互连网络的可靠性与故障诊断的图论方法

原　军　著

科学出版社

互连网络的可靠性与故障诊断的图论方法

原　军　著

科　学　出　版　社

北　京

内 容 简 介

并行计算机系统的可靠性和故障诊断问题是计算机科学研究中的重要课题. 并行计算机系统的互连网络的可靠性很大程度上决定着系统整体的可靠性. 图论是研究互连网络拓扑性能的有效方法, 已被计算机科学工作者和工程技术人员广泛接受和运用. 作者运用图论的方法对并行计算机系统互连网络的可靠性和系统处理器故障诊断问题进行研究. k-限制边连通度、k-限制连通度、R_g-连通度、g-好邻条件诊断度和容错泛连通性等图的参数和性质是近年来提出的一系列评价互连网络拓扑可靠性的有效指标. 本书研究一般网络(二部图、无三角图)以及几类规则互连网络模型——超立方体、m 元 n 方体、BC 网络、n 维环网等的上述可靠性的指标的优化和计算问题.书中的内容和方法是作者的一些研究成果. 另外, 在每一章的小结部分, 作者还提出一些可以进一步研究的问题, 供感兴趣的读者参考.

本书可作为高等院校计算机和应用数学、网络通信专业研究生以及相关领域研究人员的参考.

图书在版编目(CIP)数据

互连网络的可靠性与故障诊断的图论方法/原军著. —北京: 科学出版社, 2017.6

ISBN 978-7-03-052976-3

Ⅰ.①互… Ⅱ. ①原… Ⅲ.①互连网络-可靠性-研究②互连网络-故障诊断-研究 Ⅳ. ①TP393.08

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 118029 号

责任编辑: 胡庆家 / 责任校对: 邹慧卿
责任印制: 张　伟 / 封面设计: 蓝正设计

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京建宏印刷有限公司印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2017 年 6 月第　一　版　开本: 720 × 1000 B5
2017 年 6 月第一次印刷　印张: 17 3/4
字数: 350 000

定价: 108.00 元
(如有印装质量问题, 我社负责调换)

序

随着计算机技术的高速发展, 高性能并行计算机系统已成为基础科学领域研究中必不可少的工具. 当前, 高性能计算可用于解决国防建设和经济发展中重大应用问题的基础性、前瞻性与战略性的关键技术中, 广泛应用于核武器研究、生物信息技术、医疗和新药研究、计算化学、GIS、CAE、气象预报、工业设计以及环境保护等与国家安全和国民经济密切相关的各个领域.

可靠性和故障诊断是高性能计算领域两个重要的研究课题. 高性能计算机系统 (并行计算机系统) 主要是通过将多个处理机以某种互连网络为拓扑结构相互连接、并行处理来提升系统的性能. 目前, 提高并行计算机性能的主要手段仍是增加处理器数目, 例如, 大规模计算机 Cray XE6 的处理器核心数达到了 42712 个, 而日本的大规模计算机"京"的总内核数量则高达 548352 个. 从可靠性的角度看, 假定单个处理器的可靠性是固定的, 则系统的处理器数量越多, 系统的可靠性就会越低. 相关数据显示, 在持续运行过程中, 一台大规模的 IBM/LLNL ASCI White 系统的平均故障时间间隔最多不超过 40 小时, 而一台拥有 8000 个节点的 Google 集群系统的平均故障时间间隔仅为 36 小时. 可见, 计算机系统规模的急剧扩大必将导致系统可靠性的大幅降低. 随着高性能计算在应用领域的逐渐普及和发展, 以及大规模并行系统规模的不断扩大, 提高可靠性的需求越来越迫切; 而大规模并行计算机系统所呈现出的发展趋势使得可靠性和故障诊断问题面临着更加严峻的挑战.

大规模并行计算机系统功能的实现很大程度上依赖于系统互连网络的性能. 互连网络的拓扑结构通常可以用图作为其数学模型. 因此, 图论已经成为研究互连网络性能的重要工具. 本书主要以图论为工具从互连网络的条件连通性、容错泛连通性、条件故障诊断度三方面研究互连网络的可靠性和故障诊断能力的分析、计算和优化问题.

