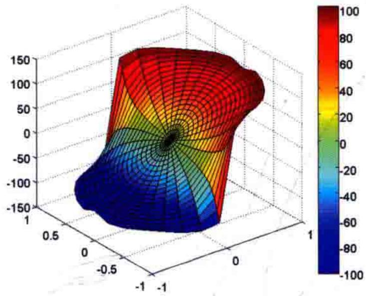
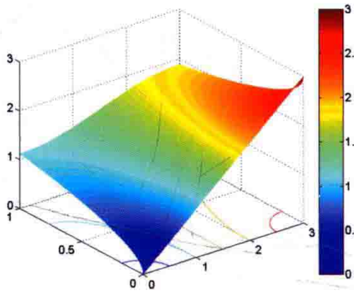
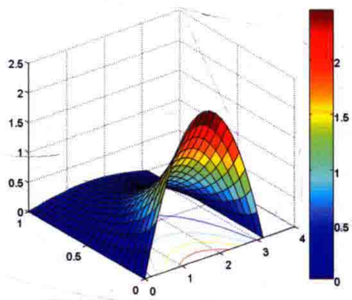

数学物理方程与特殊函数
学习辅导与习题解答

童孝忠　孙　娅　编著

中南大學出版社
www.csupress.com.cn

数学物理方程与特殊函数学习辅导与习题解答

童孝忠　孙　娅　编著

中南大學出版社
www.csupress.com.cn
·长　沙·

图书在版编目(CIP)数据

数学物理方程与特殊函数学习辅导与习题解答 / 童孝忠，孙娅编著. --长沙：中南大学出版社，2017.9

ISBN 978－7－5487－3012－5

Ⅰ.①数… Ⅱ.①童… ②孙… Ⅲ.①数学物理方程－教学参考资料 ②特殊函数－数学参考资料 Ⅳ.①O411.1 ②O174.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 241787 号

数学物理方程与特殊函数学习辅导与习题解答

SHUXUE WULI FANGCHENG YU TESHU HANSHU XUEXI FUDAO YU XITI JIEDA

童孝忠　孙　娅　编著

□**责任编辑**　刘小沛

□**责任印制**　易红卫

□**出版发行**　中南大学出版社

社址：长沙市麓山南路　　邮编：410083

发行科电话：0731－88876770　　传真：0731－88710482

□**印　　装**　长沙市宏发印刷有限公司

□**开　　本**　787×1092　1/16　□**印张** 15.5　□**字数** 380 千字

□**版　　次**　2017 年 9 月第 1 版　□2017 年 9 月第 1 次印刷

□**书　　号**　ISBN 978－7－5487－3012－5

□**定　　价**　45.00 元

内容简介

本书是《数学物理方程与特殊函数(地球物理类)》配套的学习辅导书，同时也有很强的独立性。全书共分10章：第1章对学习数学物理方程所需的常微分方程和傅里叶级数作了概要介绍；第2章至第10章是典型方程与定解条件、分离变量法、波动方程的行波法、积分变换法、格林函数法、有限差分法、有限单元法、贝塞尔函数和勒让德函数的内容要点、例题分析与习题解答。阅读本书，可以帮助学生学习数学物理方程与特殊函数中各类定解问题的解题方法和技巧，了解各种丰富多彩的题型，从而加深对这门课程的理解和掌握。

本书可作为工科专业本科生或研究生学习数学物理方程与特殊函数课程的辅导书，也可作为相关教师和科研人员的参考用书。

前 言

随着科学技术的飞速发展，各种数学方法的应用越来越广泛。在地球科学领域，数学物理方程理论已经成为必须掌握的基础知识。数学物理方程的研究对象为具有应用背景的偏微分方程，是一门综合性、应用性非常强的基础课程，其特点是有机地结合了数学理论、方法与实际应用。

