概率论与数理统计

主　编　王世飞　吴春青
副主编　徐明华　石澄贤　阮宏顺

苏州大学出版社
Soochow University Press

概率论与数理统计

主　编　王世飞　吴春青
副主编　徐明华　石澄贤　阮宏顺

苏 州 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/王世飞，吴春青主编. —苏州：苏州大学出版社，2017.7
ISBN 978-7-5672-2186-4

Ⅰ.①概… Ⅱ.①王…②吴… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 172402 号

概率论与数理统计

王世飞　吴春青　主编

责任编辑　征　慧

苏 州 大 学 出 版 社 出 版 发 行

(地址：苏州市十梓街 1 号　邮编：215006)

宜兴市盛世文化印刷有限公司印装

(地址：宜兴市万石镇南漕河滨路 58 号　邮编：214217)

开本 787×960　1/16　印张 18.25　字数 308 千

2017 年 7 月第 1 版　2017 年 7 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5672-2186-4　定价：35.00 元

苏州大学版图书若有印装错误，本社负责调换

苏州大学出版社营销部　电话：0512-65225020

苏州大学出版社网址 http://www.sudapress.com

前 言

概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的数学学科，是高等学校理工科本科各专业一门重要的基础理论课.随着现代科学技术的发展，概率论与数理统计在自然科学、社会科学、工程技术、工农业生产等领域中得到了越来越广泛的应用.作为一门应用数学学科，概率论与数理统计不仅具有数学所共有的特点：高度的抽象性、严密的逻辑性和广泛的应用性，而且具有更独特的思维方法.为使初学者尽快熟悉这种独特的思维方法，更好地掌握概率论与数理统计的基本概念、基本理论、基本运算以及处理随机数据的基本思想和方法，培养学生运用概率统计方法分析解决实际问题的能力和创造性思维能力，我们编写了该教材.

本教材是参照教育部颁布的高等工科院校本科概率论与数理统计课程教学基本要求和近年来全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲编写的.全书共分九章，除一般的学习方法指导外，每章章末都有本章小结，精选了部分典型习题，并配有较详细的分析、解答.同时，本教材的最后还配有四份模拟自测题，帮助学生全面掌握相关的知识点.

本教材由王世飞、吴春青任主编，徐明华、石澄贤、阮宏顺任副主编，最后由王世飞统稿.本书在编写过程中得到了常州大学信息、数理学院领导及数学系教师们的支持和帮助，编者谨致谢意.

由于编者水平所限，书中缺陷和错误在所难免，诚请广大专家、同仁和读者批评指正.

编者

2017 年 6 月

目 录

第 1 章 随机事件及其概率

§1.1 随机试验与样本空间 …… 2
§1.2 随机事件 …… 3
§1.3 频率与概率 …… 7
§1.4 古典概型 …… 11
§1.5 几何概型 …… 14
§1.6 条件概率 全概率公式 …… 16
§1.7 事件的独立性与贝努里概型 …… 21
本章小结 …… 27
习题 1 …… 31

第 2 章 随机变量及其分布

§2.1 随机变量的概念 …… 39
§2.2 离散型随机变量 …… 41
§2.3 连续型随机变量 …… 46
§2.4 分布函数 …… 50
§2.5 随机变量函数的分布 …… 58
本章小结 …… 62
习题 2 …… 66

第 3 章 多维随机变量

§3.1 二维随机变量的分布 …… 76
§3.2 边缘分布与随机变量的独立性 …… 81
§3.3 两个随机变量的函数的分布 …… 90
§3.4 二维随机变量的条件分布 …… 96
本章小结 …… 99

习题 3 ······ 102

第 4 章 随机变量的数字特征

§4.1 数学期望 ······ 110
§4.2 方　差 ······ 119
§4.3 矩、协方差和相关系数 ······ 123
本章小结 ······ 128
习题 4 ······ 131

