕不一一列名致谢.

由于编者水平有限,时间比较仓促,书中不妥和错误之处在所难免,恳请专家、同行及读者批评指正,在此深表谢意.

编　者

2016年8月

目　录

第 7 章　向量代数与空间解析几何

平面解析几何的基本思想是在平面上建立直角坐标系，将平面上的点与它的坐标之间建立一一对应的关系，从而实现了用代数方法来研究平面图形的性质. 如同平面解析几何一样，空间解析几何是通过建立空间直角坐标系，把空间的点与三元有序数组对应起来，用三元方程及方程组来表示空间的几何图形，从而可以用代数的方法来研究空间几何问题. 向量代数作为数学的一个分支，与空间解析几何的联系非常紧密，向量代数是研究空间解析几何的重要工具和有力手段.

例 7.0.1　设有三个力 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{F}_3$ 作用于一点，它们的坐标表达式为 $\boldsymbol{F}_1=(1,0,-2)$，$\boldsymbol{F}_2=(2,-3,4)$，$\boldsymbol{F}_3=(0,1,1)$，求这三个力的合力的大小和方向.

以上问题的求解要用到向量代数的知识，本章将以向量为工具，讨论平面、直线的问题，介绍一些常见的曲面与曲线，这对后面学习多元函数微积分是必要的.

7.1　向量与坐标

我们通常遇到的物理量有两种：一种是只由数量大小决定的量，称为数量或标量，如长度、温度、质量、功等；另外一种量不仅有大小而且有方向，例如力、力矩、位移、速度、加速度等，这种量就是向量.

7.1.1　向量的概念

既有大小又有方向的量叫作向量，也叫作矢量.

在数学上，用一条有方向的线段（称为有向线段）来表示向量. 有向线段的起点与终点分别叫作向量的起点与终点，有向线段的方向表示向量的方向，有向线段的长度表示向量的大小. 起点是 A、终点是 B 的向量记作$\overrightarrow{AB}$（图 7.1.1）. 有时也用一

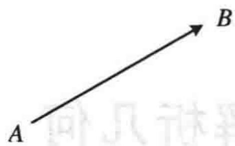

图 7.1.1　向量的表示

个黑体字母(书写时,在字母上面加箭头)来表示向量,例如 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{r},\boldsymbol{v},\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a},\vec{r},\vec{v},\vec{F}$.

在实际问题中,有些向量与其起点有关,有些向量与其起点无关.由于一切向量的共性是它们都有大小和方向,所以在数学上我们只研究与起点无关的向量,通常称这种向量为自由向量(以后简称向量).因此,如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相等,且方向相同,则说向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是相等的,记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.相等的向量经过平移后可以完全重合.

向量的大小叫作向量的模,也叫作向量的长度,向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\overrightarrow{AB}$ 的模分别记作 $|\boldsymbol{a}|,|\boldsymbol{b}|,|\overrightarrow{AB}|$;模等于 1 的向量叫作单位向量;模等于 0 的向量叫作零向量,记作 $\boldsymbol{0}$ 或 $\vec{0}$,零向量的起点与终点重合,它的方向可以看作是任意的.

与向量 $\boldsymbol{a}$ 长度相等而方向相反的向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的负向量,记作 $-\boldsymbol{a}$.向量 $\overrightarrow{AB}$ 的负向量是 $\overrightarrow{BA}$.

两个非零向量,如果它们的方向相同或相反,就称这两个向量平行.向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 平行,记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.零向量可以认为与任何向量都平行.两向量平行,又称作两向量共线.

类似还有向量共面的概念,设有 $k(k\geqslant 3)$ 个向量,当把它们的起点放在同一点时,如果 k 个终点和公共起点在一个平面上,就称这 k 个向量共面.

7.1.2　向量的线性运算

1. 向量的加减法

由物理学知,力、速度、位移等都可以合成,向量的加法就是从这些物理量的合成法则中抽象出来的运算.

定义 7.1.1　设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,平移向量使 $\boldsymbol{b}$ 的起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合,此时从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量 $\boldsymbol{c}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和,记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.如图 7.1.2 所示.