该书蕴涵充实的基础性理论知识和严谨的数学推理, 有助于致力于该领域研究的同学打下坚实的理论基础, 同时, 也将为相关专业感兴趣的研究者提供有价值的参考. 相信此书的出版可以为该领域的发展起到积极的推动作用.

王世英
2016 年 11 月于河南新乡

前　言

随着信息科学的迅猛发展, 信息量和计算量日益增大, 人们迫切需要速度更快、性能更高的计算机系统, 因而并行计算机系统应运而生. 并行计算机系统的一个基本特征是元件之间通过物理连线按照某种互连网络连接起来, 使得多个处理器通过信息传输, 互相配合, 并行处理, 从而提高运算能力. 并行计算机系统功能的实现很大程度上依赖于系统互连网络的性能. 近年来, 随着 Pflops(亿次浮点运算) 数量级并行计算机的出现, 并行计算机的应用领域和应用规模进一步拓宽增大, 对其性能的要求更高、更全面. 在并行计算机的使用过程中, 通常都需要进行长时间、高速、大量的数据运算, 系统中的处理机和物理连线发生故障是不可避免的. 互连网络的可靠性和故障诊断度是衡量互连网络性能的关键指标, 它主要考虑在网络发生故障时网络中某些特有性质的保持能力以及网络系统的自我故障诊断能力.

网络系统的可靠性研究最先源于 Lee 对电信交换网络系统的研究, 由于网络系统中某个 (几个) 部件的故障使网络系统总的通信能力下降, 引起呼叫拥塞, Lee 就将这种现象定义为系统故障, 使用了以连通性为系统可靠性的度量方法. 以连通性为网络系统可靠性的标准规定: 只要网络系统是连通的, 或者主体部分是连通的, 或者需要通信的各方是连通的, 网络系统就是可以工作的. 网络的连通性和容错泛连通性是评价互连网络的可靠性的两类重要指标. 网络的连通性可以用来度量网络系统的处理器或连线发生故障时, 网络系统保持连通的能力; 网络的容错泛连通性, 则可以刻画网络系统的处理器或连线发生故障时, 需要通信的各方保持各种长度的链路的能力. 网络的条件故障诊断度是度量网络系统的自我故障诊断能力的重要参数.

互连网络的拓扑结构可以用图作为其数学模型, 图中的点表示互连网络中的各个元件, 图中的边表示元件之间的物理连线. 因此, 图论已经成为研究互连网络性能的重要工具. 本书主要以图论为工具从网络的条件连通性、容错泛连通性、条件故障诊断度三方面研究互连网络的可靠性和故障诊断能力的分析、计算和优化问题.

作者近年来一直从事互连网络的可靠性和故障诊断的研究工作, 阅读了大量相关领域的文献, 获得了一些有意义的成果. 本书是作者近年来的研究成果的整理、修正和系统化.

本书的基本结构如下: 第 1 章首先介绍并行计算机互连网络的背景并给出本书将用到的图论方面的术语、记号, 然后介绍互连网络的设计原则, 着重对互连网络可靠性和故障诊断度进行介绍, 最后综述互连网络的条件连通性、容错泛连通性、条件故障诊断度研究进展. 第 2 章和第 3 章研究一般网络的高阶限制边连通性; 第 4 章和第 5 章研究两类规则互连网络以及 BC 网络的高阶限制边连通性; 第 6 章研究 3 元 n 方体等的高阶限制连通性; 第 7 章研究 k 元 n 方体的 R_g-连通性; 第 8 章研究 k 元 n 方体的 g-好邻条件故障诊断度; 第 9 章研究 k 元 n 方体的推广网络 n 维环网的容错泛连通性.

我们感谢书末参考文献中列出的所有学者, 正是他们出色的工作才使本领域如此精彩. 感谢王世英、刘爱霞、马雪、王玉洁、李晶、林上为, 本书的部分章节饱含着他们出色的工作. 感谢河南师范大学王世英教授对我们的指导, 并为本书作了精彩的序言. 本书是由国家自然科学基金项目“基于并行系统互连网络的条件连通性及故障诊断问题的研究”(项目批准号: 61402317) 资助出版.