第 5 章 大数定律与中心极限定理

§5.1 大数定律 ······ 138
§5.2 中心极限定理 ······ 142
本章小结 ······ 145
习题 5 ······ 146

第 6 章 数理统计的基本概念

§6.1 总体与样本 ······ 149
§6.2 直方图和经验分布函数 ······ 150
§6.3 统计量 ······ 155
§6.4 抽样分布 ······ 156
本章小结 ······ 161
习题 6 ······ 163

第 7 章 参数估计

§7.1 参数的点估计 ······ 166
§7.2 估计量的评价标准 ······ 176
§7.3 区间估计 ······ 179
本章小结 ······ 188
习题 7 ······ 190

第 8 章 假设检验

§8.1 假设检验的基本概念 ······ 195
§8.2 正态总体均值的假设检验 ······ 198
§8.3 正态总体的方差的假设检验 ······ 203
本章小结 ······ 205
习题 8 ······ 207

第 9 章 方差分析及回归分析

§9.1 一元方差分析 …… 212
§9.2 一元线性回归 …… 218
§9.3 一元线性回归中的假设检验和预测 …… 222
本章小结 …… 225
习题 9 …… 226

模拟自测题(一) …… 231
模拟自测题(二) …… 233
模拟自测题(三) …… 235
模拟自测题(四) …… 237
附录 A 排列与组合 …… 239
附录 B MATLAB 在概率统计中的应用 …… 243
附录 C 几种常用的概率分布 …… 250
附录 D 常用统计数表 …… 252
附表 1 标准正态分布表 …… 252
附表 2 χ^2 分布表 …… 254
附表 3 t 分布表 …… 257
附表 4 F 分布表 …… 259
参考答案 …… 263
参考文献 …… 281

第1章

随机事件及其概率

内容概要 本章先讨论随机试验、样本空间和随机事件的概念，定义事件的关系和运算.通过讨论事件的频率及性质给出事件的概率的定义、性质、计算公式.讨论古典概型、几何概型中事件概率的计算.给出条件概率的定义及其计算，讨论乘法公式、全概率公式及其应用.讨论事件的独立性及贝努里概型，给出二项概率公式及其应用.

学习要求 理解随机试验、样本空间和随机事件的概念；理解随机事件的关系和运算，以及运算规律；会把复杂的事件通过事件的关系与运算用已知事件表示；知道频率的概念与性质；掌握概率的定义与性质；会应用概率的加法公式、减法公式；会求古典概型中事件的概率；知道几何概型中事件概率的计算；理解条件概率的定义，会计算条件概率；理解并会应用全概率公式；理解事件两两独立、相互独立的概念与性质；会应用事件相互独立时的概率公式；理解贝努里概型，会用二项概率公式求解贝努里概型中事件的概率.

在现实世界中存在着两种现象：确定性现象和随机现象.确定性现象指的是某个结果在一定条件下必然发生或不发生的现象，也称为必然现象.例如，水在1个标准大气压下加热到100℃时必定要沸腾；函数 x 在区间[0,1]上计算定积分必定等于0.5；等等.随机现象指的是虽然条件给定，但是有多个可能发生的结果，事先不知道哪一种结果会发生，可能发生这样的结果，也可能发生那样的结果，这类现象也称为不确定现象或偶然现象.例如，掷一枚硬币，可能正面朝上，也有可能反面朝上；掷一颗骰子，出现的具体点数可能是1点、2点等；从方便面生产流水线上取一袋，在测量之前不能确定其具体质量；等等.随机现象是在自然和生产实践中经常碰到的现象，其发生看似随机，实际上也是有一定规律的.

概率论与数理统计就是研究随机现象的规律性的一门学科.随机现象的规律性往往是通过对该类现象的多次观察或试验得到的.这些规律有助于人们更充分地理解随机现象,为生产实践提供指导.概率论与数理统计的理论与方法在自然科学、社会科学、工程技术、经济管理以及军事等领域都有广泛的应用,是各类专业技术人员和管理工作者进行各种数据的处理和分析时所必须具备的专业基础知识.