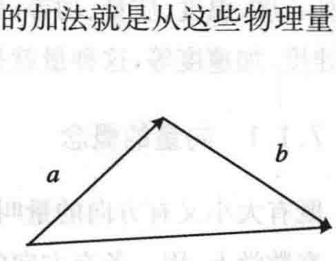

图 7.1.2　向量加法的三角形法则

上述作出两向量之和的方法叫作向量加法

的三角形法则.

当向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行时，我们还可以利用向量加法的平行四边形法则来求向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，具体做法是：平移向量使 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点重合，以 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为邻边作一平行四边形，从公共顶点到对角顶点的向量等于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 如图 7.1.3 所示.

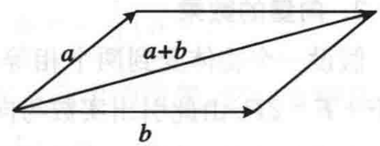

图 7.1.3　向量加法的平行四边形法则

> 向量的加法符合下列运算规律：
> (1) 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；
> (2) 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

由于向量的加法符合交换律与结合律，故 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n\ (n\geqslant 3)$ 相加可写成

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n$$

根据向量加法的三角形法则，可得 n 个向量相加的多边形法则：使前一向量的终点作为后一向量的起点，相继做向量 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_n$，再以第一向量的起点为起点，最后一向量的终点为终点作一向量，这个向量即为所求 n 个向量的和. 以四个向量为例，如图 7.1.4 所示.

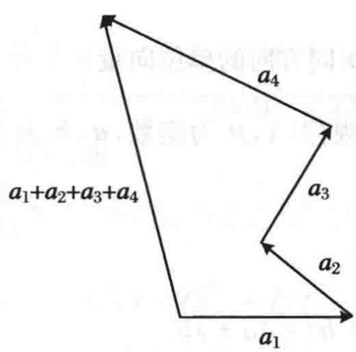

图 7.1.4　向量加法的多边形法则

定义 7.1.2　设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，我们把 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的负向量 $-\boldsymbol{b}$ 之和，叫作 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差. 记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$.

由三角形法则容易得出：将向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 起点放在一起，再从向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点至向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点引一向量，即得 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 如图 7.1.5 所示.

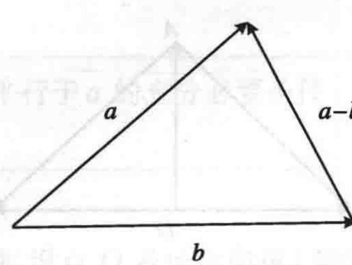

图 7.1.5　向量的减法

由三角形两边之和大于第三边的原理，容易得出：

$$|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$$

其中等号在 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向或反向时成立.

2. 向量的数乘

假设一个物体受到两个相等的力 $\boldsymbol{F}$ 的作用,那么求这两个力的合力时,显然有 $\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}=2\boldsymbol{F}$. 由此引出实数与向量相乘的概念.

定义 7.1.3　实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量,它的模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$,它的方向当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同,当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反. 当 $\lambda=0$ 时,$|\lambda\boldsymbol{a}|=0$,即 $\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量,这时它的方向可以是任意的. 我们把这种运算称为数乘向量(简称数乘).

由定义立即得到,若记与非零向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量为 $\boldsymbol{e}_a$,则有 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cdot\boldsymbol{e}_a$,且

$$\boldsymbol{e}_a=\frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$$

这说明非零向量 $\boldsymbol{a}$ 乘以它的模的倒数,便得到与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量.

> 容易证明,向量的数乘运算有以下运算规律(λ,μ 为实数,$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为向量):
>
> (1) $1\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$,$(-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$;
>
> (2) 结合律:$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$;
>
> (3) 分配律:$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$, $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

向量的加法与数乘运算统称为向量的线性运算.

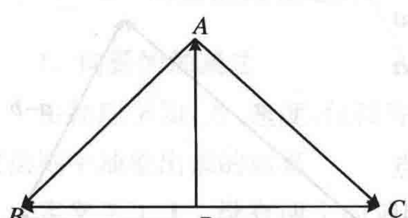

图 7.1.6　三角形 *ABC*

例 7.1.1　在△*ABC* 中,*D* 是 *BC* 边的中点,设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$(图 7.1.6),试用 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表示向量 $\overrightarrow{DA}$,$\overrightarrow{DB}$ 和 $\overrightarrow{DC}$.