由于时间仓促, 加之作者水平有限, 不当之处在所难免, 恳请读者批评指正.

原　军

2016 年 8 月

符 号 表

符号	含义
G	无向图
$V(G)$	图 G 的顶点集
$E(G)$	图 G 的边集
$d_G(u)$	图 G 的顶点 u 的度
$\delta(G)$	图 G 的最小度
$G(X \cup Y, E)$	以 (X, Y) 为二分划, E 为边集的二部图 G
$X \setminus Y$	集合 X 和集合 Y 的差集
$G \cup H$	图 G 和图 H 的并图
$G \times H$	图 G 和图 H 的 Cartesian 积图
$G[U]$	图 G 中由顶点集 U导出的子图
$G - U$	图 G 中删去顶点集 U及其关联的边集所得的子图
$G - F$	图 G 中删去边集 F所得的子图
$[U, U']$	图 G 的顶点集 U和顶点集 U' 之间的边集
$\kappa(G)$	图 G 的连通度
$\lambda(G)$	图 G 的边连通度
$\lambda'(G)$	图 G 的限制边连通度
$\lambda_k(G)$	图 G 的 k- 限制边连通度
$\widetilde{\kappa}_h(G)$	图 G 的 h- 限制连通度
$\kappa_g(G)$	图 G 的 R_g- 连通度
$t_g(G)$	图 G 的 g- 好邻条件诊断度
$\mathrm{dist}_G(u, v)$	图 G 中从顶点 u 到顶点 v 的距离
$D(G)$	图 G 的直径
$g(G)$	图 G 的围长
$N_G(u)$	顶点 u 在图 G 中的邻域
$\langle \mathcal{P} \rangle$	由边集 $\mathcal{P}$ 导出的子图

F_v	故障点集
F_e	故障边集
$\mathcal{F}_d$	故障 d 维边
$G+F$	在图 G 上添加集合 F 中所有的边
$G-F_v$	从图 G 中删去点集 F_v 及其关联的边集
$G-F_e$	从图 G 中删去边集 F_e
$P[u,v]$	从顶点 u 到顶点 v 的路
Q_n^k	k 元 n 方体
Q_n	n-维超立方体
$S \triangle T$	集合 S 和集合 T 的对称差

目　录

第1章 绪 论

随着科学与工程领域研究的深入, 人们对计算机的计算和存储能力提出了更高的要求. 因此, 并行计算机应运而生. 在并行计算机系统, 尤其是大规模并行计算机系统中, 互连网络的性能对整个并行计算机系统的性能起着重要的, 甚至是决定性的作用. 并行计算机系统互连网络的容错性和故障诊断是计算机科学的两个重要的研究课题. 图作为研究互连网络拓扑性质的数学模型已被计算机科学工作者和工程技术人员广泛接受和运用 (见文献 [1], [2]). 本书将运用图论这个强而有力的数学工具研究计算机系统互连网络的可靠性和故障诊断问题.

本章中, 我们先简要叙述互连网络可靠性和故障诊断问题的应用背景, 然后给出书中用到的图论概念和互连网络的知识, 最后, 介绍相关问题的研究进展及本书的主要内容的安排.

我们先介绍图与互连网络之间的联系以及图的概念.

1.1 引 言

在科学与工程计算领域, 很多的重大课题, 例如, 长期天气预报、湍流分析、海洋环流建模、空气动力学、三维等离子体研究、药物分子结构设计、全球气候变化、结构生物学、图像理解等, 都需要海量的计算, 这远远超出了微处理机的计算能力 [3]. 仅靠改进电路工艺和提高单机器件计算速度对计算机的计算能力的提升是非常有限的. 并行计算机 (Parallel Computer) 为实现高性能计算提供了解决方案, 它通过连接大量的处理器、计算结点及存储单元, 满足人们对计算能力日益增长的需求.