§1.1 随机试验与样本空间

(一) 随机试验

对某一随机现象所进行的试验或观察,称为**随机试验**,简称为**试验**.随机试验通常用字母 E 表示.随机试验具有以下几个特点:

(1) 试验具有明确的目的(目的性);

(2) 在相同的条件下可以重复进行(可重复性);

(3) 在试验之前已知试验的所有可能结果,但无法断言会出现哪个结果(随机性).

例 1 根据随机试验的特点,判定下列试验都是随机试验:

E_1:掷一颗骰子,观察所出现的点数;

E_2:掷一枚硬币两次,观察正面朝上的次数;

E_3:掷一枚硬币两次,观察所出现的正反面的情况;

E_4:射击一目标,直到击中为止,记录射击的次数;

E_5:从一批灯泡中任取一只,测量其使用寿命;

E_6:某生产线设计为包装某种产品,且1包质量为100克,误差±1克.现从该生产线生产的产品中任取1包,测量其质量.

(二) 样本空间

随机试验所有可能的结果的全体称为该随机试验的**样本空间**.也就是说,样本空间是随机试验所有可能的结果构成的集合.样本空间通常用字母 Ω 表示.

在§1.1的例1的随机试验 E_1 中,“出现1点”“出现2点”“出现奇数点”都

是该试验的可能结果. 其中“出现 1 点”“出现 3 点”或“出现 5 点”都意味着“出现奇数点”，即“出现奇数点”可以分成三种可能的结果. 但是“出现 1 点”这个结果不能再分成其他结果的组合. 随机试验的每一个不能再细分的结果称为其样本空间的一个**样本点**. 因此，随机试验的样本空间也可以看成是由全体样本点组成的集合. 在每个随机试验中，确定其样本空间至关重要.

例 2　写出 §1.1 的例 1 中的随机试验的样本空间.

解　E_1 的样本空间 $\Omega_1=\{1,2,3,4,5,6\}$；

E_2 的样本空间 $\Omega_2=\{0,1,2\}$；

E_3 的样本空间 $\Omega_3=\{(\text{正},\text{正}),(\text{正},\text{反}),(\text{反},\text{正}),(\text{反},\text{反})\}$；

E_4 的样本空间 $\Omega_4=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$；

E_5 的样本空间 $\Omega_5=\{t\mid t\geqslant 0\}$；

E_6 的样本空间 $\Omega_6=\{m\mid 99\leqslant m\leqslant 101\}$.

注意　E_2,E_3 条件相同，但是样本空间不同，这是由于讨论问题的兴趣不同造成的. 因此，确定随机试验的样本空间还要结合随机试验的目的. 从 §1.1 的例 1 还可以看到，样本空间可以有以下三种类型：

(1) 有限集合：样本空间中的样本点数是有限的，如例 2 中的 $\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3$；

(2) 无限可列集合：样本空间中的样本点数是无限的，但是可列，如例 2 中的 Ω_4；

(3) 无限不可列集合：样本空间中的样本点数是无限的，且不可列，如例 2 中的 Ω_5,Ω_6.

§1.2　随机事件

(一) 随机事件

随机试验的每一个可能的结果称为**随机事件**，简称为**事件**. 事件用大写字母 A,B,C 等表示. 先看下面的例子.

例 1　将一枚硬币掷两次，所有可能出现的结果为(正，正)，(正，反)，(反，正)，(反，反). 这 4 个可能结果是该试验样本空间的样本点，其全体构成了样本空间 $\Omega=\{(\text{正},\text{正}),(\text{正},\text{反}),(\text{反},\text{正}),(\text{反},\text{反})\}$. 每做一次试验，这 4 个样本点

中必有一个出现且只有一个出现，每个样本点即是一个随机事件."正好出现一次正面"也是该试验的可能结果，是随机事件.该随机事件是由(正，反)，(反，正)两个样本点组成的，即"正好出现一次正面"={(正，反)，(反，正)}.可以看出，该随机事件是样本空间 Ω 的子集，且当样本点(正，反)或(反，正)出现时，"正好出现一次正面"这个随机事件发生.又如，"至少出现一次正面"={(正，正)，(正，反)，(反，正)}也是样本空间 Ω 的子集.