解　由 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$,即 $\boldsymbol{b}+2\overrightarrow{DB}=\boldsymbol{c}$,得

$$\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b})$$

又得

$$\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{DB}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$$

又因为$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DC}$,所以

$$\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})-\boldsymbol{b}=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$

例 7.1.2　设 $M_1,M_2,\cdots,M_n$ 为 n 个质点在空间中的位置,它们分别具有质量 $m_1,m_2,\cdots,m_n$.在空间任取一点 O,做向量$\overrightarrow{OC}$如下:

$$\overrightarrow{OC}=\frac{m_1\overrightarrow{OM_1}+m_2\overrightarrow{OM_2}+\cdots+m_n\overrightarrow{OM_n}}{m_1+m_2+\cdots+m_n}$$

如此决定的点 C 称为这组质点的重心.

求证:重心 C 与点 O 的选取无关.

证明　取另一点 O',做向量

$$\overrightarrow{O'C'}=\frac{m_1\overrightarrow{O'M_1}+m_2\overrightarrow{O'M_2}+\cdots+m_n\overrightarrow{O'M_n}}{m_1+m_2+\cdots+m_n}$$

只要能证明点 C'与点 C 重合,就说明了重心与点 O 的选取无关.将

$$\overrightarrow{O'M_i}=\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{OM_i}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

代入上式,得

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O'C'}&=\frac{(m_1+m_2+\cdots+m_n)\overrightarrow{O'O}+m_1\overrightarrow{OM_1}+m_2\overrightarrow{OM_2}+\cdots+m_n\overrightarrow{OM_n}}{m_1+m_2+\cdots+m_n}\\&=\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{O'C}\end{aligned}$$

所以 $C'=C$.这就证明了重心与点 O 的选取无关.

由于向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 平行,因此我们常用向量与数的乘积来说明两个向量之间的平行关系,即有:

> **定理 7.1.1**　设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,那么向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是:存在唯一的实数 λ,使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

证明略.

给定一个点及一个单位向量就确定了一条数轴.设点 O 及单位向量 $\boldsymbol{i}$ 确定了数轴 Ox,对于轴上任一点 P,对应一个向量$\overrightarrow{OP}$,由于$\overrightarrow{OP}\parallel\boldsymbol{i}$,根据上述定理,必有唯一的实数 x,使$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$(实数 x 叫作轴上有向线段$\overrightarrow{OP}$的值),且$\overrightarrow{OP}$与实数 x 一一对应.于是

$$\text{点 } P\leftrightarrow \text{向量}\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}\leftrightarrow \text{实数 } x$$

从而数轴上的点 P 与实数 x 有一一对应的关系.据此,定义实数 x 为轴上点 P 的坐标,由此可知,数轴上点 P 的坐标为 x 的充分必要条件是 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$.

7.1.3　空间直角坐标系

空间直角坐标系的建立,完全类似于平面直角坐标系.在空间中取定一点 O 和三个两两垂直的单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$,就确定了三条都以 O 为原点的两两垂直的数轴,依次记为 x 轴(横轴)、y 轴(纵轴)、z 轴(竖轴),统称为坐标轴.它们构成了一个空间直角坐标系,称为 $Oxyz$ 坐标系或 $[O:\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$ 坐标系(图 7.1.7).

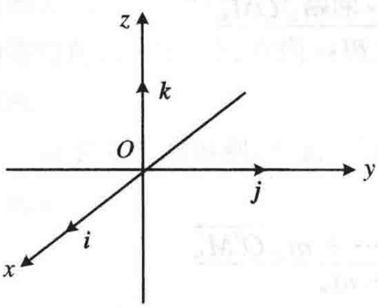

图 7.1.7　空间直角坐标系

三条坐标轴的方向和次序,通常规定按照右手法则排列,即右手握住 z 轴,以四指握拳方向表示由 x 轴正向按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 角度到 y 轴正向,则大拇指的指向就是 z 轴的方向.这样的坐标系称为右手坐标系,本书都采用右手坐标系.