并行计算机系统中元件之间的连接模式称为该系统的互连网络 (Interconnection Networks), 简称为网络 (Networks). 当前的大规模并行处理 (Massively Parallel Processing System, MPP) 系统都是通过互连网络将数以万计的处理器、计算结点、存储单元等连接而成, 从而实现了空间上的并行, 例如, 由 2D torus 拓扑结构连接而成的 the iWarp[4] 和 the Tera Parallel Computer[5], 由 3D torus 拓扑结构连接而成的 Cray T3D[6, 7] 和 Cray T3E[8], 由 k 元 n 方体拓扑结构连接而成的 the Mosaic[9] 和 the IBM Blue Gene[10] 等. 随着网络带宽增大以及并行计算机中的处理器数量不断增加, 处理器之间经过相互连接进行通信的开销也越来越大. 因此, 并行计算机系统功能的实现很大程度上依赖于系统互连网络的性能.

近年来, 随着 Pflops(亿次浮点运算) 数量级并行计算机的出现, 并行计算机的应用领域进一步拓宽, 应用规模持续增大, 对其性能的要求更高、更全面. 在并行计算机的使用过程中, 通常都需要长时间、高速、大量的数据运算. 随着系统规模的增大, 系统中的处理机和物理连线发生故障是不可避免的. 据统计, IBM 的 ASCI White 差不多每 40 小时就会发生一次故障 [11]; Google 分布在全世界的近 10000 个站点每年的结点故障率接近 3%, 也就是说每 30 小时就会有一个结点发生故障 [12]; 处理器数规模大于 100000 的 IBM Blue Gene-L 的发生故障的频率则为几十分钟一次 [13]. 处理机和物理连线发生故障的直接体现就是系统可靠性下降, 即互连网络连接的各个部件 (结点) 之间不再连通或者部分连通, 部件之间的通信能力和效率降低, 甚至发生严重的计算错误. 在许多实际应用中, 一旦计算机系统发生故障, 代价是相当高昂的, 甚至是致命的, 例如, 2009 年 6 月 22 日, 美国首都华盛顿地铁列车发生严重的碰撞事故, 9 人死亡, 76 人受伤, 事故原因之一就是计算机系统故障; 2012 年美国最大的股票做市商之一骑士资本因计算机系统故障损失 4.4 亿美元险些破产; 2013 年招商银行因为计算机系统故障, 导致招商银行信用卡网上支付、银联及 ATM 业务都受到了影响, 经济损失达 1 个亿. 并行计算机的可靠性和故障诊断问题实际上可以转化为互连网络的可靠性和故障诊断问题. 目前, 多处理器系统互连网络的可靠性和可诊断性已成为并行计算机系统研究关注的热点. 尤其在某些场合需要系统具有不间断的处理能力的时候, 系统互连网络的可靠性和可诊断性变得更加重要.

互连网络系统的可靠性研究最先源于 Lee 对电信交换网络系统的研究 [14], 由于网络系统中某个 (几个) 部件的故障使网络系统总的通信能力下降, 引起呼叫拥塞, Lee 就将这种现象定义为系统故障, 使用了以连通性为系统可靠性的度量方法. 以连通性为网络系统可靠性的标准规定: 只要网络系统是连通的, 或者主体部分是连通的, 或者需要通信的各方是连通的, 网络系统就是可以工作的. 为区别其他含义的可靠性, 文献上习惯称这种可靠性为容错性(Fault-Tolerence).

虽然多处理器系统中处理机和物理连线发生故障是不可避免的, 但是它通常表现出的行为却隐藏了这些故障的存在, 这是因为人们进行系统设计时, 为了实现高可靠性的目标, 对系统的每个部件都采用了冗余设计的策略. 例如, 在一个 N 模冗余 (N-Modular Redundancy, NMR) 中, 用 N 个相同的处理器 (模块) 来处理同一个数据, 并把它们的计算结果传送给一个表决器, 表决器采用一定的策略 (如多数表决, Majority Voting) 对 N 个处理结果进行比较, 产生一个最终的结果作为系统输出. 然而, 要保持系统的高可靠性, 就需要在系统中的处理器或连线出现故障时, 能够及时定位故障处理器或连线, 从而进行维修和替换, 这是维护网络可靠性的有效方法. 定位网络故障处理器或连线的过程, 被称为网络的故障诊断.