一般地，随机事件即是随机试验 E 的样本空间 Ω 的子集.在一次试验中，当某事件所包含的任何一个样本点出现时，则称该事件发生.

仅由一个样本点组成的单点集称为**基本事件**.如果一个事件由多个样本点组成，则称该事件为**复合事件**.可见，复合事件是由多个基本事件组合而来的.在例 1 中，"正好出现一次正面"和"至少出现一次正面"都是复合事件.

样本空间 Ω 包含所有的样本点，它是 Ω 自身的子集，在每次试验中它总是发生的，称 Ω 为**必然事件**.空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，它也是 Ω 的子集，它在每次试验中总不发生，称 $\varnothing$ 为**不可能事件**.

(二) 事件间的关系和运算

有了事件的概念，接着讨论事件间的关系与运算.由于事件是样本空间的子集，联系以前学过的集合间的关系和运算，包括借助文氏图等，有助于理解事件间的关系和运算.

1. 包含关系

设有事件 A,B，若 B 发生必然有 A 发生，则称 A 包含 B(或称 B 包含于 A)，记作 $A\supset B$(或 $B\subset A$)(见图 1-1).

2. 相等关系

若事件 A,B 满足：$A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B 是相等事件，记作 $A=B$.

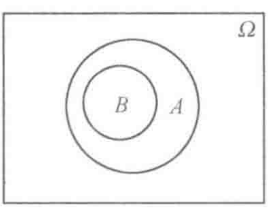

图 1-1

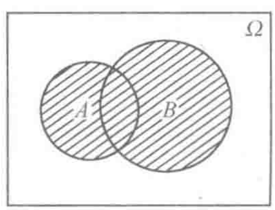

图 1-2

3. 事件的和

“事件 A,B 中至少有一个发生”称为事件 A,B 的和，记作 $A+B$ 或 $A\cup B$（见图 1-2 中的阴影部分）. 类似地，n 个事件的和记作 $A_1+A_2+\cdots+A_n=\sum_{i=1}^{n}A_i$ 或者 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$. 无穷可列个事件的和记作 $\sum_{i=1}^{\infty}A_i$ 或 $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$.

4. 事件的积

“事件 A,B 都发生”称为事件 A,B 的积，记作 AB 或 $A\cap B$（见图 1-3 中的阴影部分）. 类似地，n 个事件的积记作 $A_1A_2\cdots A_n=\prod_{i=1}^{n}A_i$，无穷可列个事件的积记作 $\prod_{i=1}^{\infty}A_i$.

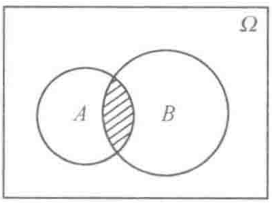

图 1-3

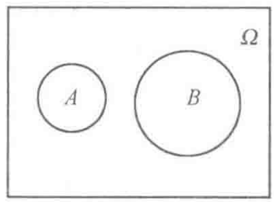

图 1-4

5. 互不相容(互斥)事件

若事件 A,B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称 A,B 为互不相容事件（见图 1-4）. 若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意两个事件互不相容，则称这 n 个事件两两互不相容(两两互斥). 若可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中任意两个事件互不相容，则称这可列个事件为两两互不相容(两两互斥)的.

6. 对立(互逆)事件

若事件 A,B 满足：$AB=\varnothing$ 且 $A+B=\Omega$，则称 A,B 互为对立事件，记作 $A=\overline{B}$ 或 $B=\overline{A}$（见图 1-5 中的阴影部分）.

