考研金榜题名名师辅导教材系列

金榜考研命题研究中心　编

线性代数8讲

一本与考研成功线性相关的讲义

分析精讲 紧循考试大纲　　典型例题 直击考研重点

一题多解 提升应试技巧　　讲练结合 理清复习思路

扫描二维码可获赠V研客

免费课时、在线答疑、精美课件

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

考研金榜 材系列

线性代数8讲

金榜考研命题研究中心◎编

本书专属：

Where there is a will, there is a way.

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

内容简介

本书是编者根据多年来的教学体会精心编写的，共分八讲，具体内容包括行列式、矩阵、向量、线性方程组求解、线性方程组解的结构、特征值与特征向量、矩阵的相似、二次型。每一讲均由内容精讲、典型例题 、练习题三部分组成。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 8 讲 / 金榜考研命题研究中心 编.
—北京：机械工业出版社，2016.8
考研金榜题名名师辅导教材系列
ISBN 978－7－111－54463－0

Ⅰ.①线… Ⅱ.①金… Ⅲ.①线性代数－研究生－入学考试－自学参考资料 Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 179497 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号邮政编码 100037)
策划编辑：丁诚　责任校对：丁诚
责任编辑：丁诚　杨洋
责任印制：李飞
北京铭成印刷有限公司印刷
2017 年 3 月第 1 版・第 1 次印刷
184mm×260mm・ 9.75 印张・234 千字
0001—3000 册
标准书号：ISBN 978－7－111－54463－0
定价：29.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务
服务咨询热线：(010)88361066
读者购书热线：(010)68326294
(010)88379203

网络服务
机工官网：www.cmpbook.com
机工官博：weibo.com/cmp1952
教育服务网：www.cmpedu.com
金书网：www.golden-book.com

前 言

线性代数是全国硕士研究生入学统一考试数学考试中必考的内容，从历年考试的情况看，很多考生对线性代数知识掌握得不太扎实，甚至没有弄清楚其中很多基本原理。为帮助考生们在短时间内熟练掌握线性代数知识，准确理解考试大纲中的知识点，全面提高解题能力和应试水平，编者根据多年来的教学体会精心编写了本书，希望真正帮助考生们提高综合分析和综合解题能力。

本书共分八讲，每一讲均由内容精讲、典型例题、练习题三部分组成 。

1. **内容精讲**　该模块对大纲中涉及的所有知识点进行了细致的讲解，同时对不同章节的知识点的内部联系也进行了分析归纳，给考生呈现了一个清晰、完备的逻辑知识体系。

2. **典型例题**　对常考题型进行科学分类，并且精选例题进行详解，帮助考生举一反三，掌握同类题型的解题方法与技巧。

3. **练习题**　精选了适量习题，帮助考生们查漏补缺，提高做题技巧。

另外，题后附有点评与评注，其目的在于帮助考生们弄清重点、难点、知识结合点以及解题的基本方法和应注意的问题。

希望本书能对考生们的复习备考有所帮助，由于编者水平有限，疏漏之处在所难免，欢迎批评指正。

编者

目 录

第 1 讲　行　列　式

1.1　二阶、三阶行列式

定义 1　记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$称为二阶行列式，它代表一个算式，等于代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，其中 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为二阶行列式的元素，横排的称为行，纵排的称为列.

将左上角元素到右下角元素的连线称为主对角线，右上角到左下角元素的连线称为次对角线，行列式的值即主对角线两个元素的乘积减次对角线两个元素的乘积，它是二阶行列式的计算公式，这种计算方法叫作对角线法则，$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 也叫作二阶行列式的展开式.

定义 2　记号$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$称为三阶行列式，它表示代数和

$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$.

1.2　逆序数

定义 3　在一个排列中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，那么它们就称为一个逆序. 一个排列中逆序的总数就称为这个排列的逆序数. 用 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$表示 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

如果一个排列的逆序数为偶数，则称这个排列为偶排列；否则为奇排列.

如 2431 中，21，43，41，31 是逆序，逆序数是 4，为偶排列.

1.3　n 阶行列式的定义

由 n^2 个数组成的 n 阶行列式等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积的代数和，即

$$\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

记作 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

简记作 $\det(a_{ij})$. 数 a_{ij} 称为行列式 $\det(a_{ij})$ 的元素，其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，τ 为这个排列的逆序数.

1.4 n 阶行列式的性质

性质 1 行列式 D 与它的转置行列式 D^{T} 相等.

如 $D=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 9 \end{vmatrix}$, $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$.

注意：性质 1 说明行列式中行与列的地位是相同的，所以凡对行成立的性质，对列也同样成立.

性质 2 交换行列式的两行(或两列)，行列式改变符号. 记作 $r_i\leftrightarrow r_j$(或 $c_i\leftrightarrow c_j$).

推论 如果一个行列式有两行(或两列)对应元素完全相等，那么这个行列式等于零.