按照处理器或连线故障的故障行为的不同, 互连网络故障可分为下列两种类

型 [15]:

(1) Fail-Stop 型 (也称 Crash 型), 即发生故障的结点或边无法传输任何信息.

(2) Byzantine 型, 即发生故障的结点或边会对传输经过该结点或边的信息进行任意的改变, 甚至于捏造虚假的故障信息.

另外, 按照故障持续时间的长短不同, 互连网络故障可分为永久性故障和瞬态故障. 永久性故障指故障元器件无法修复, 必须更换; 瞬态故障则持续时间较短, 多为元器件的瞬态故障或者出故障部件经故障排除后可以重新工作.

本书将运用图论的指标包括: 网络的连通度, 容错泛连通性, 系统诊断度等, 利用它们来分析和研究带有 Fail-Stop 型永久故障的互连网络的可靠性和故障诊断能力.

1.2 图论的术语和记号

目前已知的关于互连网络的容错性成果几乎都是采用的图论方法. 因此为了更好地理解本书内容, 需要简单介绍一下相关的图论的基本概念和符号.

一个无向图G(简称图) 是一个有序三元组 $(V(G), E(G), \psi(G))$, 其中 $V(G)$ 是非空顶点集, $E(G) \subseteq V \times V$ 是边集, $\psi(G)$ 是关联函数, 它使 G 的每条边恰好对应 G 的一个无序顶点对. 一个连接两个顶点 x 和 y 的无向边记作 xy, 其中 x, y 称为边 xy 的端点. 显然, 互连网络可以用图来表示. 图的顶点表示系统中的元件, 图的边表示元件之间的物理连线, 而关联函数指定了元件之间的连接方式. 这样的图称为互连网络拓扑结构 (Topological Structure), 或简称网络拓扑 (Network Topology). 反之, 图也可以看成是某个互连网络的拓扑结构. 因此, 本书将不再区分“图”和“互连网络”. 同样地, 网络中的元件和连线与图中的顶点和边也不加区分.

设 $G(V, E)$ 是一个图, 其中 $V = V(G), E = E(G)$. 图 G 的顶点数 $|V(G)|$ 称为 G 的阶, 记作 $\nu(G)$; 另外, 图 G 的边数 $|E(G)|$ 记作 $\varepsilon(G)$, 即 $\nu(G) = |V(G)|$, $\varepsilon(G) = |E(G)|$. 一个图 G 称为有限图, 若图 G 的顶点集及边集都是有限集, 否则称为无限图. 只有一个顶点的图称为平凡图, 其他所有的图都称为非平凡图. G 中具有相同端点的边称为环, 端点相异的边称为连杆. 两条或多条具有相同端点对的边称为重边. 不含环和重边的图称为简单图. 本书所研究的图都是有限无向简单图.

一条边的端点称为与这条边关联, 反之亦然. 与同一条边关联的两个顶点称为相邻的, 与同一个顶点关联的两条边也称为相邻的. 任意两个相异的顶点都相邻的简单图称为完全图. n 阶完全图记为 K_n. 顶点集可以划分为两个 (非空) 子集 X 和 Y, 且 E 中每条边恰有一个端点在 X 中, 一个端点在 Y 中的图 G, 称为偶图(或二部图), 记为 $G(X \bigcup Y, E)$; 这样一种分类 (X, Y) 称为图的一个二分类. 设 G 是具有二分类 (X, Y) 的简单偶图, 若 X, Y 中每对顶点均相邻, 则称 G 是完全偶图; 若

$|X| = m, |Y| = n$, 则这样的图记为 $K_{m,n}$.

称图 H 是图 G 的子图(记为 $H \subseteq G$), 如果 $V(H) \subseteq V(G), E(H) \subseteq E(G)$, 并且 ψ_H 是 ψ_G 在 $E(H)$ 上的限制. 若 $H \subseteq G$, 但 $H \neq G$, 则称 H 是 G 的真子图. 若 $H \subseteq G$ 且 $V(H) = V(G)$, 则称 H 是 G 的生成子图. 从图 G 中删去所有的环, 并使每一对相邻顶点只留下一条连杆, 即可得到 G 的一个简单生成子图, 称为 G 的基础简单图.