由于 $A,\overline{A}$ 互为对立事件，所以有 $\overline{\overline{A}}=A$.

注意　对立事件是互斥的，但互斥事件不一定是对立的.

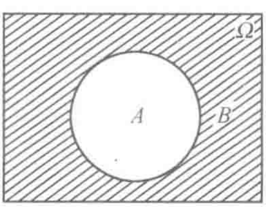

图 1-5

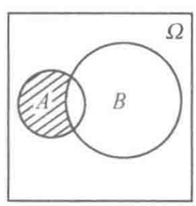

图 1-6

7. 事件的差

"事件 A 发生且事件 B 不发生"称为事件 A 与 B 的差，记作 $A-B$，即 $A-B=A\overline{B}$（见图 1-6 中的阴影部分）.

显然，$B-A=B\overline{A}$，$\overline{A}=\Omega-A$.

（三）事件的运算规律

设 A,B,C 是事件，则有

(1) 交换律：$A+B=B+A$，$AB=BA$；

(2) 结合律：$(A+B)+C=A+(B+C)=A+B+C$，$(AB)C=A(BC)=ABC$；

(3) 分配律：$(A+B)C=AC+BC$，$AB+C=(A+C)(B+C)$；

(4) 德·摩根(De Morgan)律：$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$.

对于 n 个事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$，有

$$\overline{A_1+A_2+\cdots+A_n}=\overline{A_1}\ \overline{A_2}\cdots\overline{A_n},$$

$$\overline{A_1A_2\cdots A_n}=\overline{A_1}+\overline{A_2}+\cdots+\overline{A_n}.$$

利用事件间的关系和运算将一些较复杂的事件表示为一些简单事件的组合，有利于后面对事件概率的计算.

例 2 向指定的目标射击两枪，以事件 A_1,A_2 分别表示第一枪、第二枪击中目标，试用 A_1,A_2 及它们的逆事件表示以下各事件：

(1) 两枪都击中目标；

(2) 两枪都没有击中目标；

(3) 恰有一枪击中目标；

(4) 至少有一枪击中目标.

解 (1) 事件"两枪都击中目标"可表示为 A_1A_2.

(2) 事件"两枪都没击中目标" 可表示为$\overline{A_1}\ \overline{A_2}$.

(3) 事件"恰有一枪击中目标" 可表示为 $A_1\overline{A_2}+\overline{A_1}A_2$.

(4) 事件"至少有一枪击中目标" 可表示为 A_1+A_2.

例 3 从一批产品中每次取出一个产品进行检验(每次取出的产品不放回)，事件 A_i 表示第 i 次取到合格品($i=1,2,3$). 试用事件的运算表示下列事件：

(1) 三次都取到了合格品；

(2) 三次中至少有一次取到合格品；

(3) 三次中恰有两次取到合格品；

(4) 三次中最多有一次取到合格品.

解　(1) 事件"三次都取到合格品"可表示为 $A_1A_2A_3$.

(2) 事件"三次中至少有一次取到合格品"可表示为 $A_1+A_2+A_3$.

(3) 事件"三次中恰有两次取到合格品"可表示为 $A_1A_2\overline{A_3}+A_1\overline{A_2}A_3+\overline{A_1}A_2A_3$.

(4) 事件"三次中最多有一次取到合格品"可表示为$\overline{A_1}\,\overline{A_2}+\overline{A_1}\,\overline{A_3}+\overline{A_2}\,\overline{A_3}$.

例 4　设 A,B 为任意两个事件，找出下列与 $A\cup B=B$ 不等价的事件：

(1) $A\cup B$；　(2) $\overline{B}$；　(3) $A\overline{B}$；　(4) $\overline{A}B$.

解　$A\cup B=B$ 说明 $A\subset B$. 又 $A\subset B\Leftrightarrow\overline{B}\subset\overline{A}\Leftrightarrow A$ 与$\overline{B}$互斥，即 $A\overline{B}=\varnothing$. 于是(1)(2)及(3)与 $A\cup B=B$ 等价，(4)与 $A\cup B=B$ 不等价. 实际上，例 4 借助于文氏图能够更方便地得到结论.

