The Magic of Math

Arthur Benjamin

The Magic of Math

Arthur Benjamin

12堂魔力数学课

[美] 阿瑟·本杰明——著

胡小锐——译

中信出版集团·北京

图书在版编目（CIP）数据

12 堂魔力数学课 /（美）阿瑟 · 本杰明著；胡小锐译. -- 北京：中信出版社，2017.6

书名原文：The Magic of Math

ISBN 978-7-5086-7448-3

I. ① 1… II. ①阿…②胡… III. ①数学－普及读物 IV. ①O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 081491 号

The Magic of Math: Solving for *x* and Figuring out Why

by Arthur Benjamin
Copyright © 2015 by Arthur Benjamin

Simplified Chinese translation copyright © 2017 by CITIC Press Corporation

Published by arrangement with Basic Books,an imprint of Perseus Books, LLC,

a subsidiary of Hachette Book Group, Inc., New York, New York, USA.

through Bardon-Chinese Media Agency

ALL RIGHTS RESERVED

本书仅限中国大陆地区发行销售
12 堂魔力数学课

著　　者：[美] 阿瑟 · 本杰明

译　　者：胡小锐

出版发行：中信出版集团股份有限公司

（北京市朝阳区惠新东街甲 4 号富盛大厦 2 座　邮编　100029）

承 印 者：北京楠萍印刷有限公司

开　　本：880mm × 1230mm　1/32　　印　　张：12.25　　字　　数：200 千字

版　　次：2017 年 6 月第 1 版　　印　　次：2017 年 6 月第 1 次印刷

京权图字：01-2015-5768　　广告经营许可证：京朝工商广字第 8087 号

书　　号：ISBN 978-7-5086-7448-3

定　　价：49.00 元
版权所有 · 侵权必究

如有印刷、装订问题，本公司负责调换。

服务热线：400-600-8099

投稿邮箱：author@citicpub.com

引　言

一直以来，我都对魔术情有独钟。无论是观看魔术师的表演，还是我自己动手变魔术，当看到观众目瞪口呆的神情时，我都会因为魔术的神奇而心折不已。此外，我还热衷于探索魔术的奥秘。在掌握了几条简单的秘诀之后，我甚至还设计出了一些属于我自己的魔术。

我在数学方面也有类似的经历。很小的时候，我就发现数字本身具有神奇的魔力。举一个你或许会感兴趣的例子。请在心中默想一个在 20 和 100 之间的数字，想好了吗？现在，将这个数字的十位和个位相加，再用这个数字减去得到的和。然后，将得到的差的十位与个位数字相加，你得到的和是数字 9 吗？（如果不是 9，请检查前面的运算是否出错了。）有意思吧！数学中有无数类似的神奇现象，但是我们大多数人在学校里却无缘接触它们。本书将告诉读者，数字、图形和纯逻辑可以产生令人惊喜的效果。此外，只需掌握一点儿代数或几何学知识，你就会发现这些神奇现象背后的奥秘并非那么复杂，你自己甚至也有可能发现一些数学之美。

本书涉及数学领域中的数列、代数、几何学、三角学、微积分等基础科目，还涉及某些我们不常接触的内容，包括帕斯卡三角形，无穷大，9、π、e、i 等数字的神秘属性，斐波纳契数列和黄金分割等。由于受篇幅限制，本书不可能帮助你全面了解任何一个主要数学科

目，但我仍希望你在读完本书之后可以掌握主要的数学概念的含义及其作用原理，能够领略各个科目赏心悦目的雅致美感，了解它们相互之间的关联性。即使某些内容对你而言可能并不陌生，我也希望你可以换一个角度去思考、欣赏它们。随着你的数学知识不断增多，这些神奇现象将变得越发迷人。我以下面这个方程式为例：

$$e^{i\pi}+1=0$$

这是我最喜爱的方程式之一。有人称它为“上帝的方程式”，因为这个神奇的方程式使用了数学中最重要的一些数字。具体来说，方程式中的 0 和 1 是算术的基础，$\pi=3.141\,59\cdots$是几何学中最重要的数字，$e=2.718\,28\cdots$ 是微积分中最重要的数字，i是-1 的一个平方根。我们将在本书第 8 章中详细介绍数字 π，在第 10 章中详细介绍数字i和e，在第 11 章中我们将解释这个神奇方程式的数学含义。

本书适用的阅读对象是将要或正在学习或已经学完某种数学课程的人。换言之，我希望所有人（包括有数学恐惧症的人和热爱数学的人）都能读读这本书。为方便大家阅读本书，我特意制定了若干规则。

规则 1：灰色方框里的内容可以跳过不读（本段文字除外）!