性质 3 一个行列式的某一行(或某一列)的所有元素同乘以某一个数 k，等于以数 k 乘这个行列式. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

记作 $r_i\times k$(或 $c_j\times k$).

推论 1 一个行列式中某一行(或某一列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号外边. 记作 $r_i\div k$(或 $c_j\div k$).

推论 2 如果一个行列式中有某一行(或某一列)的元素全部是零，则这个行列式等于零.

推论 3 如果一个行列式中有某两行(或某两列)的对应元素成比例，则这个行列式等于零.

性质 4 如果行列式 D 的某一行的每一个元素都可以写成两项之和，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则此行列式等于下列两个行列式之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

注意:这个性质对于列来说也是成立的.

性质 5　如果把行列式的某一行(或列)的各元素乘以同一数后加到另一行(或列)对应的元素上去,那么行列式的值不变. 记作 r_i+kr_j(或 c_i+kc_j).

1.5 几个特殊的行列式

1. 三角形行列式

定义 4　主对角线下方的元素全为零的行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 称为上三角形行列式,反之,主对角线上方的元素全为零的行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 称为下三角形行列式. 上、下三角形行列式统称为三角形行列式.

特别地,除主对角线以外的元素全为零的行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 称为对角形行列式.

2. 转置行列式

定义 5　设 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$,把行列式 D 的行与相应的列互换后得到行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$,称为行列式 D 的转置行列式,记作 D^{T}.

3. 对称行列式与反对称行列式

定义 6　如果 n 阶行列式中第 i 行第 j 列的元素等于第 j 行第 i 列的元素,即 $a_{ij}=a_{ji}$,

则称这样的行列式为对称行列式.如果它的第 i 行第 j 列的元素等于第 j 行第 i 列的元素的相反数,即 $a_{ij}=-a_{ji}$,则称这样的行列式为反对称行列式.

1.6 行列式按行(或列)展开定理

n 阶行列式的值等于它的任何一行(列)元素,与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$|\boldsymbol{A}|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik},\quad i=1,2,\cdots,n.\quad(1.1)$$

$$|\boldsymbol{A}|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj},\quad j=1,2,\cdots,n.\,(1.1')$$

公式(1.1)称为 $|\boldsymbol{A}|$ 按第 i 行展开的展开式,公式(1.1′)称为 $|\boldsymbol{A}|$ 按第 j 列展开的展开式.

注意:关于代数余子式的概念一定要搞清楚.

在 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中划去 a_{ij} 所在的第 i 行第 j 列的元素,由剩下的元素按原来的位置排法构成的一个 $n-1$ 阶的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 a_{ij} 的**余子式**,记为 M_{ij};称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的**代数余子式**,记为 A_{ij},即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

1.7 行列式的主要公式

(1) 上(下)三角行列式的值等于主对角线元素的乘积

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(2) 关于副对角线的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}.$$

(3) 两个特殊的拉普拉斯展开式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & c_{n1} & \cdots & c_{nm} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} & b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nm} & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \\ b_{11} & \cdots & b_{1m} & c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} & c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{mn} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mm} \end{vmatrix}.$$

(4) 范德蒙德行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j).$$

(5) 特征多项式

设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 是 3 阶矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}| = \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + s_2\lambda - |\boldsymbol{A}|,$$

其中　$s_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$

1.8 克拉默法则

从三元线性方程组的解的讨论出发,对更一般的线性方程组进行探讨.

在引入克拉默法则之前,我们先介绍含有 n 个方程的 n 元线性方程组. 含有 n 个方程和 n 个未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}. \tag{1}$$

当其右端的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 不全为零时,线性方程组(1) 称为非齐次线性方程组;当 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 全为零时, 线性方程组称为齐次线性方程组,即

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases} \tag{2}$$

线性方程组的系数 a_{ij} 构成的行列式称为该方程组的系数行列式 D,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

定理 1 (克拉默法则) 如果线性方程组(1) 的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0,$$

那么,方程组有且仅有唯一解 $x_i=\dfrac{D_i}{D}(i=1,2,\cdots,n)$.

其中,D_i 是把系数行列式中第 i 列的元素换成方程组右端的常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 所得到的 n 阶行列式. 即

$$D_i=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明略.

对于三元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$,令

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

称为方程组的系数行列式，令

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

其中 D_1,D_2,D_3 是把 D 中第 1,2,3 列分别换成常数项 b_1,b_2,b_3 得到的行列式.

当系数行列式 $D\neq 0$ 时，方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},x_3=\frac{D_3}{D}.$$

典　型　例　题

题型一　数字型行列式

【例 1】　计算下列二阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -7 & -3 \end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} \lambda & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$，并求使行列式值等于零的 λ 的值.