假设 V' 是 $V(G)$ 的非空子集. 以 V' 为顶点集, 以 G 中两个端点均在 V' 中的所有边的集合为边集组成的子图称为 G 的由 V' 导出的子图, 记为 $G[V']$; $G[V']$ 称为 G 的导出子图. 导出子图 $G[V \setminus V']$ 记为 $G - V'$; 它是从 G 中删去 V' 中的顶点以及与 V' 中的顶点相关联的边所得到的子图. 若 $V' = \{v\}$, 则 $G - \{v\}$ 简记为 $G - v$. 假设 E' 是 $E(G)$ 的非空子集. 以 E' 为边集, 以 E' 中所有边的端点的并集为顶点集的子图称为 G 的由 E' 导出的子图, 记为 $G[E']$; $G[E']$ 称为 G 的边导出子图. 边导出子图 $G[E \setminus E']$ 简记为 $G - E'$. 设 e 是 G 的一条边, 则 $G - \{e\}$ 简记为 $G - e$.

设 G_1 和 G_2 是两个不同的图. 若 G_1 和 G_2 没有公共顶点, 则称它们是不相交的; 若 G_1 和 G_2 没有公共边, 则称它们是边不重的.G_1 和 G_2 的并图 $G_1 \bigcup G_2$ 是一个顶点集为 $V(G_1) \bigcup V(G_2)$, 边集为 $E(G_1) \bigcup E(G_2)$ 的图. 若 G_1 和 G_2 至少有一个公共顶点, 类似地, 则可以定义 G_1 和 G_2 的交图 $G_1 \bigcap G_2$.

图 G 的顶点 v 的度 $d_G(v)$ 是 G 中与 v 相关联的边数, 每个环算作两条边; 用 $\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$ 分别表示 G 的顶点的最小度 和最大度. 设 $\{v_1, v_2, \cdots, v_\nu\}$ 是 G 的顶点集, 则 $(d(v_1), d(v_2), \cdots, d(v_\nu))$ 称为 G 的度序列. 称图 G 是 k-正则 的, 如果对所有的 $v \in V(G)$ 有 $d_G(v) = k$; 正则图 是指每个顶点的度都相同的图. 图 G 的边 e 的度 是 G 中与 e 相邻的边的数目, 每个环算作两条边, 记为 $\xi_G(e)$. 因此, 对 G 中的任一条边 e 都有 $\xi_G(e) = d_G(u) + d_G(v) - 2$, 其中 u 和 v 是 e 的两个端点.

G 的一条途径 是指一个有限非空序列 $W = v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_kv_k$, 它的项交替地为顶点和边, 使得对 $1 \leqslant i \leqslant k$, e_i 的端点是 v_{i-1} 和 v_i. 称 W 是从 v_0 到 v_k 的一条途径或一条 (v_0, v_k) 途径.v_0 和 v_k 分别为 W 的起点和终点, 而 $v_1, v_2, \cdots, v_{k-1}$ 称为 W 的内部顶点. 整数 k 称为 W 的长. 途径 $W = v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_kv_k$ 的节是指 W 中由相继项构成的子序列 $v_ie_{i+1}v_{i+1}\cdots e_jv_j$, 它也是一条途径; 这一子序列又可称为 W 的 (v_i, v_j) 节, 记作 $W[v_i, v_j]$. 在简单图中, 途径 $v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_kv_k$ 由它的顶点序列 $v_0v_1\cdots v_k$ 所确定, 所以简单图的途径可简单地由它的顶点来表示. 若途径 W 的边 $e_1, e_2, \cdots, e_k$ 互不相同, 则 W 称为迹. 若 W 的顶点 $v_0, v_1, \cdots, v_k$ 互不相同, 则 W 称为路. 称一条迹是闭的, 如果它有正的长且起点和终点相同. 若一条闭迹的起点和内部顶点互不相同, 则称它为圈. 长为 k 的圈称为 k 圈; 按 k 是奇数还是偶数, 称 k 圈为奇圈或偶圈. 3 圈也称为三角形. G 中最短圈的长度称为 G 的

围长, 记为 $g(G)$. 若 G 没有圈, 则定义 G 的围长为无穷大.