每个章节都有一些“延伸阅读”，涉及与当前阐述主题关系不大却值得关注的内容。在每个方框中，我可能会针对当前内容再举一例，或者给出某个证明过程，或者稍加深入讲解，以满足求知欲较强的读者。第一次阅读本书时，你可能希望略过这些内容（在第二次、第三次阅读时，你可能仍然希望略过）。我希望你不要只读一遍就把这本书扔到一边，毕竟，数学知识值得我们反复咀嚼。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

规则 2：阅读本书的过程中你尽可以略过某些段落、章节。除了可以不读灰色方框里的内容，在阅读过程中当你遇到“拦路虎”时，也尽可以略过。对于有的内容而言，你必须形成自己的认识，才能全面地掌握。有的难题则可以暂时放下，一段时间之后，当你重新考虑这个问题时，也许会惊奇地发现难题已经迎刃而解了。因此，你一定要坚持读完这本书，如果半途而废，就会遗憾地错过大量精彩的内容。

规则 3：本书最后一章你非读不可。最后一章介绍的是数学中的无穷大，其中有许多你在学校里可能学不到的精彩内容，而且不要求你必须先阅读前面的章节。不过，我在这一章里提到的很多观点与概念在前面的章节里都出现过，因此阅读第 12 章可能会激励你回顾前面章节的内容。

规则 π：做好迎接惊喜的心理准备。尽管数学是一门严肃的重要学科，但这并不意味着数学教学工作必须一本正经、枯燥无味。作为美国哈维穆德学院的一名数学老师，为了活跃课堂气氛，我在上课时偶尔会讲笑话、朗诵诗歌、唱歌或者表演魔术。我在创作本书的过程中，也经常使用这些手段。不过，这不是在我的课堂上，因此我就不唱歌了。（恭喜你的耳朵逃过一劫！）

请记住这些规则，然后跟我一起去领略数学的神奇！

目 录

第1章

数字之舞

$$1+2+3+4+\cdots+100=5\ 050$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

数字的美妙规律

数学学习始于数字。在我们学会数数，以及利用文字、数字和实物来表示数的概念之后，学校老师就会教我们通过加、减、乘、除等运算程序摆弄这些数字，而且这个过程会持续多年。但是，我们往往不会注意到这些数字本身就具有某些神奇的魔力，稍加研究，便会给我们带来无穷的乐趣。

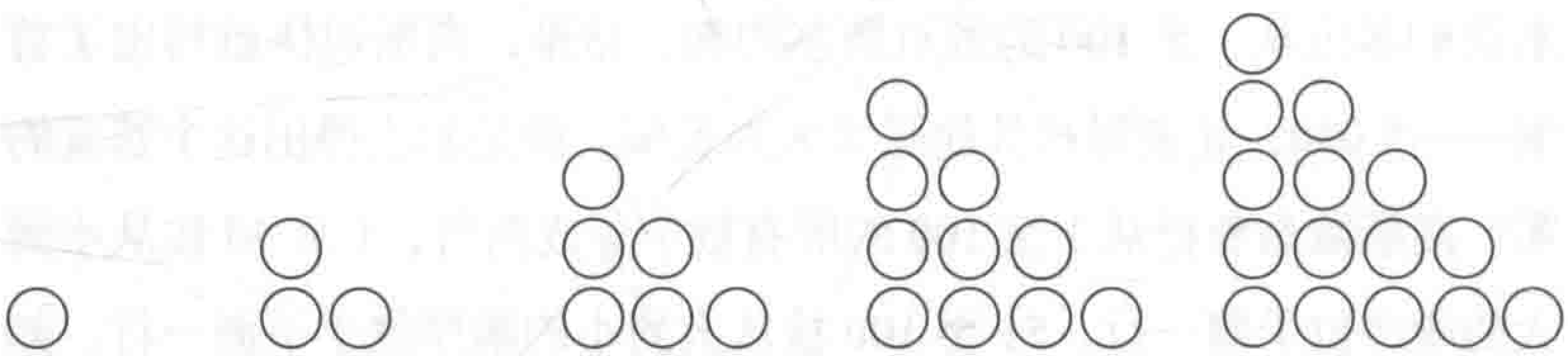
以数学家卡尔·弗里德里希·高斯（Karl Friedrich Gauss）小时候遇到的一个问题为例。一天，为了在自己处理其他事务时也让学生们有事可做，高斯的老师给全班同学布置了一个繁重的计算任务，要求他们求出从 1 至 100 的所有数字的和。结果，高斯很快就写出了答案——5 050，让老师和其他同学大为震惊。他是怎么得出这个答案的呢？高斯默想着把从 1 至 100 的所有数字分成两行，1 至 50 按从小到大的顺序位于第一行，51 至 100 按从大到小的顺序位于下面一行，如下图所示。高斯发现，每一列的两个数字的和都等于 101，因此所有数字的总和就是 50 × 101，等于 5 050。