【解】　(1) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -7 & -3 \end{vmatrix}=2\times(-3)-5\times(-7)=-6+35=29.$

(2) $\begin{vmatrix} \lambda & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=\lambda\times(-3)-3\times 4=-3\lambda-12,$

令 $\begin{vmatrix} \lambda & 3 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=0$，则 $-3\lambda-12=0$，解得 $\lambda=-4$ ，即当 $\lambda=-4$ 时行列式的值等于零.

【例 2】　求三阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 7 & -6 & 5 \end{vmatrix}$ 的值.

【解】

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 7 & -6 & 5 \end{vmatrix}&=2\times 4\times 5+1\times(-6)\times 3+7\times 1\times(-1)-\\&\quad 3\times 4\times 7-2\times 1\times(-6)-(-1)\times 1\times 5\\&=40-18-7-84+12+5=-52.\end{aligned}$$

【例 3】　计算行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$.

【解】 $$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[c_4-7c_3]{c_2-c_3} \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & -10 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 3 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{4+3} \times \begin{vmatrix} 4 & -1 & -10 \\ 1 & 2 & 2 \\ 10 & 3 & -14 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & -1 & 10 \\ 1 & 2 & -2 \\ 10 & 3 & 14 \end{vmatrix} \xlongequal[c_1+\frac{1}{2}c_3]{c_2+c_3} \begin{vmatrix} 9 & 9 & 10 \\ 0 & 0 & -2 \\ 17 & 17 & 14 \end{vmatrix} = 0.$$

【例 4】 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -7 & 9 & -5 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix}.$$

【解】 这是一个阶数不高的数值行列式,通常将它化为上(下)三角行列式来计算.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -1 \times 2(-1)(-1)(-6) = 12.$$

【例 5】 $$\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = \underline{\qquad\qquad}.$$

【解】 $$\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{按第五列展开}} (-1)^{2+5} \times 2 \times \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第一列展开}} -2\times(-1)^{1+1}\times 5\times\begin{vmatrix}3&1&2\\-4&-1&3\\2&0&5\end{vmatrix}$$

$$=-10\begin{vmatrix}3&1&2\\-4&-1&3\\2&0&5\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_1+r_2} -10\begin{vmatrix}-1&0&5\\-4&-1&3\\2&0&5\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{按第二列展开}} -10\times(-1)^{2+2}\times(-1)\times\begin{vmatrix}-1&5\\2&5\end{vmatrix}$$

$$=10\times[(-1)\times5-2\times5]=-150.$$

题型二　n 阶行列式

【例 6】 行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\2&2^2&2^3&\cdots&2^n\\3&3^2&3^3&\cdots&3^n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n^2&n^3&\cdots&n^n\end{vmatrix}=$ ________.

【答案】 $\prod\limits_{k=1}^{n}k!$

【分析】 在第 k 行提出公因子 k，再转置，直接利用范德蒙德行列式的结论得

$$D_n=2\cdot3\cdot\cdots\cdot n\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&2&2^2&\cdots&2^{n-1}\\1&3&3^2&\cdots&3^{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&n&n^2&\cdots&n^{n-1}\end{vmatrix}=n!\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&2&3&\cdots&n\\1&2^2&3^2&\cdots&n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&2^{n-1}&3^{n-1}&\cdots&n^{n-1}\end{vmatrix}$$

$$=n!(n-1)!(n-2)!\cdots2!=\prod_{k=1}^{n}k!.$$

【例 7】 计算 n 阶行列式 $\begin{vmatrix}x&a&a&\cdots&a\\a&x&a&\cdots&a\\a&a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$.

【解】 $\begin{vmatrix}x&a&a&\cdots&a\\a&x&a&\cdots&a\\a&a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a&a&a&\cdots&x\end{vmatrix}=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1&a&a&\cdots&a\\1&x&a&\cdots&a\\1&a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&a&a&\cdots&x\end{vmatrix}$

$$=[x+(n-1)a]\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & x \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}.$$

【例 8】 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$.

【解】 将行列式按第 n 列展开,有

$$D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2},$$
$$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta(D_{n-1}-\alpha D_{n-2}),$$
$$D_n-\beta D_{n-1}=\alpha(D_{n-1}-\beta D_{n-2}),$$

得 $$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta^2(D_{n-2}-\alpha D_{n-3})=\cdots=\beta^{n-2}(D_2-\alpha D_1)=\beta^n,$$

同理,得 $$D_n-\beta D_{n-1}=\alpha^n,$$

所以 $$D_n=\begin{cases}(n+1)\alpha^n, & \alpha=\beta, \\ \dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}, & \alpha\neq\beta.\end{cases}$$

【例 9】 计算如下行列式的值:

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

【解】

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 3 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_i-r_1]{(i=2,\cdots,n)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 2 & 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-1 & -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_1+\frac{1}{n}r_i]{(i=2,\cdots,n)} \frac{1}{n}\begin{vmatrix} 1+\cdots+n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 2 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n-2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ n-1 & -n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$