定义 7.1.4　在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中,任意两个坐标轴可以确定一个平面,这种平面称为坐标面.由 x 轴及 y 轴所确定的坐标面称为 xOy 面,另两个坐标面分别是 yOz 面和 zOx 面.

定义 7.1.5　三个坐标面把空间分成八个部分,每一部分称为卦限,含有三个正半轴的卦限称为第一卦限,它位于 xOy 面的上方.在 xOy 面的上方,按逆时针方向(从上往下看)排列着第二卦限、第三卦限和第四卦限.在 xOy 面的下方,与第一卦限对应的是第五卦限,按逆时针方向(从上往下看)排列着第六卦限、第七卦限和第八卦限.八个卦限分别用字母 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ表示(图 7.1.8).

任给向量 $\boldsymbol{r}$,对应有点 M,使 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}$,以 OM 为对角线、以三条坐标轴为棱作长方体(图 7.1.9),有

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$

设 $\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$, $\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$, $\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$,则

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

上式称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标分解式,$x\boldsymbol{i}$,$y\boldsymbol{j}$,$z\boldsymbol{k}$ 称为向量 $\boldsymbol{r}$ 沿着三个坐标轴方向的分

向量.

显然,给定向量 $\boldsymbol{r}$,就确定了点 M 及$\overrightarrow{OP}=x\boldsymbol{i}$,$\overrightarrow{OQ}=y\boldsymbol{j}$,$\overrightarrow{OR}=z\boldsymbol{k}$ 三个分向量,进而确定了 x,y,z 三个有序数;反之,给定三个有序数 x,y,z 也就确定了向量 $\boldsymbol{r}$ 与点 M.于是点 M、向量 $\boldsymbol{r}$ 与三个有序数 x,y,z 之间有一一对应的关系.有序数 x,y,z 称为向量 $\boldsymbol{r}$(在坐标系 $Oxyz$ 中)的坐标,记作 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$;有序数 x,y,z 也称为点 M(在坐标系 $Oxyz$ 中)的坐标,记作 $M(x,y,z)$.

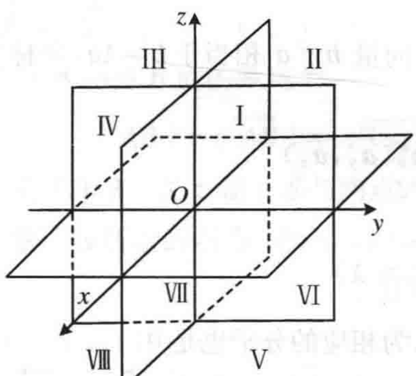

图 7.1.8　空间直角坐标系有八个卦限

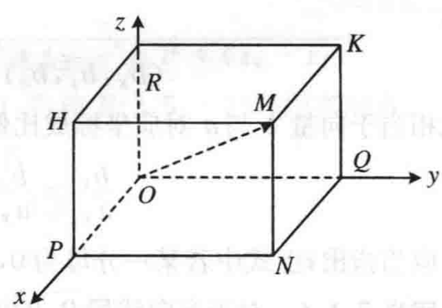

图 7.1.9　向量 $\boldsymbol{r}$ 按坐标分解

向量$\overrightarrow{OM}$称为点 M 关于原点 O 的向径.上述定义表明,一个点与该点的向径有相同的坐标.记号 (x,y,z) 既可表示点 M,又可表示向量$\overrightarrow{OM}$.

坐标轴与坐标面上的点,其坐标各有一定的特征.在 x 轴、y 轴、z 轴上点的坐标分别为 $(x,0,0)$,$(0,y,0)$,$(0,0,z)$;在 xOy 面、yOz 面、zOx 面上点的坐标分别为 $(x,y,0)$,$(0,y,z)$,$(x,0,z)$,原点的坐标为 $(0,0,0)$.

7.1.4　利用坐标做向量的线性运算

利用向量的坐标,可得向量的加法、减法以及数乘运算如下:

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,$\lambda$ 为实数,则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}&=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})+(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})\\&=(a_x+b_x)\boldsymbol{i}+(a_y+b_y)\boldsymbol{j}+(a_z+b_z)\boldsymbol{k}\\&=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z)\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})-(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})$$