1	2	3	4	…	47	48	49	50
+ 100	+ 99	+ 98	+ 97	…	+ 54	+ 53	+ 52	+ 51
101	101	101	101	…	101	101	101	101

将 1~100 的数字分为两行，每一列的两个数字的和都为 101

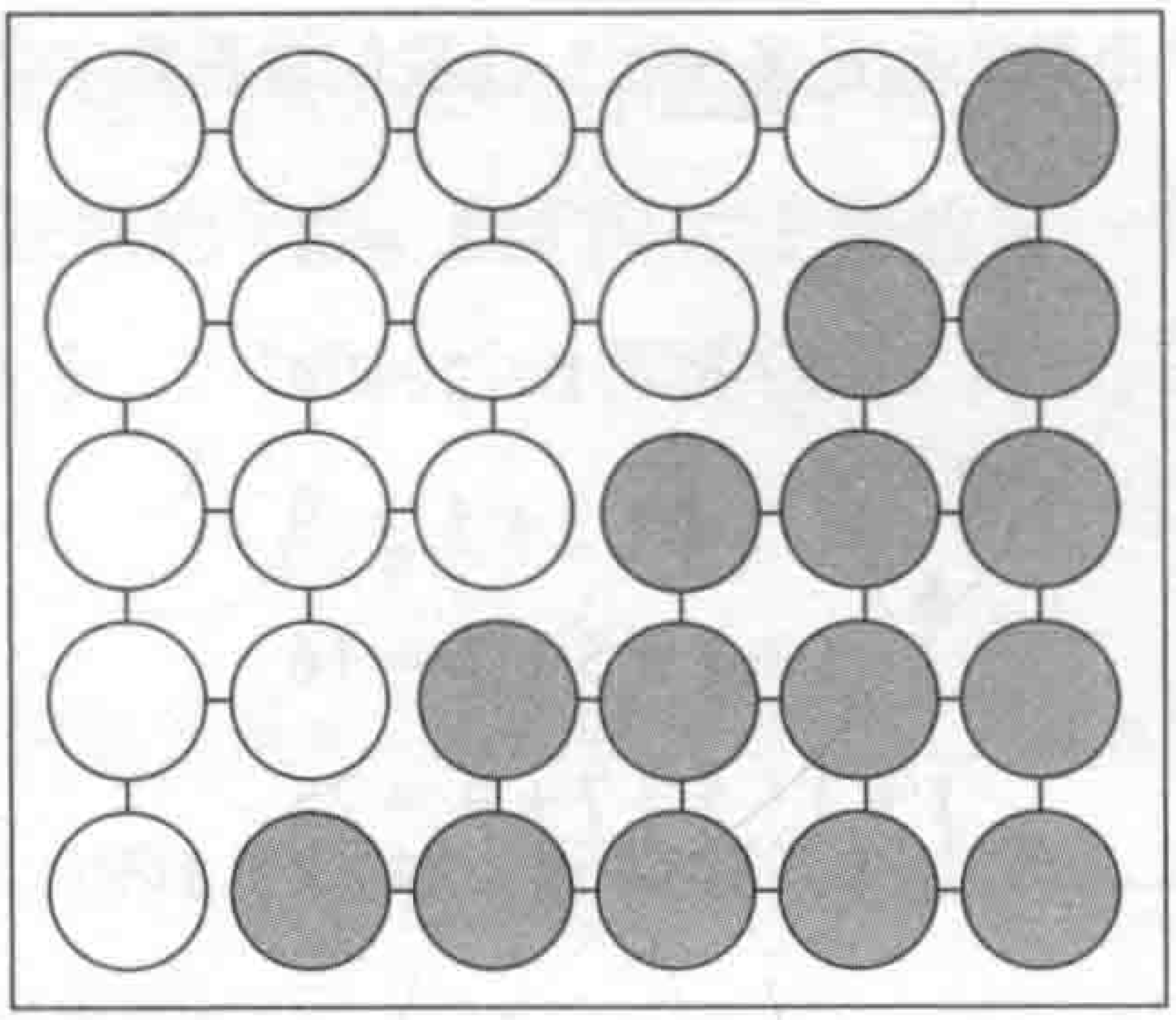
后来，高斯成了 19 世纪最伟大的数学家，这并不是因为他善于心算，而是因为他可以让数字展现出优美的舞姿。我们将在本章探讨很多有趣的数字规律，以了解数字是如何跳出美丽的舞蹈的。其中，有的规律可以帮助我们提高心算的速度，有的则会给我们带来美的享受。