“数学物理方程与特殊函数”是大家公认的一门难教难学的数学基础课程，其核心内容是偏微分方程。在学习该课程的过程中，学生普遍感觉做习题是一件困难的事情。偏微分方程的习题求解，一方面计算量大，容易出错；另一方面涉及面广，难度大，技巧性强。因此，编写一本该课程的学习辅导和习题解答参考书，供同学们学习时配套使用，是非常必要的。但是需要指出的是，我们不主张学生在自己动手做题之前先看答案或解答过程。为了学好数学物理方程与特殊函数这门课程，学生应该独立地完成教师布置的作业，不能抄袭本书的解答，本书仅供学习时参考。同时，一个数学物理方程的定解问题通常具有多种求解方法，千万不要受本书中解答方法的束缚。

全书共分10章。第1章简要介绍了学习数学物理方程所需的常微分方程和傅里叶级数方面的基础知识。第2章至第8章是求解定解问题的方法，包括分离变量法、行波法、积分变换法、格林函数法、有限差分法和有限单元法。第9章和第10章是贝塞尔方程和勒让德方程的解法，以及两类特殊函数在分离变量法中的应用。每章分为内容要点、例题分析和习题解答。内容要点是相关内容的精讲，供学生复习参考之用；本书提供了童孝忠编著的《数学物理方程与特殊函数(地球物理类)》(中南大学出版社，2017年出版)中绝大部分例题和全部习题的解答，供使用该教材的学生和老师参考。同时，实现了数学物理方程与Matlab程序设计相结合，采用当前最流行的数学软件Matlab实现了偏微分方程计算结果的可视化，并编写了数值近似算法的Matlab程序。书中所有程序均在计算机上经过调试和运行，简洁而不乏

准确。

本书可作为工科专业本科生和研究生学习“数学物理方程与特殊函数”课程的学习辅导书，也可作为科研和工程技术人员的参考用书。读者需要具备微积分、线性代数、常微分方程和 Matlab 语言方面的基础知识。书中有关的 Matlab 程序代码以及教材使用中的问题可以通过作者主页 http：//faculty. csu. edu. cn/xztong 或电子邮箱 csumaysnow@ csu. edu. cn 与作者联系。

在本书编写过程中，中南大学的严家斌老师给予了大力支持并提出了完善结构、体系方面的建议；中南大学的佟铁钢老师对本书的写作纲要提出了具体的补充与调整建议并予以鼓励。同时，特别感谢中国海洋大学的刘颖老师提出的宝贵意见及与其有益的讨论。

本书的初衷是帮助学习“数学物理方程与特殊函数”的同学学好这门比较难学的课程，同时也给讲授该课程的老师们提供一些有益的参考。但由于笔者水平有限，加上时间仓促，书中难免出现不妥之处，敬请读者批评指正。

童孝忠

2017 年 9 月于岳麓山

目 录

第 1 章 基础知识

"数学物理方程与特殊函数"是大家公认的一门难教难学的数学基础课程，原因之一就是它要用到其他数学分支中的一些知识，如常微分方程、积分学中的一些公式与方法、傅里叶级数理论、复变函数、积分变换等。为了便于读者复习，在这一章我们将对常微分方程和傅里叶级数作一个概要的描述。

1.1 二阶常系数线性微分方程的解法

1.1.1 二阶常系数齐次线性微分方程

二阶常系数齐次线性微分方程的一般形式为

$$y''+py'+qy=0$$

其中 p、q 是常数。

若 $y=\mathrm{e}^{rx}$ 是方程 $y''+py'+qy=0$ 的解，将它代入方程得

$$(r^2+pr+q)\mathrm{e}^{rx}=0$$

由于 $\mathrm{e}^{rx}\neq0$，所以

$$r^2+pr+q=0$$

上述代数方程叫做微分方程的特征方程(或本征方程)，它的两个根是

$$r_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

与它们对应的两个函数 $y_1(x)=\mathrm{e}^{r_1x}$ 与 $y_2(x)=\mathrm{e}^{r_2x}$ 必是微分方程的解。现在的问题是：这两个函数能否构成微分方程的通解？或者说，$y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是否线性无关？下面分三种情况来说明：