§1.3　频率与概率

概率论研究的是随机现象的规律性. 这种规律性要通过数量关系来反映. 因此，仅仅知道试验中可能发生哪些事件是不够的，还必须对事件发生的可能性大小进行量的描述. 概率就是刻画随机事件发生可能性大小的量，本节将对概率进行讨论. 如果某事件发生的可能性大，在 n 次试验中，该事件发生的频率也大. 频率在某种程度上也能反映事件发生的可能性大小. 因此，为了引出概率的定义，先给出频率的定义和性质.

(一) 频率

定义 1.1　设事件 A 在 n 次重复试验中发生了 $m(0\leqslant m\leqslant n)$次，则称 m 为事件 A 在这 n 次试验中发生的**频数**，称比值$\frac{m}{n}$为事件 A 在这 n 次试验中发生的**频率**，记作 $f_n(A)=\frac{m}{n}$.

由定义可知，频率 $f_n(A)$有如下性质：

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；　　(1.3.1)

(2) $f_n(\Omega)=1$; (1.3.2)

(3) 若事件 A 与 B 互不相容,则

$$f_n(A+B)=f_n(A)+f_n(B). \tag{1.3.3}$$

证 性质(1)、性质(2)是显然的.现在我们证明性质(3).设 m_A,m_B 分别表示在这 n 次重复试验中事件 A,B 发生的次数,m 表示在 n 次重复试验中事件 $A+B$发生的次数,因 A,B 互不相容,故必有 $m=m_A+m_B$,从而有

$$f_n(A+B)=\frac{m}{n}=\frac{m_A+m_B}{n}=\frac{m_A}{n}+\frac{m_B}{n}=f_n(A)+f_n(B).$$

历史上有人做过掷硬币的试验,表 1-1 列出了部分试验的结果.

表 1-1

试验者	抛掷次数 n	正面出现次数 m	正面出现频率 $\frac{m}{n}$
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维尼	30000	14994	0.4998

由表 1-1 中的数据可以看出如下两点:

(1) 频率具有稳定性,随着试验次数 n 增大,正面出现的频率逐渐稳定于 0.5;

(2) 频率具有波动性,其波动的幅度随着试验次数 n 的增大而减小.

由于频率具有波动性,用事件的频率直接作为事件的概率是不方便的.一般地,对于任一随机事件 A 的频率,当试验次数 n 逐渐增大时,它逐渐稳定于某个常数的附近.这是随机现象固有的性质,即频率的稳定性,也就是我们所说的随机现象的统计规律性.由于事件的频率反映了它在一定的条件下发生的频繁程度,即反映了事件发生的可能性的大小,虽然事件的频率可能随着试验次数 n 的变化而变化,但是随着 n 的无限增大,事件的频率将逐渐稳定于某一常数.这个常数不依赖于实验的次数 n,它是客观存在的一个数.对于每一个随机事件 A,都有一个这样的客观存在的常数与之相对应.因此,我们很自然地想到,应该用这个数来衡量事件 A 发生的可能性的大小,并称之为事件 A 的概率.例如,根据表 1-1,硬币正面出现的概率可以取为 0.5.

但是,在实际问题中,若对每个随机事件都要通过大量的试验而得到频率的

稳定值，并由此获得其概率是不现实的. 于是为了理论研究的需要，从频率的性质出发，我们给出如下度量事件发生可能性大小的量——概率的定义.

（二）概率

定义 1.2 设 E 是随机试验，Ω 是它的样本空间，对于 E 的每一个事件 A，都赋予一个实数 $P(A)$，如果 $P(A)$ 满足：

(1) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$， (1.3.4)

(2) $P(\Omega)=1$， (1.3.5)

(3) 对于可列个两两互不相容事件 $A_i(i=1,2,\cdots)$，有

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i), \tag{1.3.6}$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的**概率**.