我们在前文中用高斯的方法计算了前 100 个数字的和，如果我们需要计算前 17 个、1 000 个或者 100 万个数字的和，该怎么办呢？事实上，我们可以利用高斯的方法，计算前 n 个数字的和，n 可以取任意值。有人可能会觉得数字过于抽象，那么我们可以结合图形来表示这个过程。如下图所示，由于 1、3、6、10 和 15 等数字可以用相应个数的小圆圈表示，这些小圆圈又可以排列成三角形，因此我们把这些数字称作“三角形数”（triangular number）。（也许你认为一个圆圈无法构成一个三角形，但 1 还是被视为三角形数。）根据三角形数的定义，第 n 个三角形数为 $1 + 2 + 3 + \cdots + n$。



前 5 个三角形数是 1、3、6、10 和 15

请注意观察，如果把两个三角形并排放置，如下图所示，会出现什么样的结果呢？



在这个矩形中，一共有多少个小圆圈？

这个由两个三角形构成的矩形共包含 5 行和 6 列小圆圈，总数为 30 个。因此，每个三角形所包含的小圆圈数应该是矩形的 1/2，也就是 15 个。当然，这个结果我们早已知道。但是，上述方法表明，如果我们把包含 n 行小圆圈的两个三角形放到一起，那么所得到的矩形包含 n 行和 $n+1$ 列小圆圈，也就是 $n\times(n+1)$ 个［通常简写为 $n(n+1)$ 个］。于是，前 n 个数字的求和公式就这样被推导出来了：

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

请大家回想一下这个推导过程。通过求前 100 个数字的和，我们找出一个规律，然后加以推广，就可以处理同一类型的所有问题。如果要求从 1 至 100 万的所有数字的和，只需两步就可完成：1 000 000 乘以 1 000 001，再除以 2！