(1) 当 $p^2-4q>0$ 时，r_1、r_2 是两个不相等的实根：

$$r_1=\frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2},\ r_2=\frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

由于 $\frac{\mathrm{e}^{r_1x}}{\mathrm{e}^{r_2x}}=\mathrm{e}^{(r_1-r_2)x}\neq$ 常数，因此微分方程的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x}$$

(2) 当 $p^2-4q=0$ 时，r_1、r_2 是两个相等的实根：

$$r_1=r_2=-\frac{p}{2}$$

对应微分方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{r_1x}$$

(3) 当 $p^2-4q<0$ 时，特征方程有一对共轭复根：

$$r_1=\alpha+\mathrm{i}\beta,\ r_2=\alpha-\mathrm{i}\beta$$

对应微分方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$$

例 1.1 求微分方程 $y''-2y'-3y=0$ 的通解。

解 所给微分方程的特征方程为

$$r^2-2r-3=0$$

它有两个不相等的实根 $r_1=-1$，$r_2=3$，因此所求通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{3x}$$

例 1.2 求微分方程 $y''-2y'+5y=0$ 的通解。

解 所给微分方程的特征方程为

$$r^2-2r+5=0$$

它有一对共轭复根 $r_1=1+2\mathrm{i}$，$r_2=1-2\mathrm{i}$，因此所求通解为

$$y=\mathrm{e}^{x}(C_1\cos2x+C_2\sin2x)$$

例 1.3 求微分方程 $y''-4y'+4y=0$ 的通解。

解 所给微分方程的特征方程为

$$r^2-4r+4=0$$

它有两个相等的实根 $r_1=r_2=2$，因此所求通解为

$$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{2x}$$

1.1.2 二阶常系数非齐次线性微分方程

二阶常系数非齐次线性微分方程的一般形式为

$$y''+py'+qy=f(x)$$

其中 p、q 是常数。

求二阶常系数非齐次线性微分方程的通解，归结为求对应的齐次方程

$$y''+py'+qy=0$$

的通解和非齐次方程本身的一个特解。由于二阶常系数齐次线性微分方程的通解的求法已在上节得到解决，所以这里只需讨论求非齐次方程的一个特解 y^* 的方法。这里，我们只介绍比较系数法。

1. $f(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}P_m(x)$ 型

若非齐次项的形式为 $f(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}P_m(x)$，则二阶常系数非齐次线性微分方程的特解为

$$y^*=x^kQ_m(x)\mathrm{e}^{\lambda x}$$

其中 $Q_m(x)$ 是与 $P_m(x)$ 同次（m 次）的多项式，而 k 按 λ 不是特征方程的根、是特征方程的单根或是特征方程的重根依次取为 0、1 或 2。

例 1.4 求微分方程 $y''-2y'-3y=3x+1$ 的通解。

解 这是二阶常系数非齐次线性微分方程，它的非齐次项 $f(x)$ 是 $\mathrm{e}^{\lambda x}P_m(x)$ 型，且 $P_m(x)=3x+1$，$\lambda=0$。

所给微分方程对应的齐次方程为

$$y''-2y'-3y=0$$

它的特征方程为

$$r^2-2r-3=0$$

它有两个不相等的实根 $r_1=-1$，$r_2=3$，因此对应齐次微分方程的通解为

$$Y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{3x}$$

由于这里 $\lambda=0$ 不是特征方程的根，所以应设特解为

$$y^*=Ax+B$$

把它代入非齐次微分方程，得

$$-3Ax-2A-3B=3x+1$$

比较两端 x 同次幂的系数，得

$$\begin{cases}-3A=3\\-2A-3B=1\end{cases}$$

由此求得 $A=-1$，$B=1/3$，于是求得一个特解为

$$y^*=-x+\frac{1}{3}$$

从而所求的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{3x}-x+\frac{1}{3}$$

例 1.5 求微分方程 $y''-5y'+6y=x\mathrm{e}^{2x}$ 的通解。

解 这是二阶常系数非齐次线性微分方程，它的非齐次项 $f(x)$ 是 $\mathrm{e}^{\lambda x}P_m(x)$ 型，且 $P_m(x)=x$，$\lambda=2$。