(1.3.4)式称为概率的非负性，(1.3.5)式称为概率的规范性，(1.3.6)式称为概率的可列可加性.

概率的定义是根据频率的三个性质推广而来的. 在第 5 章中将进一步证明：当 $n \to \infty$ 时，频率 $f_n(A)$ 在一定的意义下收敛于概率 $P(A)$. 因此概率 $P(A)$ 可以用来度量事件 A 在一次试验中发生的可能性的大小. 定义 1.2 也称为概率的公理化定义.

从概率的定义可以导出计算概率常用的一些重要性质：

性质 1 不可能事件的概率为 0，即 $P(\varnothing)=0$.

性质 2 概率具有有限可加性，即若事件 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 两两互不相容，则有

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

性质 3 设 A,B 是两个事件，则

$$P(A-B)=P(A)-P(AB).$$

性质 3 称为减法公式. 从 $A=(A-B)+AB$，且 $A-B$ 与 AB 互不相容，由性质 2 知，$P(A)=P(A-B)+P(AB)$，移项就有 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

特别地，当 $B \subset A$ 时，由于 $AB=B$，得到减法公式的特殊情形，$P(A-B)=P(A)-P(B)$. 进一步由于概率的非负性，$P(A)-P(B)=P(A-B) \geqslant 0$，于是有 $B \subset A$ 时，$P(A) \geqslant P(B)$.

性质 4 对于任一事件 A，有

$$P(\overline{A})=1-P(A).$$

性质 5 对于任意两个事件 A,B,有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

性质 5 称为两个事件的加法公式.由 $A+B=A+(B-AB)$,由于 $A,B-AB$ 互斥,有 $P(A+B)=P(A+(B-AB))=P(A)+P(B-AB)$.再由性质 3,$P(B-AB)=P(B)-P(AB)$,于是 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

性质 5 可以推广到多于两个事件的和事件的情形.例如,对于任意三个事件 A,B,C,有

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC).$$

例 1 设事件 A,B 的概率分别是 0.6 和 0.3,根据下列条件分别求 $P(A-B)$.

(1) $A\supset B$; (2) $P(AB)=0.2$.

解 (1) 当 $A\supset B$ 时,$P(A-B)=P(A)-P(B)=0.6-0.3=0.3$.

(2) 当 $P(AB)=0.2$ 时,$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.6-0.2=0.4$.

例 2 设事件 A,B,C 的概率都为 $\frac{1}{4}$,且 $P(AC)=\frac{1}{8}$,$P(AB)=P(BC)=0$,求事件 A,B,C 中至少有一个发生的概率.

解 因为 $ABC\subset AB$,故 $P(ABC)\leqslant P(AB)$.

由于 $P(AB)=0$,所以 $P(ABC)=0$,从而所求概率为

$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)=\frac{5}{8}$.

例 3 设 $P(A)=0.8$,$P(B)=0.6$,$P(AB)=0.4$,求 $P(B\overline{A})$,$P(\overline{A}+\overline{B})$.

解 $P(B\overline{A})=P(B-A)=P(B)-P(BA)=P(B)-P(AB)=0.6-0.4=0.2$.

由德·摩根律知,$\overline{A}+\overline{B}=\overline{AB}$,于是 $P(\overline{A}+\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.4=0.6$.

例 4 一电路上装有甲、乙两根保险丝,当电流强度超过一定值时,甲烧断的概率为 0.8,乙烧断的概率为 0.74,两根同时烧断的概率为 0.63,问至少烧断一根保险丝的概率是多少?

解 设 A 表示事件"甲烧断",B 表示事件"乙烧断",则 $A+B$ 表示事件"至少烧断一根保险丝",AB 表示事件"两根同时烧断".根据题意,$P(A)=0.8$,$P(B)=0.74$,$P(AB)=0.63$,所以由加法公式