一旦你找到了一个数学公式，其他公式常常会自动地出现在你的眼前。例如，如果我们把上述方程式的两边同时乘以 2，就会得出前 n 个偶数的求和公式：

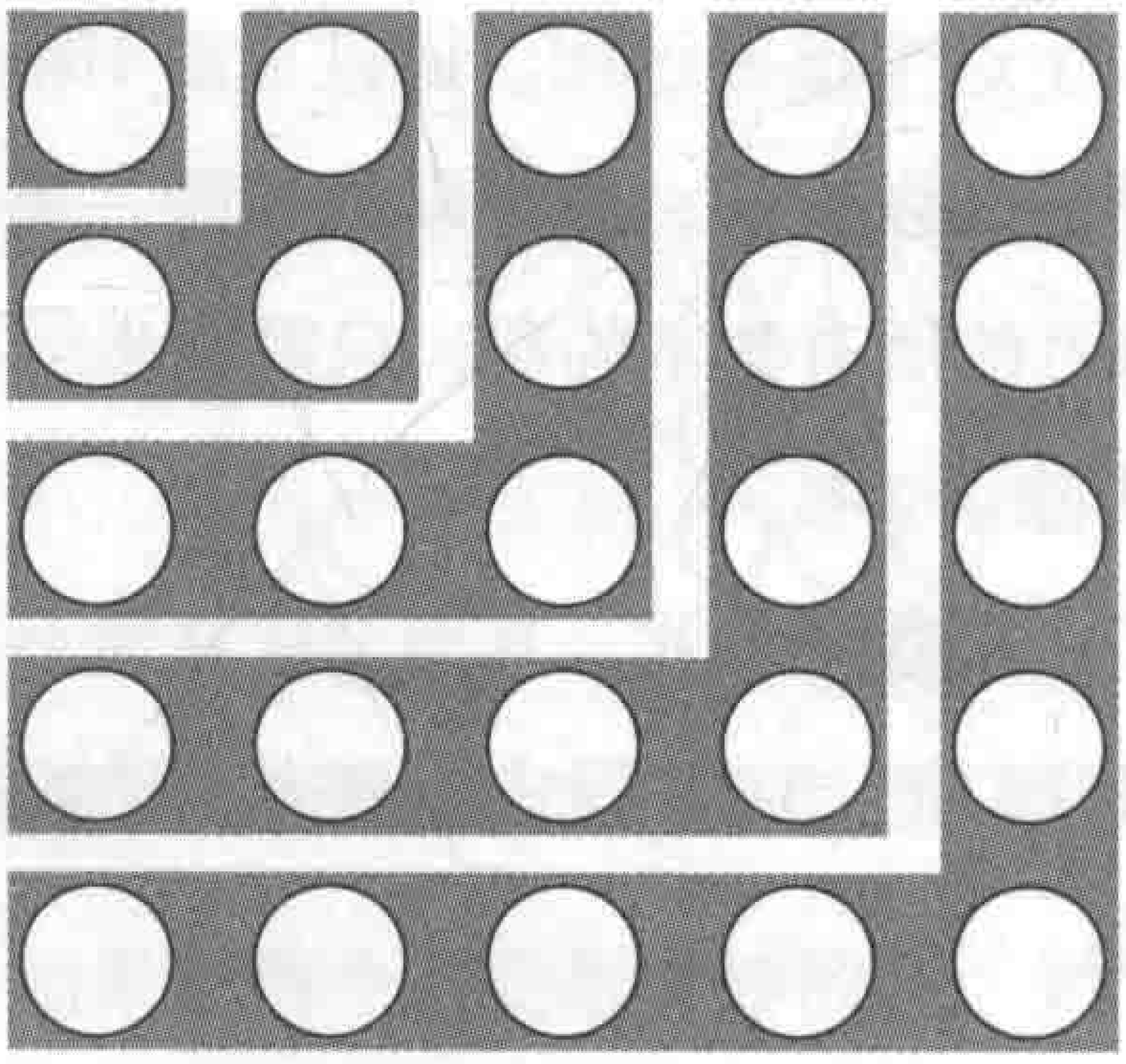
$$2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$$

那么，前n个奇数的和是多少呢？让我们看看数字会给我们哪些提示。

$$1 = 1$$
$$1+3 = 4$$
$$1+3+5 = 9$$
$$1+3+5+7 = 16$$
$$1+3+5+7+9 = 25$$
$$\cdots$$

前n个奇数的和是多少？

等号右边的数字都是“完全平方数”（perfect squares）：1×1，2×2，3×3，等等。不难看出，前n个奇数的和似乎是$n \times n$，记作n^2。但是，如何确定这个结果不是一种暂时性的巧合呢？我们将在第 6 章通过几种方法来推导出这个公式。不过，我们应该可以找到一个非常简单的方法，解释这个并不复杂的规律。我最喜欢使用的证明方法仍然是计算小圆圈的个数，这个方法还会告诉我们像 25 这样的数字为什么又叫完全平方数。前 5 个奇数的和为什么是 5^2 呢？看看下图中边长为 5 的正方形，你就知道了。



正方形中共包含多少个小圆圈？

这个正方形共包含 $5 \times 5=25$ 个小圆圈。接下来，我们换一种方法来数上图中的小圆圈的个数。我们从左上角的第一个小圆圈开始数，它依次被 3 个、5 个、7 个和 9 个小圆圈包围，即：

$$1+3+5+7+9=5^2$$

如果正方形的边长是 n，我们就可以把它分成 n 个大小分别是 1，3，5，…，$(2n-1)$ 的 L 形区域（开口朝向左上角）。于是，我们得出前 n 个奇数的求和公式：

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

延伸阅读

我们将在本书后面的章节中看到，高等数学可以利用这种统计小圆圈个数的方法（以及通过两种不同方法回答一个问题的常规做法），得出一些非常有意思的结果。不过，我们也可以借助这种方法去理解初等数学，例如，为什么 $3 \times 5=5 \times 3$。小时候，老师告诉我们，因数的先后次序不会影响乘积的大小（这在数学领域被称为乘法交换律）。我相信，你们当时根本没有怀疑它的准确性。但是，每袋装 5 枚弹珠、共 3 袋，和每袋装 3 枚弹珠、共 5 袋，弹珠的总数为什么一样多呢？数一数 3×5 的矩形中小圆圈的个数，就能理解其中的道理了。按行统计，我们看到一共有 3 行，每行有 5 个小圆圈，所以小圆圈的个数是 3×5。但是，如果按列计算，那么一共有 5 列，每列 3 个小圆圈，因此小圆圈的个数是 5×3。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com