所给微分方程对应的齐次方程为

$$y''-5y'+6y=0$$

它的特征方程为

$$r^2-5r+6=0$$

它有两个不相等的实根 $r_1=2$，$r_2=3$，因此对应齐次微分方程的通解为

$$Y=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{3x}$$

由于这里 $\lambda=2$ 不是特征方程的单根，所以应设特解为

$$y^*=x(Ax+B)\mathrm{e}^{2x}$$

把它代入非齐次微分方程，得

$$-2Ax+2A-B=x$$

比较两端 x 同次幂的系数，得

$$\begin{cases}-2A=1\\2A-B=0\end{cases}$$

由此求得 $A=-1/2$，$B=-1$，于是求得一个特解为

$$y^*=x\left(-\frac{1}{2}x-1\right)\mathrm{e}^{2x}$$

从而所求的通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{3x}-\frac{1}{2}(x^2+2x)\mathrm{e}^{2x}$$

2. $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$型

若非齐次项的形式为$f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$，则二阶常系数非齐次线性微分方程的特解为

$$y^*=x^k e^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x]$$

其中 $R_m^{(1)}(x)$与 $R_m^{(2)}(x)$是 m 次多项式，$m=\max\{l, n\}$，而 k 按 $\lambda+i\omega$(或 $\lambda-i\omega$)不是特征方程的根或是特征方程的单根依次取为 0 或 1。

例 1.6 求微分方程 $y''+y=x\cos 2x$ 的一个特解。

解 这是二阶常系数非齐次线性微分方程。

它的非齐次项是$f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$型，且 $\lambda=0$，$\omega=2$，$P_l(x)=x$，$P_n(x)=0$。

所给微分方程对应的齐次方程为

$$y''+y=0$$

它的特征方程为

$$r^2+1=0$$

由于这里 $\lambda+i\omega=2i$ 不是特征方程的单根，所以应设特解为

$$y^*=(Ax+B)\cos 2x+(Cx+D)\sin 2x$$

把它代入非齐次微分方程，得

$$(-3Ax-3B+4C)\cos 2x-(3Cx+3D+4A)\sin 2x=x\cos 2x$$

比较两端同类项的系数，得

$$\begin{cases}-3A=1\\-3B+4C=0\\-3C=0\\-3D-4A=0\end{cases}$$

由此求得 $A=-1/3$，$B=0$，$C=0$，$D=4/9$，于是求得一个特解为

$$y^*=-\frac{1}{3}x\cos 2x+\frac{4}{9}\sin 2x$$

1.2 傅里叶级数

1.2.1 三角函数系的正交性

所谓三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$$

在区间$[-\pi, \pi]$上正交，就是指在三角函数系中任何不同的两个函数的乘积在区间$[-\pi, \pi]$上的积分等于零，即

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x=0, n=1, 2, 3, \cdots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x=0, n=1, 2, 3, \cdots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx \mathrm{d}x = 0,\ k,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx \mathrm{d}x = 0,\ k,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ k \neq n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx \mathrm{d}x = 0,\ k,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ k \neq n$$

以上等式，都可以通过计算定积分来验证。

在三角函数系中，两个相同函数的乘积在区间上的积分不等于零，即

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 \mathrm{d}x = 2\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \mathrm{d}x = \pi,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \mathrm{d}x = \pi,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

1.2.2 函数展开成傅里叶级数

设函数 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，则 $f(x)$ 的傅里叶级数为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

其中，

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{d}x \\ a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \mathrm{d}x,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots \\ b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \mathrm{d}x,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots \end{cases}$$

这里的系数 a_0，a_1，b_1，$\cdots$ 叫作函数 $f(x)$ 的傅里叶系数。

例 1.7 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在区间 $[-\pi,\ \pi]$ 上的表达式为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leqslant x \leqslant 0 \\ x, & 0 < x \leqslant \pi \end{cases}$$