图 G 的两个顶点 u 和 v 称为连通的, 如果在 G 中存在 (u,v) 路. G 的极大连通子图称为 G 的分支. 若 G 只有一个分支, 则称 G 是连通的; 否则称 G 是不连通的.

若 V 的子集 V' 使得 $G-V'$ 不连通, 则 V' 称为 G 的顶点割.k 顶点割是指有 k 个元素的顶点割. 完全图没有顶点割. 事实上, 没有顶点割的图也只能是以完全图作为生成子图的那些图. 若 G 至少有一对相异的不相邻顶点, 则 G 所具有的 k 顶点割中最小的 k, 称为 G 的连通度, 记为 $\kappa(G)$. 否则定义 $\kappa(G)$ 为 $\nu-1$. 于是, 当 G 是平凡的或不连通时, $\kappa(G)=0$. 若 $\kappa(G)\geqslant k$, 则称 G 为 k 连通的. 所有非平凡连通图都是 1 连通的.

对 V 的子集 U 和 U', 用 $[U,U']$ 表示一个端点在 U 中另一个端点在 U' 中的所有边的集合.G 的边割是指形为 $[U,\overline{U}]$ 的 E 的子集, 其中 U 是 V 的非空真子集, $\overline{U}=V\setminus U$. k 边割是指有 k 个元素的边割. 若 G 非平凡, 则把 G 的边连通度 定义为 G 的所有 k 边割中最小的 k, 记为 $\lambda(G)$; 若 G 是平凡的, 则 $\lambda(G)$ 定义为 0. 若 $\lambda(G)\geqslant k$, 则称 G 是 k 边连通的.

设 G 是一个无向图, V,E 分别为它的顶点集和边集. 设 U 是图 G 的顶点集的一个真子集. 定义 $N_G(U)=\{x:x\in V(G)\setminus U,$ 且 x与U 中某点相邻$\}$ 为 U 在图 G 中的开邻集. 设 $F\subseteq E(G), v\in V(G)$, 定义 $F(v)=\{e\in F: e$ 与顶点 v 相关联$\}$.

经过 G 的每个点恰一次的圈称为图 G 的哈密顿圈. 称一个包含哈密顿圈的图是哈密顿的. 经过图 G 所有顶点恰一次的路是 G 的哈密顿路. 若图 G 中任意两个不同的顶点之间存在一条哈密顿路, 则称图 G 是哈密顿连通的. 若对任意边集 F $(|F|\leqslant k)$, $G-F$ 中存在一个哈密顿圈, 则称图 G 是 k-边故障哈密顿的. 若对任意故障点和 (或) 故障边的集合 F $(|F|\leqslant k)$, $G-F$ 中存在一个哈密顿圈, 则称图 G 是 k-故障哈密顿的.

如果 u 和 v 是连通图 G 中两个顶点, 那么 u 和 v 之间的距离 $\mathrm{dist}_G(u,v)$ 是 G 中最短 (u,v) 路的长度. G 的直径 $D(G)$ 是指 G 的所有顶点对之间的最大距离. 若 G 不连通, 则定义 G 的直径为无穷大. 因此, 若 G 是一个连通图, 则 G 中 (u,v) 路的长 l 满足 $d_G(u,v)\leqslant l\leqslant|V(G)|-1$. 若图 G 中每一对 u,v 点之间存在长从 $d_G(u,v)$ 到 $|V(G)|-1$ 的 (u,v) 路, 则称图 G 是泛连通的. 若对任意故障点和 (或) 故障边的集合 F $(|F|\leqslant k)$, $G-F$ 中任意两点间存在长从 p 到 $|V(G-F)|-1$ 的路, 则称图 G 是 k-故障 p-泛连通的.