将其展开成傅里叶级数。

解 据题意有

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \cos nx \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \left(\frac{x \sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2} \right) \Bigg|_0^{\pi} \\ &= \frac{\cos(n\pi) - 1}{n^2 \pi} = \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \sin nx \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \left(\frac{-x \cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} \right) \Bigg|_0^{\pi} \\ &= -\frac{\cos(n\pi)}{n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \end{aligned}$$

因此，

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

为了图示说明函数展开成傅里叶级数，我们取傅里叶级数的前4项，采用如下 Matlab 代码图示计算结果：

```
clear all;
x = [ -pi: 0.05: pi];
f = zeros(size(x));
for k = 1: length(x)
  if x(k) <0
    f(k) =0;
  else
    f(k) = x(k);
  end
end
fs = (pi/4) * ones(size(x));
for n = 1: 4
  fs = fs + (1/pi) * (( -1)^n -1) * cos(n * x)/n^2 + ( -1)^(n +1) * sin(n * x)/n;
  subplot(2, 2, n)
  plot(x, f, x, fs, 'r - -');
  xlabel('x');
  ylabel('f(x)');
  if n = =1
    legend('1 term', 'f(x)');
  else
    legend([num2str(n), 'terms'], 'f(x)');
  end
end
```

程序执行结果如图1.1所示。

例1.8 将函数

$$f(x)=|x|,\quad -\pi\leqslant x\leqslant\pi$$

展开成傅里叶级数。

解 据题意有

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}-x\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}x\mathrm{d}x\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}-x\cos nx\mathrm{d}x+\int_{0}^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x\right)$$

$$=-\frac{nx\sin nx+\cos nx}{n^2\pi}\bigg|_{-\pi}^{0}+\frac{nx\sin nx+\cos nx}{n^2\pi}\bigg|_{0}^{\pi}$$

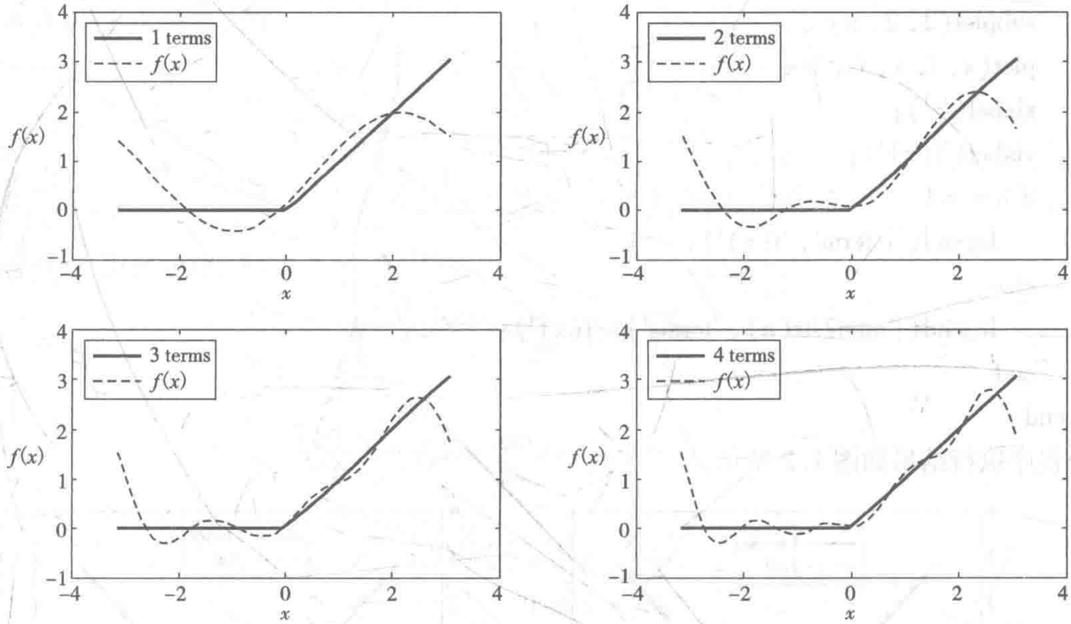

图 1.1 函数展开成傅里叶级数的结果图

$$= \frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n - 1]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} - x\sin nx\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} x\sin nx\mathrm{d}x\right)$$

$$= \left.\frac{nx\cos nx - \sin nx}{n^2\pi}\right|_{-\pi}^{0} - \left.\frac{nx\cos nx - \sin nx}{n^2\pi}\right|_{0}^{\pi}$$

$$= 0$$

因此，

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n - 1]\cos nx$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

这样就将函数展开成了傅里叶级数，我们取傅里叶级数的前 4 项，采用如下 Matlab 代码图示计算结果：

```
clear all;
x = [ -pi: 0.05: pi];
f = zeros(size(x));
for k = 1: length(x)
   f(k) = abs(x(k));
end
fs = (pi/2) * ones(size(x));
for n = 1: 4
   fs = fs + (2/(n * n * pi)) * ((-1)^n - 1) * cos(n * x);
```

```
    subplot(2, 2, n)
    plot(x, f, x, fs, 'r--');
    xlabel('x');
    ylabel('f(x)');
    if n==1
        legend('1 term', 'f(x)');
    else
        legend([num2str(n), 'terms'], 'f(x)');
    end
end
```

程序执行结果如图 1.2 所示。

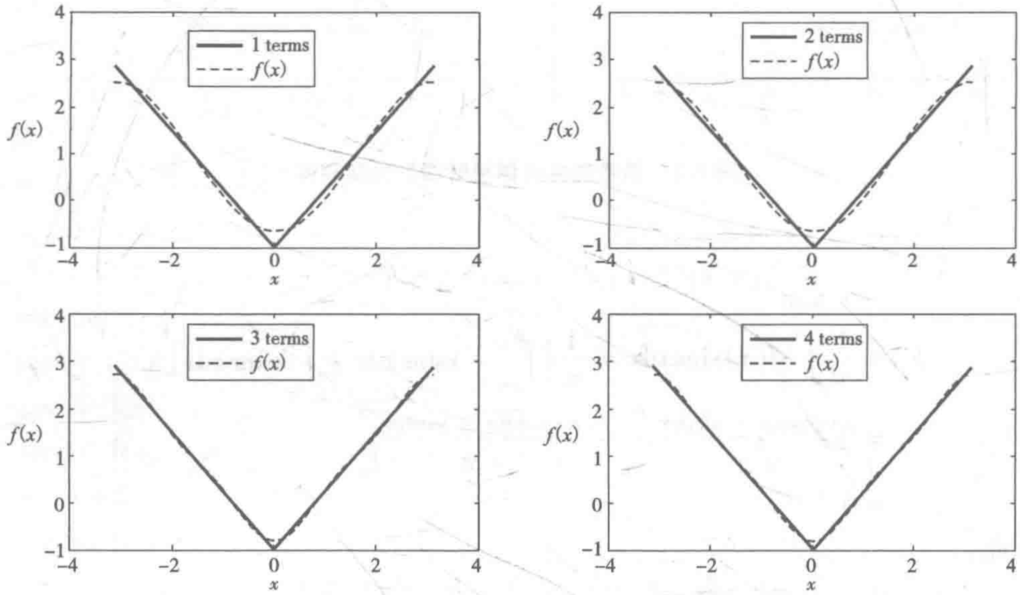

图 1.2　函数 $f(x)=|x|$ 展开成傅里叶级数的结果图

1.2.3　一般周期函数的傅里叶级数

设函数 $f(x)$ 是周期为 $2L$ 的周期函数，则 $f(x)$ 的傅里叶级数为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{L}x+b_n\sin\frac{n\pi}{L}x\right)$$

其中，

$$\begin{cases}a_0=\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L}f(x)\,\mathrm{d}x\\ a_n=\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x,\ n=1,2,3,\cdots\\ b_n=\dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\mathrm{d}x,\ n=1,2,3,\cdots\end{cases}$$