若图 G 包含长从围长 $g(G)$ 到 $|V(G)|$ 的圈, 则称 G 是泛圈的. 若它包含一个长从 4 到 $|V(G)|$ 的偶圈, 则称 G 是偶泛圈的. 进一步, 若偶泛圈图 G 的每条边都在长从 4 到 $|V(G)|$ 的偶圈上, 则图 G 被称为是边偶泛圈的. 泛圈性和偶泛圈性都是判断一个网络拓扑是否适合将不同长度的圈映射到其上的重要指标.

设 M 是 E 的一个子集, 它的元素是 G 中的连杆, 并且这些连杆两两互不相邻, 则称 M 为 G 的对集(或匹配); M 中一条边的两个端点称为在 M 下是配对的. 若对集 M 的某条边与顶点 v 相关联, 则称 M 饱和顶点 v, 并称 v 是 M 饱和的, 否则称 v 是 M 非饱和的. 若 G 的每个顶点均为 M 饱和的, 则称 M 是 G 的完美对集. 若 G 没有另外的对集 M' 使得 $|M'| \geqslant |M|$, 则称 M 是 G 的最大对集.

设 S 是 $V(G)$ 的一个子集, 若 S 中任意两个顶点在 G 中均不相邻, 则称 S 是 G 的一个独立集. G 中顶点数最大的独立集称为 G 的最大独立集. 最大独立集 的顶点数称为图 G 的独立数, 记作 $\alpha(G)$. 设 K 是 $V(G)$ 的一个子集. 若 G 中每条边至少有一个端点在 K 中, 则称 K 为图 G 的覆盖. G 中顶点数最小的覆盖称为 G 的最小覆盖. 最小覆盖 的顶点数称为图 G 的覆盖数, 记作 $\beta(G)$.

设 G_1 和 G_2 是两个无向图. G_1 和 G_2 的笛卡儿乘积(也称为 Cartesian 积图)是一个无向图, 记为 $G_1 \times G_2$, 其顶点集 $V(G_1 \times G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$, 两个不同的顶点 x_1x_2 和 y_1y_2 (其中 $x_1, y_1 \in V(G_1), x_2, y_2 \in V(G_2)$) 在 $G_1 \times G_2$ 中相邻当且仅当或者 $x_1 = y_1$ 且 $x_2y_2 \in E(G_2)$ 或者 $x_2 = y_2$ 且 $x_1y_1 \in E(G_1)$.

如果不会发生混淆, 我们通常将 $d_G(u), \xi_G(u), N_G(U)$ 和 $\mathrm{dist}_G(u,v)$ 中的下标 G 略去. 书中未予定义而直接使用的无向图术语和记号可参见文献 [16].

1.3 互连网络

互连网络就是计算机内部多个处理器或多个功能部件由开关元件按照一定的拓扑结构和控制方式相互连接的网络. 互连网络的拓扑结构是互连网络的主要结构特性. 从图论的角度来看, 互连网络的拓扑结构可以用图来表示, 图的顶点表示系统中的元件, 图的边表示元件之间的通信链路, 而关联函数指定了元件之间的连接方式. 反之, 图也可以看成是某个互连网络的拓扑结构. 从拓扑上讲, 图和互连网络是等价的. 在本书中, 我们将不区分“图”和“互连网络”, 将网络、元件和连线分别说成图、顶点和边, 反之亦然.

迄今, 人们已经提出了很多互连网络. 互连网络按几何形状分为两大类: 规则互连网络和不规则互连网络. 规则互连网络又分为动态网和静态网两种. 如图 1.1 所示.

动态互连网络, 其输入和输出间的连接关系是可变的, 由其互连的结点之间的连接关系也是可变的. 一般动态互连网络由物理上都是集中的单级或多级开关网络构成. 由于物理上的集中和控制上的相对复杂, 使得这种网络的可扩展性较差, 只适用于结点数不多的规模不大的系统互连. 常见的动态网络拓扑结构有: 蝶形网 (Butterfly Network)、洗牌交换网 (Shuffle-Exchange Network)、交叉开关网 (Crossbar Switch Network)、Benes 网、STARAN 网、数据交换网等.